

УДК 533; 517.958

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ АНАЛОГЕ ВОЛН ПРАНДТЛЯ — МАЙЕРА

А. П. Чупахин, Ж. А. Шахметова*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

*Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

E-mail: zhainagul_sh@mail.ru

Исследуется регулярное частично инвариантное решение уравнений газовой динамики, обобщающее на трехмерный случай решения Прандтля — Майера. Найдены все особые многообразия динамической системы третьего порядка, определяющей решение, и построена ее компактификация.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, динамическая система, особые многообразия.

Теоретико-групповые методы позволяют находить обширные классы точных решений нелинейных математических моделей, описывающих пространственные движения среды. Для исследования получаемых подмоделей привлекаются методы теории динамических систем. В настоящей работе построено точное решение уравнений газовой динамики, обобщающее классическое решение Прандтля — Майера на пространственный случай. Оно не сводится к простой волне и описывает трехмерные движения газа.

1. Вывод динамической системы. Подалгебра $L_{4,23}$ алгебры симметрии уравнений газовой динамики (УГД) с уравнением состояния газа общего вида [1]

$$L_{4,23} = \{\partial_x, t\partial_x + \partial_u, \partial_t, t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z\} \quad (1.1)$$

порождает регулярное небарохронное частично инвариантное решение (РЕЧИР) ранга 1 и дефекта 1 [2]. Его удобно записывать в цилиндрической системе координат (x, r, θ) , $\mathbf{u} = (u, V, W)$, где $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, $\theta = \arctg z/y$; u — осевая (вдоль Ox), V — радиальная, W — окружная компоненты вектора скорости.

Инварианты алгебры (1.1) — это термодинамические величины: плотность ρ , давление p и энтропия S , а также полярный угол θ и компоненты скорости V, W . Компонента u является лишней функцией. Согласно общей схеме построения РЕЧИР [3] представление решения, порождаемого подалгеброй (1.1), имеет вид

$$V = V(\theta), \quad W = W(\theta), \quad \rho = \rho(\theta), \quad p = p(\theta), \quad S = S(\theta), \quad u = u(t, x, \theta, r). \quad (1.2)$$

Далее для определенности рассматривается политропное уравнение состояния газа $p = S\rho^\gamma$ с показателем адиабаты $\gamma > 1$, для которого скорость звука c имеет представление $c^2 = \gamma p/\rho$. После подстановки представления (1.2) в систему УГД получается факторсистема относительно алгебры (1.1), состоящая из инвариантной и переопределенной подсистем. Условия совместности последней дополняют инвариантную подсистему. Для данного РЕЧИР (1.2) эта процедура описана в [2], поэтому приведем лишь окончательный результат.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00550) и фонда “Ведущие научные школы России” (грант № НШ-440.2003.1).

Компонента скорости u (лишняя функция) имеет вид

$$u = hx/r + U(t, r, \theta), \quad (1.3)$$

где $h = h(\theta)$ — вспомогательная функция, своеобразный обобщенный потенциал решения. Функция U в (1.3) является решением уравнения

$$U_t + VU_r + (1/r)WU_\theta + (1/r)hU = 0. \quad (1.4)$$

Инвариантная подсистема имеет вид

$$\begin{aligned} V' &= W, \\ W(c^2)' + (\gamma - 1)c^2(W' + V + h) &= 0, \\ Wh' + h^2 - hV &= 0, \\ V^2 + W^2 + 2c^2/(\gamma - 1) &= 2b_0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где штрихом обозначена производная по инвариантной переменной θ ; $b_0 > 0$ — постоянная. Третье уравнение в (1.5) является условием совместности переопределенной подсистемы. Система (1.5) состоит из трех дифференциальных уравнений для четырех неизвестных функций V , W , c , h и конечного соотношения, являющегося инвариантным интегралом Бернулли.

Заметим, что из последнего уравнения системы (1.5) можно получить и полный интеграл Бернулли, добавив в обе его части слагаемое $u^2/2$. В силу первого уравнения импульсов $Du = 0$, поэтому в правой части полученного равенства постоянная b_0 заменяется на некоторую функцию лагранжевой координаты u .

После разрешения инвариантной подсистемы (1.5) уравнение (1.4) интегрируется в квадратурах. В [2] система (1.5) сведена к одному обыкновенному неявному дифференциальному уравнению третьего порядка. Это сведение осуществляется выпрямлением инвариантной части полной производной заменой $\theta \rightarrow \lambda = \lambda(\theta)$ по формуле $d\lambda/d\theta = 1/W$ при $W \neq 0$. Получающееся при этом ключевое уравнение третьего порядка выписывается в терминах функции h и ее производных. Главным моментом исследования РЕЧИР (1.2) является изучение решения динамической системы (1.5) или эквивалентного ей уравнения для $g(\lambda)$ из [2].

В данной работе представлен первый этап качественного исследования решения системы (1.5).

Из представления (1.3) для компоненты скорости u следует, что при $h \neq 0$ движение газа будет существенно трехмерным. При $h = 0$ система (1.5) сводится к известной системе, описывающей установившиеся безвихревые плоские течения газа и имеющей своим решением простые волны Прандтля — Майера [4]. Таким образом, наличие функции $h \neq 0$ порождает новое решение, обобщающее классические простые волны. Вектор вихря $\omega = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$ для решения (1.2) в цилиндрических координатах имеет представление

$$\omega^1 = r^{-1}u_\theta, \quad \omega^2 = -r^{-1}u_r, \quad \omega^3 = r^{-1}((rW)_r - V_0) = 0.$$

Следовательно, в силу первого уравнения в (1.5) это безвихревое движение газа в плоскости $R^2(y, z)$.

Присутствие функции h существенно усложняет анализ уравнений и приводит к новому физически содержательному решению.

2. Преобразование системы (1.5). Последнее уравнение системы (1.5) является конечным интегралом, поэтому ее удобно трактовать как динамическую систему на сфере S^2 в пространстве $R^3(V, W, c)$ или на цилиндре $R \times S^2$ в пространстве $R^4(h, V, W, c)$ и перейти на поверхность, задаваемую этим интегралом. Этот переход осуществляется

с помощью стереографической проекции. Вначале проводится следующее масштабирование искомым функций:

$$V = \sqrt{2b_0} v, \quad W = \sqrt{2b_0} w, \quad c = \sqrt{b_0(\gamma - 1)} Q, \quad h = \sqrt{2b_0} H, \quad Q > 0. \quad (2.1)$$

В новых переменных (v, w, Q, H) , определяемых (2.1), система (1.5) принимает вид

$$\begin{aligned} v' &= w, \\ wQ' + \alpha_0^2(w' + v + H) &= 0, \\ wH' - vH + H^2 &= 0, \\ v^2 + w^2 + Q^2 &= 1, \quad Q > 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\alpha_0^2 = (\gamma - 1)/2$.

Стереографическая проекция отображает точку P верхней полусферы $S^2(v, w, Q)$, $Q > 0$ в точку P' на плоскости $R^2(R, \psi)$ по формулам [5]

$$v = \frac{2R \sin \psi}{R^2 + 1}, \quad w = \frac{2R \cos \psi}{R^2 + 1}, \quad Q = \frac{R^2 - 1}{R^2 + 1}. \quad (2.3)$$

Переменные (R, ψ) являются полярными координатами на плоскости $R \geq 0$, $\psi \in [0, 2\pi)$. Поскольку $Q > 0$ (это масштабированная скорость звука), $R > 1$, следовательно, на плоскости $R^2(R, \psi)$ рассматривается лишь внешность единичного круга. Образом северного полюса N полусферы является бесконечно удаленная точка плоскости.

В переменных (R, ψ, H) система (2.2) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} R' &= \frac{H(R^2 - 1)(R^2 + 1)^2 \cos \psi}{2d}, \\ \psi' &= \frac{2Rd + H(R^2 - 1)^2(R^2 + 1) \sin \psi}{2Rd}, \\ H' &= \frac{H(2R \sin \psi - (R^2 + 1))}{2R \cos \psi}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $d = (R^2 - 1)^2 - \beta_0^2 R^2 \cos^2 \psi$; $\beta_0 = 4/\alpha_0^2$; $R > 1$.

Система (2.4) после введения “модифицированного времени” и новой переменной $g = \sin \psi$ сводится к динамической системе с полиномиальными правыми частями. В теории динамических систем принято называть независимую переменную временем, хотя в нашем случае ею является полярный угол θ . “Модифицированное время” — новая независимая переменная τ — вводится по правилу

$$2R |d \cos \psi| \frac{d}{d\theta} = \frac{d}{d\tau}. \quad (2.5)$$

Наличие модуля в формуле (2.5) обеспечивает монотонность замены. Нули выражения $d \cos \psi$ могут задавать многообразия непродолжимости решения, поскольку на них меняется направление движения по траекториям системы (2.4) в фазовом пространстве (мы вернемся к данному вопросу в п. 6 при исследовании поведения системы на границах области существования решения).

После этих замен система (2.4) принимает окончательный вид

$$\begin{aligned} R' &= HR(R^2 - 1)(R^2 + 1)^2(1 - g^2), \\ g' &= (1 - g^2)(2Rd + H(R^2 - 1)^2(R^2 + 1)g), \\ H' &= H(2Rg - H(R^2 + 1))d, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$d = (R^2 - 1)^2 - \beta_0^2 R^2 (1 - g^2). \quad (2.7)$$

Система (2.6) определена в области

$$\Omega: R > 1, \quad |g| \leq 1. \quad (2.8)$$

Границы $\partial\Omega = \{\partial\Omega_1 = \{R = 1\} \cup \partial\Omega_2 = \{|g| = 1\}\}$ области Ω являются поверхностями в фазовом пространстве $R^3(R, g, H)$. Они называются “физическими границами” многообразия, на котором определена система (2.6), в отличие от тех компонент границы многообразия, которые получаются компактификацией на бесконечности.

3. Общие сведения из теории динамических систем. Исследование качественных свойств решений многомерных динамических систем имеет свои особенности, каких нет в двумерном случае. Для полноты изложения приведем основные понятия теории [5–7].

Дана динамическая система

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Первым этапом ее исследования является отыскание и классификация особых точек \mathbf{x}_0 системы (3.1), удовлетворяющих уравнениям

$$f_i(\mathbf{x}_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Пусть $J = (\partial f_i / \partial x_j)$, $i, j = 1, \dots, n$ есть матрица Якоби векторного поля системы (3.1), определяющая линеаризацию этой системы. Невырожденным особым точкам соответствуют ненулевые собственные значения матрицы J . Собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ с отрицательными вещественными частями соответствует d -мерное многообразие W_s^d , на котором все траектории системы (3.1) при $t \rightarrow +\infty$ входят в особую точку \mathbf{x}_0 ; для собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ с положительными вещественными частями существует k -мерное инвариантное многообразие W_u^k , на котором все траектории выходят из этой точки. Известны формулы для асимптотик траекторий вблизи невырожденной особой точки.

Возможно существование многообразия M^k размерности k , сплошь заполненного особыми точками — особого многообразия. Система (3.1) в точках M^k необходимо имеет k нулевых собственных чисел. Особое многообразие называется невырожденным, если в почти всех особых точках M^k имеется $n - k$ собственных чисел с ненулевыми вещественными частями.

Для разрешения вырожденных особых точек (все $\lambda_i = 0$) применяется метод разрешения особенностей (“раздутие” фазового пространства в особой точке), при котором вместо особой точки вклеивается целое инвариантное многообразие. Известно, что этот процесс за конечное число шагов приводит к невырожденной особой точке.

После того как будут найдены все конечные особые точки и многообразия и разрешены вырожденные из них, строится компактное многообразие, на котором определена система (3.1). Часть компонент границы этого многообразия определяется физическими условиями задачи

$$\Gamma_j: \Phi_j = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.3)$$

В исследуемом случае условия (3.3) задаются системой неравенств (2.8). Помимо этого система (3.1) пополняется границей на бесконечности по переменным x_i (аналог сферы Пуанкаре для двумерных динамических систем). Это пополнение осуществляется с помощью введения $2n$ карт U_i^\pm проективных координат

$$y_1^i = \frac{x_1}{x_i}, \quad \dots, \quad y_j^i = \frac{x_1}{x_i}, \quad z_i = \frac{1}{x_i}, \quad \dots, \quad y_n^i = \frac{x_n}{x_i}. \quad (3.4)$$

В локальной карте U_i^\pm имеем $z_i = \pm 1$. В координатах (3.4) бесконечно удаленным точкам x_i соответствуют точки гиперплоскости L_i^\pm : $z_i = \pm 0$. В результате преобразований координат вида (3.4) к фазовому пространству в (2.2) области бесконечно больших значений координат x_i приклеивается граница — $(n-1)$ -мерная сфера S^{n-1} , покрытая гиперплоскостями L_i^\pm . Эту систему надо исследовать на инвариантной гиперплоскости L_i , поскольку на ней могут появиться новые особые точки.

После этих процедур получается динамическая система на компактном многообразии S , причем все особые точки и многообразия системы разрешены, т. е. приведены к невырожденным.

Поведение траекторий динамической системы исследуется методом сепаратрисной аппроксимации. Строится последовательность сепаратрис, идущих из одной особой точки в другую, и на основе теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных прослеживается поведение траекторий динамической системы (3.1), достаточно близких к этим сепаратрисам.

В данной работе найдены все особые точки и многообразия системы (3.1) и дана их классификация, а также построено компактное многообразие S , на котором определена эта система.

4. Конечные особые точки и многообразия системы (2.6). Вычисление особых точек и многообразий, а также собственных чисел линеаризации векторного поля системы (2.6) в этих точках проводится по стандартной схеме, но является достаточно громоздким. Итоговый результат классификации конечных особых точек и многообразий системы (2.6) приведен в табл. 1. Точки пересечения прямых m_ε и кривых c_ε с плоскостью $R = 1$ являются вырожденными особыми точками, на них степень регулярности падает. Везде в таблице $\varepsilon = \pm 1$.

На рис. 1 представлена область Ω (2.8), в которой определена система (2.6), с указанием особых многообразий и точек в соответствии с табл. 1.

5. Особые точки системы (2.6) на бесконечности и ее компактификация. Для исследования особых точек системы (2.6) на бесконечности по переменным R и H нужно преобразовать ее к проективным координатам вида (3.4). Для покрытия всего многообразия требуются несколько карт вида (3.4): одна — для $R = +\infty$ и две — для $H = \pm\infty$

Таблица 1

№ п/п	Описание многообразия	Собственные значения	Дополнительная характеристика
1	Прямые $l_\varepsilon = \{R = 1, u = \varepsilon, H \in R\}$	$\lambda_i = 0, i = 1, 2, 3$ (вырожденные)	—
2	Прямые $m_\varepsilon = \{R > 1, u = \varepsilon, H = 0\}$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -4\varepsilon R(R^2 - 1)^2$ $\lambda_3 = 2\varepsilon R(R^2 - 1)^2$ (невырожденные при $R \neq 1$)	Вырождение в точках $B_\varepsilon: R = 1$
3	Кривые $c_\varepsilon = \{R > 1, H = 2\varepsilon R/(R^2 + 1), u = \varepsilon\}$ На c_1 : $0 < H < 1$ На c_{-1} : $-1 < H < 0$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -8\varepsilon R(R^2 - 1)^2$ $\lambda_3 = -2\varepsilon R(R^2 - 1)^2$ (невырожденные при $R \neq 1$)	Вырождение в точках $A_\varepsilon: R = 1$
4	Точки $B_\varepsilon = \{R = 1, u = \varepsilon, H = 0\}$	$\lambda_i = 0, i = 1, 2, 3$ (вырожденные)	—
5	Точки $A_\varepsilon = \{R = 1, H = \varepsilon, u = \varepsilon\}$	$\lambda_i = 0, i = 1, 2, 3$ (вырожденные)	—

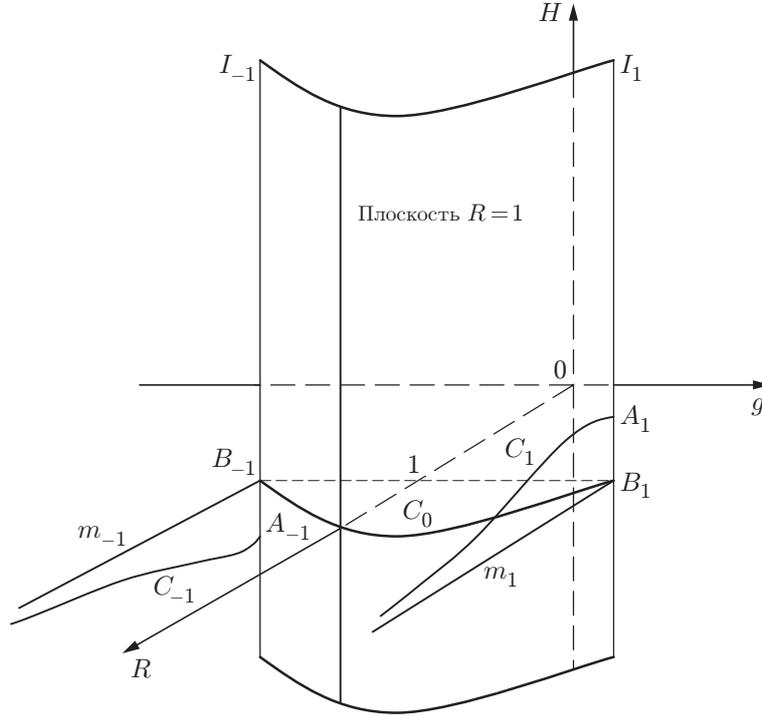


Рис. 1

соответственно. Прделаем необходимые вычисления для одной из них и приведем затем итоговый результат.

Найдем особые точки системы (2.6) при $R \rightarrow +\infty$ (напомним, что $R > 1$). Для этого введем новые координаты (R_0, H_0, g) вида (3.4) по формулам

$$R_0 = \frac{1}{R}, \quad H_0 = \frac{H}{R}, \quad g. \tag{5.1}$$

Из $R > 1$ следует, что $R_0 < 1$. Система (2.6) в координатах (5.1) после монотонной замены времени $R_0^7(d/d\tau) \rightarrow (d/d\tau)$ принимает вид

$$\begin{aligned} R' &= H_0 R_0 (R_0^2 - 1)(R_0^2 + 1)^2 (1 - g^2), \\ g' &= (1 - g^2)(2R_0^2 d_0 + H_0(1 - R_0^2)^2 (R_0^2 + 1)g), \\ H' &= H_0(2R_0 g - H_0(R_0^2 + 1)d_0 + H_0(R_0^2 - 1)(R_0^2 + 1)^2 (1 - g^2)), \end{aligned} \tag{5.2}$$

где $d_0 = (1 - R_0^2)^2 - \beta_0^2 R_0^2 (1 - g^2)$.

Отыскиваются особые точки системы (5.2) при $R_0 = 0$, соответствующие $R = +\infty$. На плоскости $R_0 = 0$ (5.2) приводится к системе

$$\begin{aligned} g' &= gH_0(1 - g^2), \\ H_0' &= H_0^2(g^2 - 2), \end{aligned} \tag{5.3}$$

которая после модификации времени $|H_0|^{-1} d/d\tau \rightarrow d/d\tau$ принимает вид

$$\begin{aligned} g' &= g(1 - g^2), \\ H_0' &= H_0(g^2 - 2). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Система (5.4) имеет следующие особые точки: $P_0 = \{u = H_0 = 0\}$, $P_\varepsilon = \{u = \varepsilon, H_0 = 0\}$. Собственные значения линеаризации векторного поля системы (5.4) в точке P_0

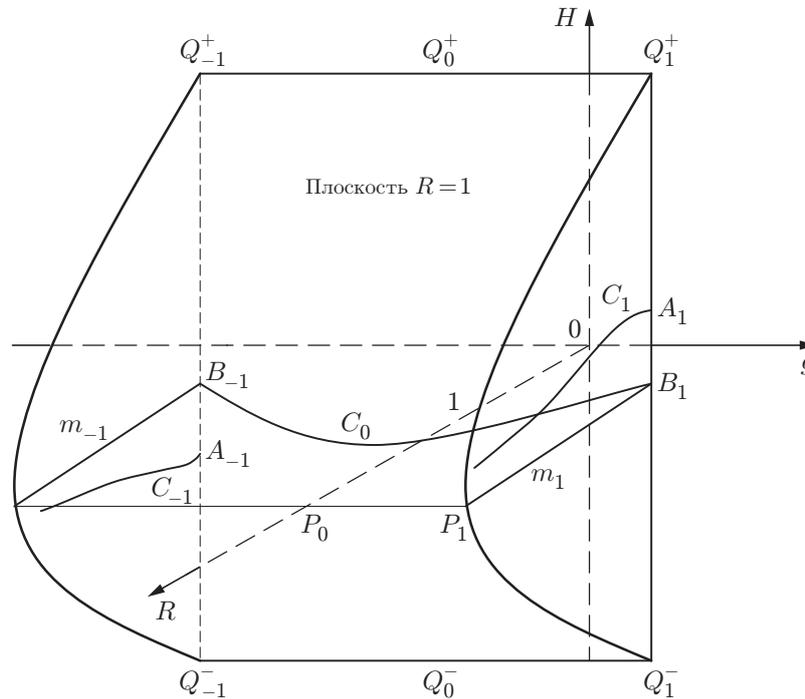


Рис. 2

равны: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, так что эта точка является седлом. Точки P_ε : $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ являются притягивающими узлами.

Аналогично исследуется поведение системы (2.6) при $H \rightarrow \infty$, причем здесь различаются два случая: $H \rightarrow +\infty$ и $H \rightarrow -\infty$. Для этого вводятся координаты: $R_1 = R/H$, $H_1 = 1/H, g$, так что $H = \pm\infty$ соответствует $H_1 = \pm 0$. Результат исследования таков. В точках $Q_0^\pm = \{R_1 = u = 0, H_1 = \pm 0\}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Разрешение этих вырожденных точек показывает, что они являются узлами. В точках $Q_\varepsilon^\pm = \{R_1 = 0, u = \varepsilon, H_1 = \pm 0\}$ собственные значения: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \varepsilon$, так что эти точки являются седлами.

На рис. 2 изображено компактное многообразие S системы (2.6) с указанием особых многообразий согласно табл. 1 и особых точек на бесконечности по переменным R и H .

На основе проделанной классификации особых точек и многообразий системы (2.6) можно сделать вывод, что все они лежат на компонентах границы многообразия S , поэтому необходимо исследовать, отвечают ли им какие-то физически содержательные решения.

6. Поведение решений системы (2.6) на компонентах границы компактного многообразия S . В табл. 2 дано описание асимптотических режимов движения газа, соответствующих компонентам границы S . Все компоненты границы являются инвариантными многообразиями. Поверхность $d = 0$, задаваемая в фазовом пространстве уравнением (2.7), является поверхностью непродолжимости решения: согласно уравнениям (2.4) с двух сторон от нее векторное поле системы имеет противоположные направления. Эта поверхность является образом звуковой характеристики на решении (1.2) в фазовом пространстве.

Действительно, в физическом пространстве ей отвечает некоторая плоскость $\theta = \theta_0 = \text{const}$, нормальная к ней компонента скорости есть W . Уравнение $W^2 = c^2$ в переменных g, R принимает вид $d = 0$, что и доказывает утверждение.

Классическая простая волна Прандтля — Майера [4] отвечает в решении системы (2.6) инвариантному многообразию — плоскости $H = 0$.

Таблица 2

№ п/п	Компоненты границы	Параметры течения	Состояние газа
1	Плоскость $R = 1$	$Q = 0$	Разрежение газа Вакуум
2	Плоскости $g = \varepsilon$ ($\varepsilon = \pm 1$)	$v = \frac{2\varepsilon R}{R^2 + 1}$ $w = 0$ $Q = \frac{R^2 - 1}{R^2 + 1}$	Радиальное движение газа ($\varepsilon = +1$ — источник, $\varepsilon = -1$ — сток)
3	$R = +\infty$	$v = w = 0$ $Q = 1$	Остановка газа Покой
4	Плоскость $H = 0$	Решения системы при $h = 0$	Простая волна Прандтля — Майера

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
2. **Чупахин А. П.** Небарохронные подмодели типов (1.2) и (1.1) уравнений газовой динамики. Новосибирск, 1999. (Препр. / СО РАН. Ин-т гидродинамики; № 1-99).
3. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. Москва; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.
5. **Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.** Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966.
6. **Богоявленский О. И.** Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980.
7. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Поступила в редакцию 26/XI 2004 г.