ЛИТЕРАТУРА

1. **Развитие** исследований по теории фильтрации в СССР/Под ред. П. Я. Полубариновой-Кочиной. М.: Наука, 1969.
2. **Баренблатт Г. И.** О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 1.
3. **Баренблатт Г. И.** Об автомодельных движениях жидкости в пористой среде.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 6.
4. **Баренблатт Г. И.** Об одном классе точных решений плоской одномерной задачи нестационарной фильтрации газа в пористой среде.— ПММ, 1953, т. 17, вып. 6.
5. **Ермолаев Б. С., Сулимов А. А. и др.** Природа и закономерности квазистационарного пульсирующего конвективного горения.— ФГВ, 1980, т. 16, № 3.
6. **Андреев В. В., Лукьянчиков Л. А.** К механизму распространения детонации с малой скоростью в порошковом ТЭНе при искровом инициировании.— ФГВ, 1974, т. 10, № 6.
7. **Нигматулин Р. И.** Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
8. **Kuo K. K., Vichnevetsky R., Summerfield M.** Theory of flame front propagation in porous propellant charges under confinement.— AIAA J., 1973, vol. 11, N 4. Рус. пер. Ракетн. техника и космонавтика, 1973, т. 11, № 4.
9. **Gough P. S., Zwarts F. J.** Modeling heterogeneous two-phase reacting flow.— AIAA J., 1979, vol. 17, N 1. Рус. пер. Ракетн. техника и космонавтика, 1979, т. 17, № 1.

УДК 532.529.5

ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ ДВУХФАЗНЫМ ПОТОКОМ ТИПА ГАЗ — ТВЕРДЫЕ ЧАСТИЦЫ С УЧЕТОМ ЭРОЗИИ

А. П. Трунев, В. М. Фомин

(*Новосибирск*)

Течение смеси газа и твердых частиц часто сопровождается разрушением материала обтекаемых тел вследствие многочисленных соударений частиц с поверхностью. В процессе эрозии форма тела может значительно меняться, что влечет перестройку всей газодинамической картины течения. Поэтому необходимо включить описание процесса эрозии в известную схему расчета двухфазных потоков. С другой стороны, износ поверхности ослабляет прочностные характеристики конструкции, что является серьезной инженерной проблемой. Определению величин износа при эрозии в различных аэродинамических ситуациях посвящены работы [1—4], но в них не содержится корректной математической модели явления.

В данной работе сформулированы граничные условия для уравнений движения запыленного газа, непосредственно учитывающие разрушение поверхностей при выпадении частиц. В рамках предложенной модели исследованы проблема эрозии тонкого плоского профиля и начальная стадия разрушения клина в гиперзвуковом запыленном потоке.

1. Граничные условия, отвечающие эрозии. Процесс эрозии развивается в результате соударений многих мелких частиц с поверхностью твердой границы. В каждом акте соударения некоторый объем материала удаляется с поверхности и уносится течением. Эффект удара одной микроскопической частицы также является микроскопическим, но если число ударов велико, объем унесенного в результате эрозии материала становится большим. Пусть до начала эрозии поверхность твердой границы описывалась уравнением

$$z - h_0(x, y) = 0.$$

В процессе эрозии исходная поверхность заметно меняется, так что в каждый момент времени уравнение поверхности будет иметь вид

$$z - h(x, y, t) = 0.$$

Масса материала, унесенного в результате эрозии за время Δt с единичной площадки, есть

$$\Delta M = \rho_* [h(x, y, t) - h(x, y, t + \Delta t)], \tag{1.1}$$

где ρ_* — плотность эродируемого материала. Если пренебречь эффектами кратных соударений, что справедливо при малом объемном содержании частиц, то эрозия является суммой вкладов от ударов отдельных частиц и справедливо уравнение

(1.2) $$\Delta M = \delta M \dot{n} \Delta t,$$

где δM — масса материала, унесенного при ударе одной частицы; $\dot{n}$ — поток частиц на единичную площадку. Величину δM можно определить, зная массу одной частицы m_p и коэффициент эрозии E, по формуле

(1.3) $$\delta M = E m_p.$$

Подставляя (1.3) в (1.2), (1.1), раскладывая в ряд Тейлора функцию $h(x, y, t + \Delta t)$ около точки (x, y, t) и переходя к пределу $\Delta t \to 0$, находим

(1.4) $$\rho_* \partial h / \partial t = E \rho_p (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}) \sqrt{1 + (\partial h / \partial x)^2 + (\partial h / \partial y)^2},$$

где ρ_p, $\mathbf{v}_p$ — плотность и скорость потока частиц; $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности $z = h(x, y, t)$.

Соотношение (1.4) связывает параметры набегающего потока с изменением самой поверхности и параметрами эрозии. Поэтому задачи об обтекании тел двухфазным потоком с учетом эрозии сводятся к задачам с изменяемой границей. Разрешая соответствующую задачу, можно наряду с различными величинами поля в объеме течения извлечь информацию о локальных величинах износа $\delta h = h_0(x, y) - h(x, y, t)$, т. е. прогнозировать эрозию. Для этого необходимо знать коэффициент эрозии E, который является функцией параметров соударения.

При испытаниях на эрозию образец исследуемого материала помещают в поток запыленного газа с известными параметрами. Вследствие эрозии масса образца изменится на величину

$$\Delta M = -\Delta t \int_S E \rho_p (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}) \, dS,$$

а масса израсходованного в процессе эрозии абразива есть

$$\Delta m_p = -\Delta t \int_S \rho_p (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}) \, dS,$$

где S — площадь эродированной поверхности. По определению получаем связь коэффициента эрозии $\langle E \rangle = \Delta M / \Delta m_p$, измеренного в эксперименте, с коэффициентом E:

(1.5) $$\langle E \rangle = \int_S E \rho_p (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}) \, dS \Big/ \int_S \rho_p (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}) \, dS.$$

В том случае, когда параметры потока частиц мало меняются вдоль образца, из полученной формулы следует $\langle E \rangle = E$. Так был определен коэффициент эрозии, использованный для прогнозирования величин износа в работах [1, 2]. С другой стороны, записывая формулу (1.4) в приращениях и разрешая относительно E, находим

(1.6) $$E = -[\rho_* \delta h / \rho_p (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}) \, \delta t] \, [1 + (\partial h / \partial x)^2 + (\partial h / \partial y)^2]^{-1/2},$$

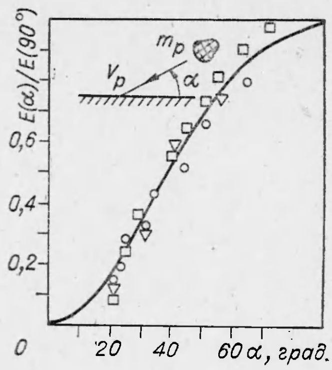
где $\delta h = h_0(x, y) - h(x, y, \delta t)$; δt — время эрозии. Таким образом, зная распределение параметров потока частиц вдоль образца и экспериментальные значения локальных величин износа δh, можно найти по формуле (1.6) коэффициент эрозии E.

В диапазоне средних скоростей соударения поведение коэффициента эрозии изучено довольно подробно для многих материалов (см., например, [6, 7]). При более высокой скорости удара ($v_p \gtrsim 1$ км/с) можно воспользоваться данными по одиночному соударению, обработанными применительно к условиям эрозии. Ниже в расчетах использовалось следующее выражение для коэффициента эрозии:

$$E = \frac{\mathbf{v}_p^2}{2H_э} F(\alpha), \quad F(\alpha) = \tag{1.7}$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{3}\left(\sin\alpha - \frac{1}{4}\right), & \alpha > 30°, \\ \frac{4}{3}(\sin\alpha)^2, & \alpha \leqslant 30°. \end{cases}$$

Здесь α — угол атаки; $H_э$ — эффективная энтальпия эрозионного разрушения [8].



Фиг. 1

На фиг. 1 приведен график функции $E(\alpha)$ (сплошная линия) вместе с данными экспериментов [9], полученными при соударении стальных шариков миллиметрового диаметра о свинцовую мишень. Сериям данных соответствуют следующие скорости соударения: 1 — 3,19; 2 — 3,81; 3 — 5,01 км/с. Такая зависимость эрозии от угла атаки является типичной в случае хрупкого износа.

Заметим наконец, что, зная коэффициент эрозии, можно определить величину потока массы продуктов эрозии, но при этом величины потоков импульса и энергии остаются неизвестными. Поэтому влияние продуктов эрозии на течение запыленного газа не рассматривается в данной работе. Проблема эрозии здесь понимается как решение известных уравнений движения запыленного газа [5] с граничным условием (1.4) в конкретных аэродинамических ситуациях.

2. Обтекание тонкого профиля смесью газ — твердые частицы. Рассмотрим задачу обтекания тонкого плоского симметричного профиля под нулевым углом атаки сверхзвуковым потоком запыленного газа. Будем считать, что газ баротропный и что движение частиц не оказывает влияния на параметры газового потока. В этом случае уравнения движения запыленного газа разделяются на уравнения газовой динамики и уравнения движения частиц в газовом потоке. В силу симметрии рассмотрим только обтекания верхней половины профиля, уравнение которого $y = h_0(x)$, $0 \leqslant x \leqslant b$ и $y(0) = y(b) = 0$. В отсутствие эрозии решение линеаризованных уравнений газовой динамики известно [10]:

$$\rho = \rho_\infty\left(1 + \frac{M_\infty^2 v}{\omega u_\infty}\right), \quad u = u_\infty - \frac{v}{\omega}, \quad v = u_\infty h_0'(x - \omega y), \tag{2.1}$$

где $\omega = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$; M_∞ — число Маха; ρ_∞, u_∞ — соответственно плотность и скорость набегающего потока. Параметры потока частиц в данном приближении удовлетворяют уравнениям [5]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho_p u_p + \frac{\partial}{\partial y}\rho_p v_p = 0, \tag{2.2}$$

$$\left(u_p\frac{\partial}{\partial x} + v_p\frac{\partial}{\partial y}\right)u_p = \frac{3}{8}\frac{\rho C_D(\mathrm{Re})}{\rho_S r_p}|\mathbf{v} - \mathbf{v}_p|(u - u_p),$$

$$\left(u_p\frac{\partial}{\partial x} + v_p\frac{\partial}{\partial y}\right)v_p = \frac{3}{8}\frac{\rho C_D(\mathrm{Re})}{\rho_S r_p}|\mathbf{v} - \mathbf{v}_p|(v - v_p),$$

где $C_D(\mathrm{Re})$ — коэффициент сопротивления; число Рейнольдса $\mathrm{Re} = 2r_p\rho|\mathbf{v} - \mathbf{v}_p|/\mu$; ρ_S — плотность материала частицы; r_p — ее радиус; μ — вязкость газа. Граничные условия для уравнений (2.2) зададим на линии Маха $x = \omega y$ в виде

$$\rho_p = \rho_{p\infty}, \quad u_p = u_\infty, \quad v_p = 0. \tag{2.3}$$

Решение системы (2.2) при условии (2.3) с учетом (2.1) представим в виде

$$\rho_p = \rho_{p\infty}\left(1 - \frac{M_\infty^2\eta}{\omega}\right)^{-1}, \quad u_p = u_\infty - \frac{v_p}{\omega}, \quad v_p = u_\infty\eta, \tag{2.4}$$

где $\xi = x - \omega y$, а функция $\eta(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\eta' = -\frac{3}{8}\frac{\rho M_\infty C_D(\mathrm{Re})\,|h_0'(\xi)-\eta|\,(h_0'(\xi)-\eta)}{\rho_S\omega r_p(1 - M_\infty^2\eta/\omega)} \tag{2.5}$$

с начальными данными $\eta(0) = 0$. Число Рейнольдса в уравнении (2.5) имеет следующее выражение:

$$\mathrm{Re} = \frac{2r_p u_\infty M_\infty\rho}{\mu\omega}\,|h_0'(\xi) - \eta|.$$

Считая, что частицы движутся в газе в стоксовом режиме, и ограничиваясь линейным приближением в уравнении (2.5), находим

$$\eta' = l_p^{-1}(h_0'(\xi) - \eta). \tag{2.6}$$

Здесь $l_p = 2\rho_S\omega r_p^2 u_\infty/M_\infty\mu_\infty$ — длина зоны релаксации частиц.

Так как линейные скорости перемещения поверхности профиля составляют малую величину $\sim\rho_p/\rho_* \leqslant 10^{-3}$ от характерной амплитуды возмущений скорости газового потока $u_\infty h_0'$, то можно пренебречь этим дополнительным возмущением при решении газодинамической задачи, т. е. в формулах (2.1), (2.6) положить $h = h(\xi, t)$. Используя граничное условие (1.4) и выражение (1.7), имеем

$$\partial h/\partial t = (dx_0/dt)\partial h/\partial x_1 - G(\partial h/\partial x_1 - \eta)^3,\ x_1 = x - x_0(t),$$

где $x_0(t)$ — положение передней кромки; $G = 2\rho_{p\infty}u_\infty^3/3\rho_* H_э$. Полученное уравнение решается совместно с (2.6) при следующих условиях:

$$h(x_1,\ 0) = h_0(x),\ h(0,\ t) = 0.$$

Функция $x_0(t)$, как это можно видеть, удовлетворяет уравнению $\dfrac{dx_0}{dt} = G\left(\dfrac{\partial h}{\partial x_1}(0,\ t)\right)^2,\quad x_0(0) = 0.$

Таким образом, задача обтекания тонкого профиля в сверхзвуковом потоке смеси газа с твердыми частицами с учетом эрозии сводится к следующей: найти функции h, η, $x_0 \in C^1$ в области $D(x_0 \leqslant x \leqslant X;\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dx_0}{dt}\frac{\partial h}{\partial x_1} - G\left(\frac{\partial h}{\partial x_1} - \eta\right)^3,$$

$$\frac{d\eta}{dx_1} = l_p^{-1}\left(\frac{\partial h}{\partial x_1} - \eta\right),\ \frac{dx_0}{dt} = G\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(0,\ t)\right)^2$$

и условиям

$$h(0,\ t) = 0,\ \eta(0) = 0,\ x_1 = x - x_0(t);$$

$$h(x_1, 0) = h_0(x),\ x_0(0) = 0,\ \partial h/\partial x_1(x_1, 0) = h_0'(x).$$

Правая граница области $x = X$ не входит в постановку задачи и находится в процессе решения как точка, в которой разность $(h' - \eta)$ меняет знак.

Поставленная задача имеет частное решение вида

$$h(x_1,\ t) = (1 - 2At)^{-1/2}f(x_1),\ \eta = (1 - 2At)^{-1/2}g(x_1), \tag{2.7}$$

$$x_0(t) = -\frac{Gf_0'^2}{2A}\ln(1 - 2At).$$

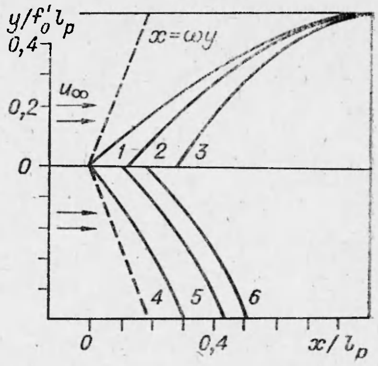
Здесь A — постоянная интегрирования, а функции $f(x_1)$ и $g(x_1)$ удовлетворяют уравнениям

$$Gf_0'^2 f' - Af = G(f' - g)^3,\ f(0) = 0,\ l_p g' = f' - g,\ g(0) = 0,\ f_0' = f'(0). \tag{2.8}$$

Система уравнений (2.8) описывает свойство профилей с заданным наклоном и кривизной:

$$h_0'(0) = f_0', \; h_0''(0) = 3f_0'/2l_p - A/2Gf_0'.$$

Из полученного решения следует, что выпуклый профиль $(h_0''(0) < 0$ и $A > 0)$ при эрозии становится еще более выпуклым, а скорость его износа растет со временем. Напротив, всякий вогнутый профиль, у которого $h_0''(0) > 3f_0'/2l_p$, при шлифовании уплощается, и скорость его износа со временем падает. Эти особенности шлифования тонкого профиля показаны на фиг. 2. Для удобств рассмотрения продольный масштаб изменен в l_p раз, а поперечный — в $l_p f_0'$ раз. Линии *1—3* соответствуют положению поверхности выпуклого профиля при эрозии ($At = 0$; 0,5; 1 соответственно), а линии *4—6* — поверхности вогнутого профиля с противоположным по знаку параметром A ($|A|t = 0$; 0,5; 1 соответственно). Штриховыми линиями обозначена нулевая линия Маха.



Фиг. 2

3. Эрозия клина в сверхзвуковом потоке. Рассмотрим задачу обтекания клина потоком газа с твердыми частицами. Клин считаем достаточно тонким, а скорость набегающего потока u_∞ такой, что ударная волна будет присоединенной. Угол клина обозначим 2θ, как показано на фиг. 3, *а*. Используем опять приближение, когда движение твердых частиц не влияет на параметры газового потока. Следуя известным результатам [10], решение, описывающее течение газа за ударной волной, представим в виде (3.1) $\varepsilon = \rho_\infty/\rho$, $u = u_\infty \cos\beta \cos\theta/\cos(\beta - \theta)$, $v = u_\infty \cos\beta \sin\theta/\cos(\beta - \theta)$. Параметры движения твердых частиц удовлетворяют системе уравнений (2.2), для которой на линии ударной волны $y = x \operatorname{tg}\beta$ должны выполняться условия

(3.2) $$\rho_p = \rho_{p\infty}, \; u_p = u_\infty, \; v_p = 0.$$

Это означает, что набегающий поток газа и частиц равновесный по скоростям.

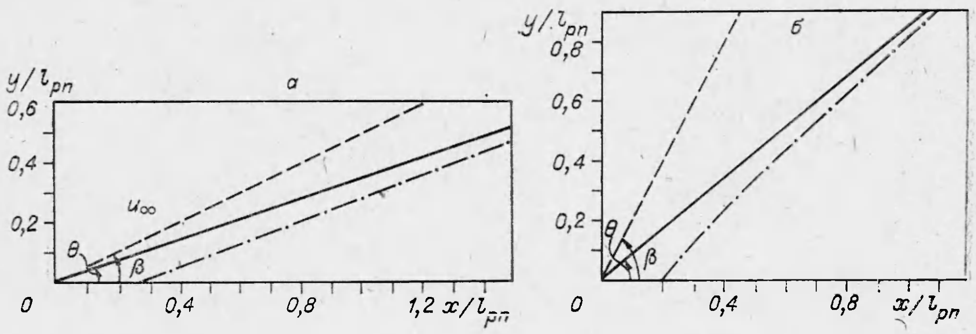
Решение системы уравнений (2.2) с граничными условиями (3.2) представим в виде

$$\rho_p = \rho_{p\infty}/(1 - (1 - \varepsilon)\eta), \; u_p = u_\infty - (u_\infty - u)\eta, \; v_p = v\eta,$$

где функция $\eta(\xi)$ удовлетворяет уравнению

(3.3) $$\eta' = \frac{3}{8} \frac{\rho C_D(\mathrm{Re}) \sin\theta \operatorname{ctg}\beta}{\rho_S r_p \cos(\beta - \theta)} \frac{(1 - \eta)^2}{1 - (1 - \varepsilon)\eta}, \quad \eta(0) = 0.$$

Здесь $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_0(1 - \eta)$; $\mathrm{Re}_0 = 2r_p \rho v/\mu \cos\beta$; $\xi = x \operatorname{tg}\beta - y$. Далее использована степенная аппроксимация коэффициента сопротивления



Фиг. 3

$C_D(\mathrm{Re}) = C_n \mathrm{Re}^{-n}$. Решение уравнения (3.3) имеет в этом случае вид

$$\xi = l_{pn}\left\{\frac{\varepsilon}{1-n}\left[(1-\eta)^{n-1}-1\right] + \frac{1-\varepsilon}{n}\left[1-(1-\eta)^{n}\right]\right\},$$

где $l_{pn} = \dfrac{8}{3}\,\dfrac{\rho_S \mathrm{Re}_0^n \cos(\beta-\theta)}{\rho C_n \sin\theta \operatorname{ctg}\beta}\, r_p$.

Следует заметить, что при $n = 0{,}5$ полученное решение совпадает с известным, приведенным в [11]. На фиг. 4 представлены результаты расчетов функции $\eta(\xi)$ для различных законов сопротивления при $\varepsilon = 0{,}32$ (линии *1—3* соответствуют $n = 0$; 0,5; 1). Среди двух параметров n и l_{pn} определяющим является длина релаксации. Так, если закон сопротивления выбран не точно, но длина релаксации определена правильно, максимальная ошибка в определении параметров потока частиц не превышает 25%.

Рассмотрим эрозию клина в линейном приближении. Коэффициент эрозии выбираем в виде (1.7). Подставляя полученные решения в формулу (1.4) и интегрируя, находим

$$h(y,\,t) = y\operatorname{ctg}\theta + \frac{\rho_{p\infty}u_\infty}{\rho_*}\left(\frac{u_\infty^2}{2H_э} - \frac{4}{3}\sin^2\theta\right)\frac{(1-\eta)^2}{1-(1-\varepsilon)\,\eta}\,t, \tag{3.4}$$

где функция $\eta(\xi)$ вычисляется на поверхности клина, т. е. при $\xi = y(\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\theta - 1)$.

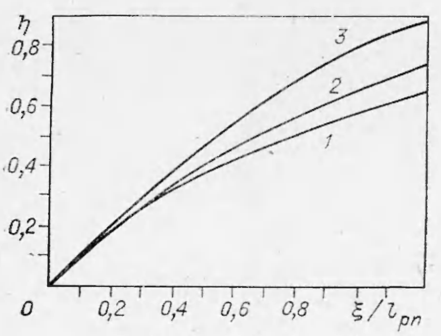
Так как $\eta(\xi)$ монотонно изменяется вдоль поверхности клина, то максимальная эрозия будет иметь место у носика клина. Скорость износа передней кромки равна

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{\rho_{p\infty}}{\rho_*}\left(\frac{u_\infty^2}{2H_э} - \frac{4}{3}\sin^2\theta\right)u_\infty.$$

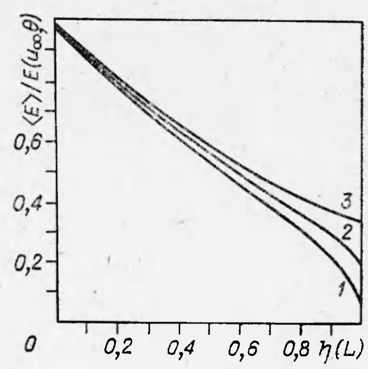
На фиг. 3, *а* представлены результаты расчета эрозии тонкого клина при следующих параметрах: $\theta = 19°$, $M_\infty = 5$, $\dot{x}_0 t = 0{,}3 l_p$, $n = 0{,}5$. Сплошная линия указывает положение поверхности клина до начала эрозии, а последующее ее изменение — штрихпунктирная линия. Величина износа практически линейно убывает с расстоянием от передней кромки, так как параметр ξ/l_p изменяется здесь незначительно и не превышает 0,2. На фиг. 3, *б* показана эрозия поверхности клина с углом раствора $\theta = 40°$, $M_\infty = 5$ и $n = 0{,}5$. Можно отчетливо наблюдать неравномерный вдоль поверхности износ. Штриховой линией на фиг. 3, *а*, *б* указано положение ударной волны до начала эрозии.

Используя уравнение (1.5) и полученное решение, вычислим средний коэффициент эрозии по формуле

$$\langle E\rangle = E(u_\infty,\,\theta)\,\frac{n}{2+n}\left[\frac{1-(1-\eta)^{2+n}}{1-(1-\eta)^n}\right]_{\xi=L},$$



Фиг. 4



Фиг. 5

где $L = H(\operatorname{tg}\beta \operatorname{ctg}\theta - 1)$; H — высота клина. Из полученного соотношения видно, что краевые эффекты значительно искажают характер поведения коэффициента эрозии при его осреднении, так как u_∞ и θ влияют на значение $\eta(\xi)$ в краевой точке $\xi = L$ (фиг. 5, линии *1—3* соответствуют $n = 0$; 0,5; 1). Таким образом, измерения необходимо проводить либо на очень длинных клиньях ($L \gg l_p$), либо на коротких ($L \ll l_p$).

Как следует из результатов, приведенных на фиг. 3, *а*, *б*, клин затупляется при эрозии. Угол наклона поверхности клина в окрестности передней кромки определяется из соотношения $\operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}\theta\left[1 + \frac{\dot{x}_0 t}{l_p}(2+\varepsilon)\times\right.$ $\left.\times(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\theta)\right]$. Возмущение параметров газового потока будет мало, если $\theta_1 - \theta \ll \theta$. Это имеет место при условии $\tau = \dot{x}_0 t/l_p \ll 1$, поэтому погрешность линейной теории имеет порядок $O(\tau^2)$. Уравнение (3.4), таким образом, имеет вид

$$h(y,\ t) = h(y,\ 0) + [l_p(1-\eta)^3/(1-(1-\varepsilon)\eta)]\tau + l_p O(\tau^2),$$

где явным образом указана точность использованного приближения.

Поступила 6 X 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Grant G., Tabakoff W.** Erosion prediction in turbomachinery from environmental solid particles.— J. Aircraft, 1975, vol. 12, p. 471.
2. **Шелдон Г. Л., Маджи Я., Кроу С. Т.** Эрозия трубы в газовом потоке, содержащем частицы.— Теоретические основы инженерных расчетов, 1977, № 2.
3. **Laitone J. A.** Erosion prediction near a stagnation point resulting from aerodynamically entrained solid particles.— J. Aircraft, 1979, vol. 16, p. 809.
4. **Рафиков Р. В., Зауличный Е. Г. и др.** Численное исследование двухфазного течения в осесимметричном канале с учетом реальных механизмов разрушения его стенок.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1981, № 3, вып. 1.
5. **Marble F.** Dynamics of dusty gases.— In: Ann. Rev. of Fluid Mech. Vol. 2. N. Y., 1970.
6. **Wakeman T., Tabakoff W.** Erosion behavior in a simulated jet engine environment.— J. Aircraft, 1979, vol. 16, p. 828.
7. **Шелдон Г. Л.** Сходства и различия в эрозионном поведении метериалов.— Теоретические основы инженерных расчетов, 1970, № 3.
8. **Полежаев Ю. В.** Процесс установления эрозионного разрушения материала преграды при многократном соударении частицами.—ИФЖ, 1979, т. 37, № 3.
9. **Bryan G. M., Pugh E. M.** Cratering of lead oblique impacts of hypervelocity steel pellets.— J. Appl. Phys., 1962, vol. 33, N 2.
10. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
11. **Салтанов Г. А.** Сверхзвуковые двухфазные течения. Минск: Высшая школа, 1972.

УДК 532.529.5

О СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

С. И. Плаксин

(*Новосибирск*)

Известно, что жидкость с пузырьками газа является примером нелинейной диспергирующей среды, существование стационарных возмущений в ней обусловлено взаимной компенсацией нелинейных и дисперсионных эффектов. При этом нелинейность газожидкостной смеси определяется гидродинамической нелинейностью, нелинейностью колебаний пузырьков и уравнения состояния жидкого компонента среды. Сжимаемость смеси зависит от сжимаемости ее жидкого и газового компонентов. В [1—3] получены стационарные решения системы уравнений для двухфазной среды, включающей нелинейное уравнение второго порядка типа уравнения Рэлея для одиночной полости. В этих работах предполагалось, что движение пузырьков относительно жидкости отсутствует, а их число в единице объема смеси постоянно. Кроме того, в [2] уравнения гидродинамики линейны, в [1] жидкий компонент среды несжимаем.