

УДК 531.01, 621.3
DOI: 10.15372/PMTF202415467

МЕТОД НОРМАЛЬНЫХ КООРДИНАТ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ В МЕХАНИКЕ И ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

А. Г. Петров, В. А. Румянцева*

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

* Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Москва, Россия

E-mails: petrovipmech@gmail.com, valar@bmstu.ru

Для консервативных механических систем используется метод нормальных координат для приведения двух квадратичных форм к сумме квадратов. В этом случае система дифференциальных уравнений расщепляется на систему независимых осцилляторов. Линеаризованная диссипативная механическая система с конечным числом степеней свободы определяется тремя квадратичными формами: кинетической и потенциальной энергией системы, а также диссипативной функцией Рэлея, которые к сумме квадратов, вообще говоря, не приводятся. Рассмотрены условия, при которых все три квадратичные формы одним преобразованием приводятся к сумме квадратов точно или приближенно. Показано, что для таких систем можно ввести нормальные координаты, в которых система расщепляется на независимые системы второго порядка. Это позволяет построить точные или приближенные аналитические решения в общем виде, причем в случае приближенного решения — с оценкой относительной погрешности. Преимущества такого подхода показаны для задач теоретической механики и электротехники, в которых строятся аналитические решения и проводится оптимизационный анализ. При этом традиционные методы позволяют выполнять лишь численные расчеты при заданных значениях параметров.

Ключевые слова: метод Лагранжа, квадратичные формы, нормальные координаты, диссипативные системы, электрическая цепь

Введение. Согласно общей теории малых линейных колебаний систем с конечным числом степеней свободы для консервативных систем механическая система определяется двумя квадратичными формами: кинетической и потенциальной энергией системы. В силу положительной определенности кинетической энергии можно ввести нормальные координаты, в которых кинетическая энергия приводится к сумме квадратов, а потенциальная энергия — к сумме квадратов с некоторыми множителями. В нормальных координатах уравнения расщепляются на независимые осцилляторы, решения которых выражаются через тригонометрические и показательные функции. Ранее ошибочно предполагалось, что в случае кратных корней характеристического уравнения нормальные координаты не существуют и в окончательные интегралы уравнений движения время входит не только через тригонометрические и показательные функции (см. работу [1] и библиографию к ней).

Работа выполнена в рамках государственного задания (номер госрегистрации 124012500443-0).

© Петров А. Г., Румянцева В. А., 2024

Многие задачи интегрирования и качественного анализа дифференциальных уравнений значительно упрощаются при переходе к нормальным координатам, которые применяются для исследования колебаний консервативных механических систем [1–3]. Одновременное приведение к диагональной форме двух вещественных симметричных матриц A и B всегда выполнимо [4, 5], если одна из них соответствует знакоопределенной квадратичной форме.

При анализе вынужденных колебаний диссипативных механических систем помимо квадратичных форм кинетической и потенциальной энергии возникает третья квадратичная форма — диссипативная функция Рэлея. Аналогично при расчете электрических цепей методом Лагранжа уравнения записываются с использованием трех квадратичных форм [4. § 9]. Как известно, три квадратичные формы не всегда можно привести к диагональным [6–8]. Применение методов Лагранжа и Гамильтона при расчете двухконтурных электрических цепей [9–14] не упрощает их исследование аналитическими методами, поэтому используются численные расчеты при частных значениях параметров.

Известно несколько видов условий, при выполнении которых матрицы трех квадратичных форм удастся привести к диагональному виду [8]. Общее условие приведения матриц A , B , C к диагональному виду получено в [15]: $BA^{-1}C = CA^{-1}B$. В этом случае существуют нормальные координаты, в которых система расщепляется на независимые системы второго порядка.

Однако использование условия [15] для общей системы с n степенями свободы вследствие ее громоздкости существенно затруднено. В работе [16] предложен способ упрощения этого условия, в случае если квадратичные формы зависят от двух переменных (две степени свободы). Как известно, вынужденные колебания диссипативных механических систем с двумя степенями свободы сводятся к решению системы дифференциальных уравнений четвертого порядка. Представить решения таких систем в аналитической форме практически невозможно. Возможны лишь численные решения при некоторых значениях параметров системы. Это существенно затрудняет ее оптимизацию по каким-либо параметрам. Переход к нормальным координатам позволяет расщепить системы четвертого порядка на две независимые системы второго порядка. В результате решение можно существенно упростить и записать в общем виде в элементарных функциях.

Данная методика используется при исследовании задач о вынужденных колебаниях двойного математического маятника и о течении переменного тока в двухконтурной электрической цепи.

1. Решение уравнений колебаний в нормальных координатах. Система линейных уравнений для вынужденных колебаний диссипативной механической системы с двумя степенями свободы под действием сил, меняющихся по гармоническому закону, имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = \frac{\partial N}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \quad (1.1)$$

где T , Π , R , N — кинетическая и потенциальная энергия, диссипативная функция Рэлея и мощность внешних сил:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (a_{11}\dot{x}_1^2 + 2a_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + a_{22}\dot{x}_2^2), & \Pi &= \frac{1}{2} (c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2), \\ R &= \frac{1}{2} (b_{11}\dot{x}_1^2 + 2b_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + b_{22}\dot{x}_2^2), & N &= (N_1\dot{x}_1 + N_2\dot{x}_2) \sin \omega t. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Используем следующую теорему [16].

Теорема. Пусть даны три квадратичные формы двух переменных (1.2) T, R, Π при $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Тогда для существования невырожденного преобразования

$$X = QY, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

приводящего эти три формы к виду

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (a'_{11}\dot{y}_1^2 + a'_{22}\dot{y}_2^2), & R &= \frac{1}{2} (b'_{11}\dot{y}_1^2 + b'_{22}\dot{y}_2^2), \\ \Pi &= \frac{1}{2} (c'_{11}y_1^2 + c'_{22}y_2^2), & N &= (N'_1\dot{y}_1 + N'_2\dot{y}_2) \sin \omega t, \end{aligned} \quad (1.4)$$

необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из коэффициентов исходных квадратичных форм, обратился в нуль:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.5)$$

Преобразование (1.3), приводящее указанные три формы к нормальному виду, можно построить следующим образом. Запишем систему уравнений

$$MX = 0, \quad M = \begin{pmatrix} -Ba_{11} + c_{11} & -Ba_{12} + c_{12} \\ -Ba_{12} + c_{12} & -Ba_{22} + c_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Из решения квадратного уравнения для B (равенство нулю определителя)

$$(-Ba_{11} + c_{11})(-Ba_{22} + c_{22}) - (-Ba_{12} + c_{12})^2 = 0 \quad (1.6)$$

находим два собственных значения B_1, B_2 :

$$\begin{aligned} B_{1,2} &= \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a}, & D &= b^2 - 4ac, & b &= -a_{11}c_{22} - a_{22}c_{11} + 2a_{12}c_{12}, \\ a &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2, & c &= c_{11}c_{22} - c_{12}^2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Эти значения положительны в силу положительной определенности квадратичных форм T и Π . Поэтому дискриминант D не может быть отрицательным числом. Вырожденный случай $D = 0$, в котором оба корня равны, в данной работе не рассматривается.

Таким образом, без ограничения общности считаем, что $D > 0$ и $B_1 < B_2$. Собственным значениям B_1, B_2 соответствуют два собственных вектора

$$X_1 = \begin{pmatrix} B_1a_{12} - c_{12} \\ -B_1a_{11} + c_{11} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} B_2a_{12} - c_{12} \\ -B_2a_{11} + c_{11} \end{pmatrix}.$$

Нормализующее преобразование можно представить в следующем виде:

$$x_1 = (B_1a_{12} - c_{12})y_1 + (B_2a_{12} - c_{12})y_2, \quad x_2 = (-B_1a_{11} + c_{11})y_1 + (-B_2a_{11} + c_{11})y_2. \quad (1.8)$$

В результате квадратичные формы приводятся к виду (1.4) с коэффициентами

$$\begin{aligned} a'_{ii} &= a_{11}\Delta B_i^2 - 2\Delta B_i c_{11} + a_{22}c_{11}^2 - 2a_{12}c_{11}c_{12} + a_{11}c_{12}^2, & c'_{ii} &= a'_{ii}B_i, \\ N'_i &= N_1(B_ia_{12} - c_{12}) + N_2(-B_ia_{11} + c_{11}), & i &= 1, 2, & \Delta &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Выражения для коэффициентов b'_{11}, b'_{22} не приводятся вследствие громоздкости.

Система уравнений (1.1) в нормальных переменных расщепляется на два независимых уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + A_i \frac{dy_i}{dt} + B_i y_i = E_i \sin \omega t, \quad A_i = \frac{b'_{ii}}{a'_{ii}}, \quad E_i = \frac{N'_i}{a'_{ii}}, \quad i = 1, 2. \quad (1.10)$$

Решение полученной системы для установившихся колебаний имеет вид

$$y_i = P_i \sin \omega t - S_i \cos \omega t, \quad P_i = \frac{E_i(B_i - \omega^2)}{(B_i - \omega^2)^2 + A_i^2 \omega^2}, \quad S_i = \frac{E_i A_i \omega}{(B_i - \omega^2)^2 + A_i^2 \omega^2}. \quad (1.11)$$

Амплитуды колебаний равны

$$a_i = \sqrt{P_i^2 + S_i^2} = \frac{E_i}{\sqrt{(B_i - \omega^2)^2 + A_i^2 \omega^2}}, \quad i = 1, 2.$$

Переходный процесс от состояния покоя до стационарного состояния описывается решением уравнения (1.10) с начальными условиями $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$:

$$y_i(t) = P_i \sin \omega t - S_i \cos \omega t + J_i(t),$$

$$J_i(t) = e^{-A_i t/2} \left(\frac{S_i - 2P_i \omega_i}{2\omega_i} \sin(\omega_i t) + S_i \cos(\omega_i t) \right), \quad \omega_i = \sqrt{B_i - A_i^2/4}.$$

2. Анализ системы уравнений при малых диссипативных силах. Антирезонанс. Пусть диссипативные коэффициенты являются малыми величинами порядка ε . Тогда, если исключить ε -окрестности резонансных частот $|B_1 - \omega^2| > \varepsilon$, $|B_2 - \omega^2| > \varepsilon$, то решение (1.11) с точностью до малых величин порядка ε упрощается:

$$y_i = \frac{E_i}{B_i - \omega^2} \sin \omega t, \quad x_i = a_i \sin \omega t, \quad a_i = \frac{m_i}{B_1 - \omega^2} + \frac{n_i}{B_2 - \omega^2}, \quad i = 1, 2,$$

$$m_1 = E_1(B_1 a_{12} - c_{12}), \quad n_1 = E_2(B_2 a_{12} - c_{12}),$$

$$m_2 = E_1(-B_1 a_{11} + c_{11}), \quad n_2 = E_2(-B_2 a_{11} + c_{11}).$$

При некоторой частоте амплитуда a_i может обратиться в нуль. В этом случае переменная x_i не меняется по времени. Это явление называется антирезонансом [2]. Выясним, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты m_i , n_i , чтобы существовала частота ω_0 антирезонанса. Для этого рассмотрим координатную плоскость переменных m, n (рис. 1) (индекс i опускаем). Плоскость разобьем на четыре квадранта. В первом и третьем квадрантах числители m, n дробей амплитуды a_i имеют одинаковый знак (случай 1). В первом квадранте (случай 1а) $m > 0, n > 0$, на интервале $\omega^2 \in (B_1, B_2)$ амплитуда меняется от $-\infty$ до $+\infty$ и обращается в нуль при некотором значении частоты $B_1 < \omega_0^2 < B_2$. В третьем квадранте (случай 1б) $m < 0, n < 0$, на интервале $\omega^2 \in (B_1, B_2)$ амплитуда меняется от $+\infty$ до $-\infty$ и также обращается в нуль при некотором значении частоты $B_1 < \omega_0^2 < B_2$. При этих частотах колебаний переменной x_i не происходит.

Рассмотрим случай 2: $m > 0, n < 0$ (четвертый квадрант плоскости m, n). В этом случае на интервале $\Omega^2 \in (B_1, B_2)$ амплитуда отрицательна и не может обратиться в нуль. Однако она может обращаться в нуль вне интервала в случаях 2а, 2б и 2в.

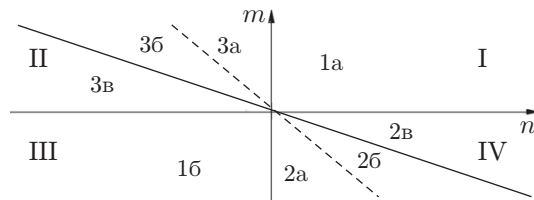


Рис. 1. Область параметров m и n :

сплошная линия — $m + n = 0$, штриховая — $m/B_1 + n/B_2 = 0$

Сплошная прямая $m + n = 0$ и штриховая прямая $m/B_1 + n/B_2 = 0$ делят четвертый квадрант на три области. В первой области (случай 2а), расположенной между осью ординат и штриховой линией, выполняются условия $m + n < 0$, $m/B_1 + n/B_2 < 0$, антирезонансная частота находится в интервале $\omega_0^2 \in (0, B_1)$.

Во второй области (случай 2б), расположенной между штриховой и сплошной прямыми, выполняются условия $m + n \leq 0$, $m/B_1 + n/B_2 \geq 0$, антирезонансной частоты не существует: $\omega_0^2 \in \emptyset$.

В третьей области (случай 2в), расположенной между сплошной прямой и осью абсцисс, выполняются условия $m + n > 0$, $m/B_1 + n/B_2 > 0$, антирезонансная частота находится в интервале $\omega_0^2 \in (B_2, \infty)$.

Случай 3 симметричен по отношению к случаю 2: $m < 0$, $n > 0$ (второй квадрант плоскости m, n). Второй квадрант также делится на три области. В первой области (случай 3а) $m + n > 0$, $m/B_1 + n/B_2 > 0$, $\omega_0^2 \in (0, B_1)$, во второй области (случай 3б) $m + n \geq 0$, $m/B_1 + n/B_2 \leq 0$, $\omega_0^2 \in \emptyset$, в третьей области (случай 3в) $m + n < 0$, $m/B_1 + n/B_2 < 0$.

В отсутствие диссипативных сил коэффициенты A_i равны нулю и при резонансных частотах амплитуды a_i обращаются в бесконечность. При учете малых диссипативных сил амплитуды имеют максимальные конечные значения

$$\max(a_i) = \frac{E_i}{A_i \sqrt{B_i}}, \quad \omega^2 = B_i, \quad i = 1, 2.$$

3. Погрешность решения укороченной системы. Условие (1.5) можно смягчить, если считать, что оно выполняется не точно, а приближенно. Оценку погрешности такого приближения можно получить следующим образом.

Пусть линейная замена (1.8) приводит две квадратичные формы T и Π к сумме квадратов:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}(B_1 y_1^2 + B_2 y_2^2),$$

при этом третья квадратичная форма R остается не приведенной к такому виду:

$$R = \frac{1}{2}(A_1 \dot{y}_1^2 + 2A_{12} \dot{y}_1 \dot{y}_2 + A_2 \dot{y}_2^2).$$

Если коэффициент A_{12} достаточно мал, то его можно не учитывать, но укороченная система дифференциальных уравнений будет описывать колебания системы с достаточной точностью.

Укороченная система уравнений имеет вид (1.10), а полная система — вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + A_1 \frac{dy_1}{dt} + A_{12} \frac{dy_2}{dt} + B_1 y_1 &= E_1 \sin \omega t, \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} + A_2 \frac{dy_2}{dt} + A_{12} \frac{dy_1}{dt} + B_2 y_2 &= E_2 \sin \omega t, \\ E_1 &= U_1 q_{11} + U_2 q_{21}, \quad E_2 = U_1 q_{12} + U_2 q_{22}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Наличие A_{12} вносит погрешность, которую можно оценить следующим образом. Решаем систему методом комплексных амплитуд. Подставляя в уравнения (3.1) решения в виде $y_1 = Y_1 e^{i\omega t}$, $y_2 = Y_2 e^{i\omega t}$, получаем

$$\begin{aligned} \lambda_1 Y_1 &= E_1 - i\omega A_{12} Y_2, & \lambda_2 Y_2 &= E_2 - i\omega A_{12} Y_1, \\ E_1 &= U_1 q_{11} + U_2 q_{21}, & E_2 &= U_1 q_{12} + U_2 q_{22}, \\ \lambda_i &= B_i - \omega^2 + i\omega A_i, & i &= 1, 2. \end{aligned}$$

Полагая параметр A_{12} малым, решаем алгебраическую систему уравнений методом возмущений:

$$Y_i = Y_i^0 + \Delta Y_i, \quad Y_i^0 = E_i/\lambda_i, \quad \Delta Y_1 = -i\omega A_{12}Y_2^0/\lambda_1, \quad \Delta Y_2 = -i\omega A_{12}Y_1^0/\lambda_2.$$

Будем называть относительной погрешностью решения без учета A_{12} величину

$$\delta = \frac{|\Delta Y_1| + |\Delta Y_2|}{|Y_1^0| + |Y_2^0|} = \omega A_{12} \frac{(|E_1| + |E_2|)/(\lambda_1 \lambda_2)}{(|E_1|/\lambda_2 + |E_2|/\lambda_1)/(\lambda_1 \lambda_2)}. \quad (3.2)$$

Отсюда с помощью неравенства $|a + ib| > (a + b)/\sqrt{2}$ для любых $a \geq 0, b \geq 0$ получаем

$$|\lambda_i| \geq (|B_i - \omega^2| + \omega A_i)/\sqrt{2},$$

следовательно,

$$\delta \leq \frac{\sqrt{2} \omega A_{12} (|E_1| + |E_2|)}{|E_1|(|B_1 - \omega^2| + \omega A_1) + |E_2|(|B_2 - \omega^2| + \omega A_2)} \leq \frac{\sqrt{2} A_{12}}{A_1 + A_2}.$$

Таким образом, величина $\sqrt{2} |A_{12}|/(A_1 + A_2)$ определяет верхнюю оценку относительной погрешности (3.2) решения (1.11).

4. Двойной плоский маятник. Рассмотрим малые колебания в окрестности положения равновесия двойного плоского маятника, точка подвеса которого движется по горизонтали по гармоническому закону $x = a \sin(\omega t)$ (рис. 2).

Запишем выражения для T, R, Π, N в виде функций обобщенных координат θ_1, θ_2 и скоростей $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ [10]:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2, & R &= \frac{1}{2} r_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} r_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2, \\ \Pi &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 \theta_2^2, & N &= a \omega^2 ((m_1 + m_2) l_1 \dot{\theta}_1 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2) \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (4.1)$$

В (4.1) выполняется линейный по относительной угловой скорости закон трения в шарнирах с коэффициентами трения r_1, r_2 .

Из равенства нулю определителя (1.5) получаем условия пропорциональности коэффициентов трения и масс $r_1 = r m_1, r_2 = r m_2$. При этих условиях определяется преобразование, приводящее квадратичные формы к сумме квадратов. Сначала путем замены приведем все характеристические функции к безразмерному виду

$$\begin{aligned} t &= \tau \sqrt{l/g}, \quad l_1 = l, \quad l_2 = l\mu, \quad m_1 = (1 - \mu)(m_1 + m_2), \quad m_2 = \mu(m_1 + m_2), \\ r &= \varepsilon(m_1 + m_2) \sqrt{gl^3}, \quad \omega^2 = \Omega^2 g/l, \end{aligned}$$

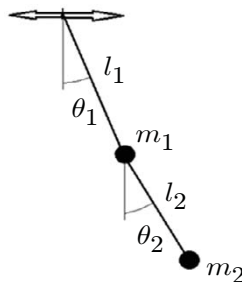


Рис. 2. Схема двойного маятника

где τ , λ , μ , Ω — безразмерные переменные. В этих переменных функции (4.1) принимают вид

$$\begin{aligned} T &= \frac{\dot{\theta}_1^2}{2} + \lambda\mu\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\lambda^2\mu\dot{\theta}_2^2, & R &= \frac{1}{2}\varepsilon((1-\mu)\dot{\theta}_1^2 + \mu(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2), \\ \Pi &= \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{1}{2}\lambda\mu\theta_2^2, & N &= \frac{a\Omega^2}{l}(\dot{\theta}_1 + \lambda\mu\dot{\theta}_2)\sin\Omega\tau. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь точки обозначают производные по переменной τ ; множитель $(m_1 + m_2)gl$ опущен.

Подставляя коэффициенты квадратичных форм (1.2)

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, & a_{22} &= \lambda^2\mu, & a_{12} &= \lambda\mu, & b_{11} &= \varepsilon, & b_{22} &= \varepsilon\mu, & b_{12} &= -\varepsilon\mu, \\ c_{11} &= 1, & c_{22} &= \lambda\mu, & c_{12} &= 0, & N_1 &= a\Omega^2/l, & N_2 &= (a\Omega^2/l)\lambda\mu \end{aligned}$$

в характеристическое уравнение (1.6), получаем квадратное уравнение

$$1 - B(3 + \lambda + \lambda^2\mu) + B^2(2 + \lambda + 2\lambda^2\mu) = 0.$$

Это уравнение имеет два корня B_1 , B_2 :

$$B_{1,2} = \frac{1 + \lambda \mp K}{2\lambda(1 - \mu)}, \quad K = \sqrt{(1 - \lambda)^2 + 4\lambda\mu},$$

через которые определяется преобразование (1.8):

$$\begin{aligned} \theta_1 &= y_1(B_1a_{12} - c_{12}) + y_2(B_2a_{12} - c_{12}) = \lambda\mu(y_1B_1 + y_2B_2), \\ \theta_2 &= y_1(-B_1a_{11} + c_{11}) + y_2(-B_2a_{11} + c_{11}) = y_1(-B_1 + 1) + y_2(-B_2 + 1), \end{aligned} \quad (4.3)$$

приводящее формы (4.2) к каноническому виду

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(a'_{11}\dot{y}_1^2 + a'_{22}\dot{y}_2^2), & R &= \frac{1}{2}(b'_{11}\dot{y}_1^2 + b'_{22}\dot{y}_2^2), \\ \Pi &= \frac{1}{2}(c'_{11}y_1^2 + c'_{22}y_2^2), & N &= (N'_1\dot{y}_1 + N'_2\dot{y}_2)\sin\omega t. \end{aligned}$$

Коэффициенты форм вычисляются по формулам (1.9) и преобразуются к виду

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \frac{K\mu(-K + 1 + \lambda(-1 + 2\mu))}{2(-1 + \mu)}, & a'_{22} &= -\frac{K\mu(K + 1 + \lambda(-1 + 2\mu))}{2(-1 + \mu)}, \\ b'_{11} &= a'_{11}\frac{\varepsilon}{\lambda}\frac{B_1}{B_2}, & b'_{22} &= a'_{22}\frac{\varepsilon}{\lambda}\frac{B_2}{B_1}, & c'_{11} &= a'_{11}B_1, & c'_{22} &= a'_{22}B_2, & N'_1 &= N'_2 = \frac{a\Omega^2}{l}\lambda\mu. \end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа в новых переменных принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2y_i}{dt^2} + A_i\frac{dy_i}{dt} + B_iy_i &= E_i\sin\Omega\tau, & i &= 1, 2, \\ A_1 &= \frac{\varepsilon}{\lambda}\frac{B_1}{B_2}, & A_2 &= \frac{\varepsilon}{\lambda}\frac{B_2}{B_1}, & E_1 &= \frac{a\Omega^2}{l}e_1, & E_2 &= \frac{a\Omega^2}{l}e_2, \\ e_1 &= \frac{2\lambda(1 - \mu)}{K(K - 1 + \lambda(1 - 2\mu))}, & e_2 &= \frac{2\lambda(1 - \mu)}{K(K + 1 - \lambda(1 - 2\mu))}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Решение уравнений для установившихся колебаний в переменных y_1, y_2 находится путем подстановки коэффициентов (4.4) в формулы

$$y_i = \frac{a\Omega^2}{l} (P_i \sin \Omega\tau - S_i \cos \Omega\tau), \quad (4.5)$$

$$P_i = \frac{e_i(B_i - \Omega^2)}{(B_i - \Omega^2)^2 + A_i^2\Omega^2}, \quad S_i = \frac{e_i A_i \Omega}{(B_i - \Omega^2)^2 + A_i^2\Omega^2}.$$

В исходных переменных решение получается в результате подстановки формул (4.5) в (4.3).

5. Нерезонансный случай. В системе имеется две резонансные частоты: $\Omega_1^2 = B_1$ и $\Omega_2^2 = B_2$. При малом трении $\varepsilon \ll 1$ вне окрестностей резонансных частот решение с погрешностью порядка ε можно получить в рамках консервативной системы по описанной в п. 1 методике.

Переменные θ_1 и θ_2 совершают гармонические колебания, которые можно определить путем подстановки в (4.3) нормальных мод (4.5), при этом малые члены порядка ε опускаем:

$$\theta_1 = \lambda\mu(y_1 B_1 + y_2 B_2), \quad \theta_2 = y_1(-B_1 + 1) + y_2(-B_2 + 1)a_i \sin \Omega\tau,$$

$$y_i = \frac{a\Omega^2}{l} \frac{e_i}{B_i - \Omega^2} \sin \Omega\tau.$$

Отсюда с использованием (4.4) находим амплитуду a_1 колебаний переменной θ_1 :

$$\theta_1 = a_1 \sin \Omega\tau, \quad a_1 = \frac{a\Omega^2}{l} a'_1, \quad a'_1 = \frac{m_1}{B_1 - \Omega^2} + \frac{n_1}{(B_2 - \Omega^2)_i}, \quad (5.1)$$

$$m_1 = e_1 B_1 a_{12} = \frac{\lambda\mu(1 + \lambda - K)}{K(-1 + \lambda - 2\lambda\mu + K)}, \quad n_1 = e_2 B_2 a_{12} = \frac{\lambda\mu(1 + \lambda + K)}{K(1 - \lambda + 2\lambda\mu + K)}.$$

Коэффициенты m_1, n_1 в силу неравенств $|1 - \lambda(1 - 2\mu)| < K < 1 + \lambda$ положительны. Поэтому в диапазоне $B_1 < \Omega^2 < B_2$ амплитуда a_1 меняется от $-\infty$ до $+\infty$ (случай 1а на рис. 1). В этом случае существует антирезонансная частота, определяемая из уравнения $a_1 = 0$:

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 = \frac{1}{\lambda(1 - \mu)}.$$

На рис. 3 представлена зависимость a'_1 от квадрата частоты Ω^2 при $\lambda = 1, \mu = 1/2$. Амплитуда a_1 при $\lambda = 1, \mu = 1/2$ обращается в нуль при $\Omega^2 = 2$.

Аналогично находится амплитуда a_2 угловой переменной θ_2 :

$$\theta_2 = a_2 \sin \Omega\tau, \quad a_2 = \frac{a\Omega^2}{l} a'_2, \quad a'_2 = \frac{m_2}{B_1 - \Omega^2} + \frac{n_2}{(B_2 - \Omega^2)_i}, \quad (5.2)$$

$$m_2 = e_1(-B_1 a_{11} + c_{11}) = 1/K, \quad n_2 = e_2(-B_2 a_{11} + c_{11}) = -1/K.$$

В диапазоне $B_1 < \Omega^2 < B_2$ каждая дробь в выражении для a'_2 отрицательна и при любой частоте амплитуда не может обратиться в нуль. Зависимость величины $\Omega^2 a'_2$ от квадрата частоты Ω^2 при $\lambda = 1, \mu = 1/2$ представлена на рис. 4. На отрезке $B_1 < \Omega^2 < B_2$ амплитуда a_2 угловой переменной θ_2 при $\Omega = (\lambda(1 - \mu))^{-1/4}$ имеет экстремальное значение, минимальное по абсолютной величине на этом отрезке:

$$\max(a_2) = -\frac{a}{l} \frac{\sqrt{\lambda(1 - \mu)}}{1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda(1 - \mu)}}.$$

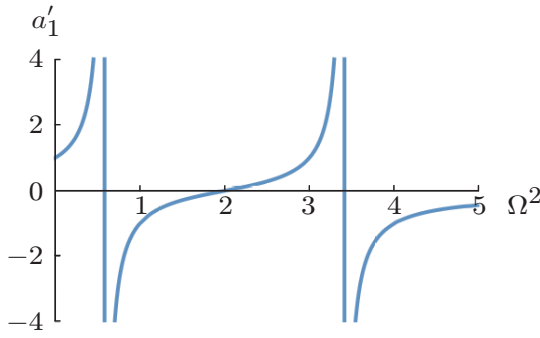


Рис. 3

Рис. 3. Коэффициент, пропорциональный амплитуде переменной θ_1

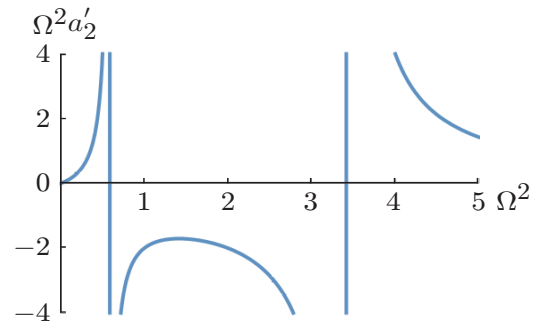


Рис. 4

Рис. 4. Коэффициент, пропорциональный амплитуде переменной θ_2

Определим горизонтальное отклонение нижней массы маятника $x = l_1\theta_1 + l_2\theta_2$. Введем величину отклонения, отнесенную к суммарной длине маятника:

$$\theta = \frac{x}{l_1 + l_2} = \frac{\theta_1 + \lambda\theta_2}{1 + \lambda}.$$

Отсюда с использованием формул (5.1), (5.2) получаем

$$\theta = \frac{a\Omega^2}{l} \alpha \sin \Omega\tau, \quad \alpha = \frac{m_3}{B_1 - \Omega^2} + \frac{n_3}{B_2 - \Omega^2},$$

$$m_3 = \frac{(-1 + \lambda)(1 + \lambda\mu) + K(1 - \lambda\mu)}{K(K - 1 + \lambda - 2\lambda\mu)(1 + \lambda)}, \quad n_3 = \frac{(-1 + \lambda)(1 + \lambda\mu) - K(1 - \lambda\mu)}{K(K + 1 + \lambda(-1 + 2\mu))(1 + \lambda)}.$$

Из уравнения $\alpha = 0$ вычисляется частота антирезонанса $\Omega^2 = (1 + 1/\lambda)/(1 - \mu)$.

Таким образом, при частоте $\Omega = \sqrt{1 + 1/\lambda}/\sqrt{\lambda(1 - \mu)}$ нижняя масса маятника остается неподвижной, а при частоте, в $\sqrt{1 + 1/\lambda}$ раз меньшей $1/\sqrt{\lambda(1 - \mu)}$, неподвижной является верхняя масса маятника. Из этих зависимостей следует исключить ε -окрестности резонансных точек. В указанных окрестностях угловые переменные обращаются в бесконечность. В резонансных точках следует учитывать трение. В этих точках угловые переменные достигают больших значений порядка $1/\varepsilon$.

6. Случаи резонансов. Рассмотрим асимптотику решения в случае $\varepsilon \rightarrow 0$ (малое трение) при резонансной частоте $\Omega^2 = B_1$. С использованием (4.5) находим

$$y_1 = -S_1 \cos \Omega\tau, \quad S_1 = \frac{a\sqrt{B_1}}{l} \frac{e_1}{A_1} = \frac{a}{l\varepsilon} \frac{\lambda(1 + \lambda + K)^{3/2}}{\sqrt{2}K(-1 + \lambda - 2\lambda\mu + K)}.$$

Вторую переменную y_2 порядка единицы в формуле (4.5) для угловых переменных можно не учитывать. Тогда

$$\theta_1 = \lambda\mu B_1 y_1 = -\frac{a}{l\varepsilon} k_1 \cos \Omega\tau, \quad k_1 = \frac{\lambda^2\mu\sqrt{2(1 + \lambda + K)}}{K(K - 1 + \lambda - 2\lambda\mu)},$$

$$\theta_2 = (-B_1 + 1)y_1 = -\frac{a}{l\varepsilon} k_2 \cos \Omega\tau, \quad k_2 = \frac{(1 + \lambda + K)^{3/2}}{2\sqrt{2}(1 - \mu)K}, \quad (6.1)$$

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{K - (1 - \lambda + 2\lambda\mu)}{\lambda\mu(1 + \lambda - K)}.$$

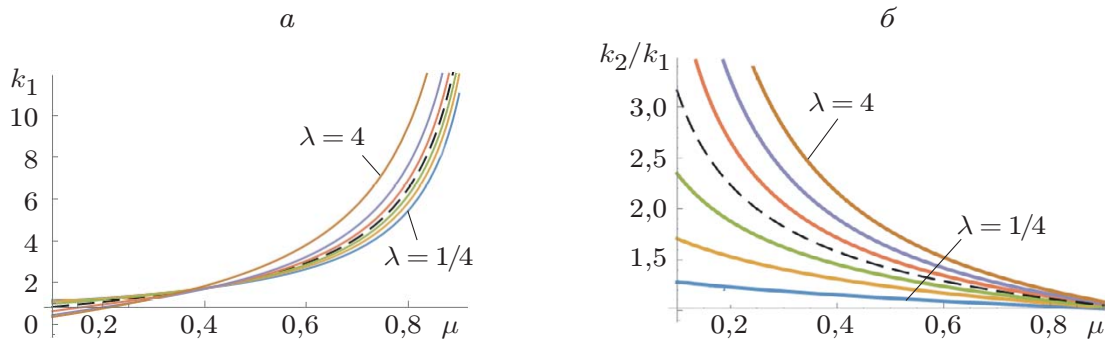


Рис. 5. Зависимости максимального амплитудного коэффициента k_1 (а) и отношения k_2/k_1 (б) от параметра μ при значениях отношений длин $\lambda = l_2/l_1 = 1/4, 1/2, 3/4, 1, 4/3, 2, 4$

На рис. 5,а представлены зависимости амплитудных коэффициентов k_1 от параметра масс μ при различных значениях отношения длин λ , на рис. 5,б — зависимости отношения амплитудных коэффициентов k_2/k_1 от параметра масс μ при тех же значениях отношения длин.

6.1. *Относительная погрешность при невыполнении условия расщепления.* Выше определено общее аналитическое решение задачи о вынужденных колебаниях двойного математического маятника при единственном условии пропорциональности диссипативных коэффициентов массам маятника: $r_2/r_1 = m_2/m_1$. В случае если это условие не выполняется, диссипативную функцию $R = r_1\dot{\theta}_1^2/2 + r_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2/2$ можно представить в виде

$$R = \frac{1}{2}r(m_1\dot{\theta}_1^2 + m_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2) + \frac{1}{2}\Delta r(m_1\dot{\theta}_1^2 - m_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2),$$

$$r = \frac{m_1r_2 + m_2r_1}{2m_1m_2}, \quad \Delta r = \frac{m_2r_1 - m_1r_2}{2m_1m_2}.$$

С использованием преобразования (4.3) эта функция приводится к виду

$$R = \frac{1}{2}(b_{11}\dot{y}_1^2 + 2b_{12} + b_{22}\dot{y}_2^2), \quad b_{11} = rb_{11}^0 + \Delta r b_{11}^1, \quad b_{22} = rb_{22}^0 + \Delta r b_{22}^1, \quad b_{12} = \Delta r b_{12}^1.$$

Относительная погрешность решения уравнений без учета b_{12} при малых Δr вычисляется по формуле

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{2b_{12}}{b_{11} + b_{22}} \approx \frac{\Delta r}{r} k, \quad k = \frac{2b_{12}^1}{b_{11}^0 + b_{22}^0} = \frac{4\lambda^3(1-\mu)^2\mu}{(1+\lambda^2 + \lambda(-2+4\mu))(1+2\lambda\mu + \lambda^2\mu)}.$$

При фиксированном и достаточно малом значении параметра ρ границей области изменения параметров λ, μ с относительной погрешностью менее 1 % является контур $k(\lambda, \mu) = 0,01/\rho$, $\rho = \Delta r/r$. Параметры λ, μ , находящиеся вне контура, удовлетворяют неравенству $k(\lambda, \mu) \leq 0,01/\rho$. В этой области переменных λ, μ относительная погрешность решения без учета Δr составляет менее 1 %. На рис. 6 представлены границы этих областей при $\rho = 0,020; 0,023; 0,026; 0,030$.

6.2. *Маятник со стержнями одинаковой длины.* Для маятника со стержнями одинаковой длины при $\lambda = 1$ формулы упрощаются:

$$K = 2\sqrt{\mu}, \quad B_{1,2} = \frac{1}{1 \pm \sqrt{\mu}}, \quad A_{1,2} = \varepsilon \frac{1 \mp \sqrt{\mu}}{1 \pm \sqrt{\mu}}, \quad E_{1,2} = \frac{a\Omega^2}{l} \frac{1 \pm \sqrt{\mu}}{2\mu},$$

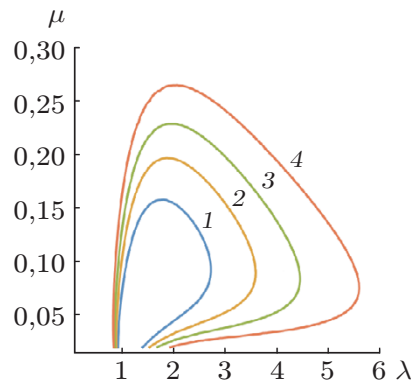


Рис. 6. Границы областей изменения переменных λ , μ , для которых относительная погрешность решения составляет менее 1 %, при различных значениях параметра ρ :

1 — $\rho = 0,02$, 2 — $\rho = 0,023$, 3 — $\rho = 0,026$, 4 — $\rho = 0,03$

$$y_1 = \frac{a\Omega^2}{l} \frac{(1 + \sqrt{\mu})^2 \sin \Omega\tau}{2(\mu - (1 + \sqrt{\mu})\mu\Omega^2)}, \quad y_2 = \frac{a\Omega^2}{l} \frac{(1 - \sqrt{\mu})^2 \sin \Omega\tau}{2(\mu - (1 - \sqrt{\mu})\mu\Omega^2)},$$

$$\theta_1 = \frac{a\Omega^2}{l} \frac{1 - (1 - \mu)\Omega^2 \sin \Omega\tau}{1 - 2\Omega^2 + (1 - \mu)\Omega^4}, \quad \theta_2 = \frac{a\Omega^2}{l} \frac{\sin \Omega\tau}{1 - 2\Omega^2 + (1 - \mu)\Omega^4}.$$

При частоте $\Omega^2 = (1 - \mu)^{-1}$ угловая переменная $\theta_1 = 0$, а при частоте $\Omega^2 = 2(1 - \mu)^{-1}$ переменная $\theta = (\theta_1 + \theta_2)/2 = 0$.

7. Двухконтурная электрическая цепь. Рассмотрим двухконтурную электрическую цепь (рис. 7).

Используем метод электромеханической аналогии [4]. Для этого введем вспомогательные функции $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$. На участках электрической цепи, на которых имеются конденсаторы, эти функции соответствуют их зарядам. На остальных участках производные по времени от указанных функций соответствуют силе тока. Поэтому связь между ними определяется первым законом Кирхгофа $q_3(t) = q_1(t) - q_2(t)$. Это выражение верно с точностью до постоянной, которую в случае нулевых начальных условий принимаем равной нулю. Для упрощения формул рассмотрим случай равных значений индуктивностей $L_1 = L_2 = L_3 = L$ и равных достаточно малых сопротивлений $R_1 = R_2 = R_3 = \varepsilon$.

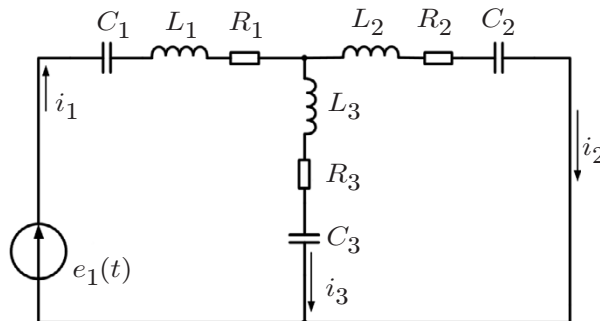


Рис. 7. Двухконтурная электрическая цепь

Запишем выражения для энергий данной системы и диссипативную функцию:

$$\begin{aligned} T &= \frac{L}{2} (q_1'^2 + q_2'^2 + (q_1' - q_2')^2), \quad \Pi = \frac{1}{2} (\gamma_1 q_1'^2 + \gamma_2 q_2'^2 + \gamma_3 (q_1' - q_2')^2), \\ R &= \frac{\varepsilon}{2} (q_1'^2 + q_2'^2 + (q_1' - q_2')^2), \quad N = q_1 U \sin(\omega t), \quad \gamma_i = \frac{1}{C_i}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Здесь значения емкостей выражены через параметры γ_i . Найдем силу тока в цепи при произвольных значениях индуктивности L , сопротивления ε и произвольных емкостях C_1, C_2, C_3 . В этом случае выполняется условие (1.5) расщепления системы уравнений на два независимых уравнения второго порядка.

Вследствие громоздкости расчетов решение данной задачи будем искать с использованием метода нормальных координат в общем виде. Для этого выразим коэффициенты квадратичных форм (1.2) через параметры электрической системы:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = 2L, \quad a_{12} = -L, \quad b_{11} = b_{22} = 2\varepsilon, \quad b_{12} = -\varepsilon, \\ c_{11} &= \gamma_1 + \gamma_3, \quad c_{22} = \gamma_2 + \gamma_3, \quad c_{12} = -\gamma_3. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Запишем характеристическое уравнение (1.6):

$$aB^2 + bB + c = 0, \quad a = 3L^2, \quad b = -2L(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3), \quad c = \gamma_2\gamma_3 + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3$$

и найдем его корни:

$$B_{1,2} = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \mp K}{3L}, \quad K = \sqrt{D}, \quad D = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - c. \quad (7.3)$$

В силу тождеств

$$\begin{aligned} 4D &= (2\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3)^2 + 3(\gamma_2 - \gamma_3)^2 = (2\gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_1)^2 + 3(\gamma_3 - \gamma_1)^2 = \\ &= (2\gamma_3 - \gamma_1 - \gamma_2)^2 + 3(\gamma_1 - \gamma_2)^2 \end{aligned}$$

дискриминант D равен нулю только при равенстве всех емкостей: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$. Этот вырожденный случай, когда корни характеристического уравнения равны $B_1 = B_2$, рассмотрен ниже. Полагая $D > 0$, имеем $B_1 < B_2$.

С использованием (7.2) нормализующее представление (1.8) и формы (7.1) приводятся к виду

$$\begin{aligned} q_1 &= y_1(-B_1L + \gamma_3) + y_2(-B_2L + \gamma_3), \\ q_2 &= y_1(-2LB_1 + \gamma_1 + \gamma_3) + y_2(-2LB_2 + \gamma_1 + \gamma_3); \\ T &= \frac{L}{2} (\alpha_1 \dot{y}_1^2 + \alpha_2 \dot{y}_2^2), \quad R = \frac{\varepsilon}{2} (\alpha_1 \dot{y}_1^2 + \alpha_2 \dot{y}_2^2), \quad \Pi = \frac{1}{2} (\alpha_1 B_1 y_1^2 + \alpha_2 B_2 y_2^2), \\ \alpha_{1,2} &= \frac{2}{3} (2K^2 \pm (\gamma_1 + \gamma_3 - 2\gamma_2)K), \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$N = \dot{q}_1 U \sin(\omega t) = (\dot{y}_1(-LB_1 + \gamma_3) + \dot{y}_2(-LB_2 + \gamma_3)) U \sin(\omega t).$$

Соответствующие уравнения Лагранжа сводятся к двум уравнениям второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} &= \frac{\partial N}{\partial \dot{y}_i}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}_i + A_i \dot{y}_i + B_i y_i = E_i \sin \omega t, \\ A_i &= \varepsilon, \quad E_i = \frac{U(-LB_i + \gamma_3)}{L\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (7.5)$$

а их решение имеет вид (1.11).

Силы тока I_1 , I_2 в первом и втором контурах находятся с помощью (7.4):

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{dq_1}{dt} = \frac{dy_1}{dt} (-LB_1 + \gamma_3) + \frac{dy_2}{dt} (-LB_2 + \gamma_3), \\ I_2 &= \frac{dq_2}{dt} = \frac{dy_1}{dt} (-2LB_1 + \gamma_1 + \gamma_3) + \frac{dy_2}{dt} (-2LB_2 + \gamma_1 + \gamma_3). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Рассмотрим амплитуды колебаний при малых диссипативных силах. Для переменных y_i в (7.6) вне ε -окрестностей резонансов получаем следующие уравнения:

$$\ddot{y}_i + B_i y = E_i \sin \omega t.$$

Их установившиеся решения имеют вид

$$y_i = \frac{E_i}{B_i - \omega^2} \sin \omega t.$$

С помощью (7.7) находим силы тока I_1 , I_2 и их амплитуды a_1 , a_2 в первом и втором контурах:

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{dq_i}{dt} = a_i \cos \omega t, \quad i = 1, 2, \\ a_1 &= \frac{E_1 \omega}{B_1 - \omega^2} (-LB_1 + \gamma_3) + \frac{E_2 \omega}{B_2 - \omega^2} (-LB_2 + \gamma_3), \\ a_2 &= \frac{E_1 \omega}{B_1 - \omega^2} (-2LB_1 + \gamma_1 + \gamma_3) + \frac{E_2 \omega}{B_2 - \omega^2} (-2LB_2 + \gamma_1 + \gamma_3). \end{aligned} \quad (7.8)$$

С использованием (7.6) для амплитуд сил тока в первом и втором контурах получаем

$$\begin{aligned} a_1 &= U\omega \left(\frac{m_1}{B_1 - \omega^2} + \frac{n_1}{B_2 - \omega^2} \right), \quad a_2 = U\omega \left(\frac{m_2}{B_1 - \omega^2} + \frac{n_2}{B_2 - \omega^2} \right), \\ m_1 &= \frac{(-B_1 L + \gamma_3)^2}{\alpha_1}, \quad n_1 = \frac{(-B_2 L + \gamma_3)^2}{\alpha_2}, \\ m_2 &= \frac{(-B_1 L + \gamma_3)(-2B_1 L + \gamma_1 + \gamma_3)\omega}{\alpha_1}, \quad n_2 = \frac{(-B_2 L + \gamma_3)(-2B_2 L + \gamma_1 + \gamma_3)\omega}{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Коэффициенты m_1 и n_1 положительны, поэтому, как показано в п. 2, существует антирезонансная частота $B_1 < \omega_0^2 < B_2$, при которой ток в первом контуре не течет. Эта частота вычисляется из уравнения $a_1 = 0$ с помощью (7.8), (7.3) и (7.6):

$$\omega_0^2 = \frac{\gamma_2 + \gamma_3}{2L}.$$

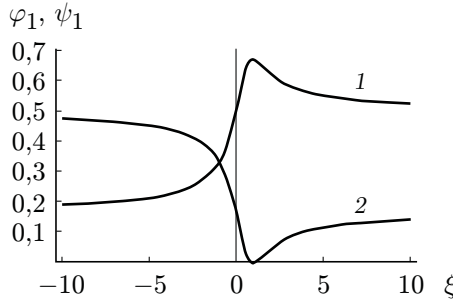
Аналогично из уравнения $a_2 = 0$ с использованием (7.8), (7.3) и (7.6) находим антирезонансную частоту

$$\omega_0^2 = \frac{\gamma_3}{L}.$$

8. Резонансы. В системе имеется две резонансные частоты: $\omega_1 = \sqrt{B_1}$ и $\omega_2 = \sqrt{B_2}$. С помощью (7.3) для B_1 и $B_2 > B_1$ получаем формулы

$$B_1 = \begin{cases} \frac{\gamma_1}{L} + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{3L} (1 + \xi - z), & \gamma_2 > \gamma_1, \\ \frac{\gamma_1}{L} - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{3L} (1 + \xi + z), & \gamma_2 < \gamma_1, \end{cases} \quad B_2 = \begin{cases} \frac{\gamma_1}{L} + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{3L} (1 + \xi + z), & \gamma_2 > \gamma_1, \\ \frac{\gamma_1}{L} - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{3L} (1 + \xi - z), & \gamma_2 < \gamma_1, \end{cases}$$

$$z = \sqrt{1 - \xi + \xi^2}.$$

Рис. 8. Зависимости $\varphi_1(\xi)$ (1) и $\psi_1(\xi)$ (2)

Если не учитывать сопротивления, то при частоте ω_1 обращается в бесконечность собственная функция y_1 , а при частоте ω_2 — собственная функция y_2 . При малых сопротивлениях собственные функции и их производные при соответствующих резонансных частотах принимают большие значения:

$$y_i = -\frac{E_i}{\omega_i \varepsilon} \cos \omega_i t, \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{E_i}{\varepsilon} \sin \omega_i t.$$

Силы тока I_1 , I_2 и их амплитуды в первом и втором контурах при резонансной частоте ω_1 вычисляются с помощью (7.7):

$$\begin{aligned} I_1 &= (-LB_1 + \gamma_3) \frac{dy_1}{dt} = a_1 \sin \omega_1 t, \quad a_1 = U \frac{(-LB_1 + \gamma_3)^2}{L\alpha_1 \varepsilon}, \\ I_2 &= (-2LB_1 + \gamma_1 + \gamma_3) \frac{dy_1}{dt} = a_2 \sin \omega_1 t, \quad a_2 = U \frac{(2LB_1 - \gamma_1 - \gamma_3)(LB_1 - \gamma_3)}{L\alpha_1 \varepsilon}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Формула (8.1) для максимальной амплитуды силы тока в первом контуре при резонансной частоте ω_1 приводится к виду $a_1 = (U/\varepsilon)F_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, где безразмерная функция трех аргументов с помощью выражений для B_1 (7.3) и для α_1 (7.5) выражается через одну безразмерную переменную $\xi = (\gamma_1 - \gamma_3)/(\gamma_1 - \gamma_2)$ следующим образом:

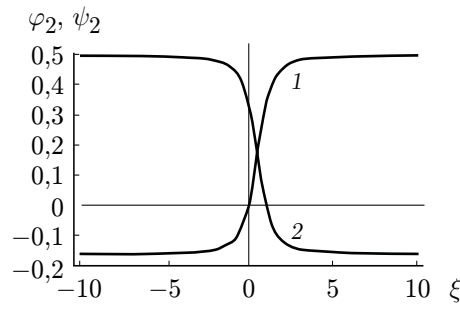
$$F_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{cases} \varphi_1(\xi) = \frac{(1 - 2\xi - z)^2}{6(2z^2 - 2z + \xi z)}, & \gamma_2 - \gamma_1 > 0, \\ \psi_1(\xi) = \frac{(1 - 2\xi + z)^2}{6(2z^2 + 2z - \xi z)}, & \gamma_2 - \gamma_1 < 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

Зависимости $\varphi_1(\xi)$ и $\psi_1(\xi)$ (8.2) представлены на рис. 8. При $\xi = 1$ функция $\varphi_1(\xi)$ принимает наибольшее значение $\varphi_1(1) = 2/3$, а функция $\psi_1(\xi)$ — значение $\psi_1(1) = 0$.

Для амплитуды силы тока во втором контуре получаем зависимость $a_2 = (U/\varepsilon)F_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, где безразмерная функция трех аргументов $F_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ с помощью выражений для B_2 (7.3) и для α_2 (7.5) также выражается через одну безразмерную переменную ξ :

$$F_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{cases} \varphi_2(\xi) = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{-1 + 2\xi}{z} \right), & \gamma_2 - \gamma_1 > 0, \\ \psi_2(\xi) = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{-1 + 2\xi}{z} \right), & \gamma_2 - \gamma_1 < 0. \end{cases} \quad (8.3)$$

На рис. 9 представлены зависимости для двух ветвей функции $F_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ (8.3). Функция $\varphi_2(\xi)$ достигает максимального значения, равного $1/2$, при $\xi \rightarrow +\infty$, а функция $\psi_2(\xi)$ принимает максимальное значение, равное $1/2$, при $\xi \rightarrow -\infty$.

Рис. 9. Зависимости $\varphi_2(\xi)$ (1) и $\psi_2(\xi)$ (2)

При второй резонансной частоте ω_2 максимальные амплитуды сил тока в первом и втором контурах определяются аналогичными формулами $a_1 = (U/\varepsilon)\tilde{F}_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $a_2 = (U/\varepsilon)\tilde{F}_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Функции \tilde{F}_1 и \tilde{F}_2 отличаются от функций F_1 и F_2 только заменой неравенств $\gamma_2 - \gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 - \gamma_1 < 0$ на противоположные.

Таким образом, при $L_1 = L_2 = L_3 = L$, $R_1 = R_2 = R_3 = \varepsilon$ наибольшая амплитуда силы тока, равная $a_1 = 2U/(3\varepsilon)$, достигается при одинаковых емкостях конденсаторов. В этом случае резонансные частоты совпадают: $\omega_1 = \omega_2 = 1/\sqrt{LC}$. Данный предельный вырожденный случай реализуется при равных емкостях $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$. В этом случае неприменимо преобразование (7.4), так как его определитель равен нулю. Квадратные формы (7.1) и уравнения Лагранжа имеют вид

$$T = \frac{L}{2} (q_1'^2 + q_2'^2 + (q_1' - q_2')^2), \quad \Pi = \frac{\gamma}{2} (q_1'^2 + q_2'^2 + (q_1' - q_2')^2),$$

$$R = \frac{\varepsilon}{2} (q_1'^2 + q_2'^2 + (q_1' - q_2')^2), \quad N = q_1' U \sin(\omega t),$$

$$2L\ddot{q}_1 - L\ddot{q}_2 + 2\varepsilon\dot{q}_1 - \varepsilon\dot{q}_2 + 2\gamma q_1 - \gamma q_2 = U \sin(\omega t),$$

$$-L\ddot{q}_1 + 2L\ddot{q}_2 - \varepsilon\dot{q}_1 + 2\varepsilon\dot{q}_2 - \gamma q_1 + 2\gamma q_2 = 0.$$

Отсюда для сил тока получаем систему уравнений

$$2L\ddot{I}_1 - Lq\ddot{I}_2 + 2\varepsilon q\dot{I}_1 - \varepsilon q\dot{I}_2 + 2\gamma I_1 - \gamma I_2 = \omega U \cos(\omega t),$$

$$-L\ddot{I}_1 + 2L\ddot{I}_2 - \varepsilon\dot{I}_1 + 2\varepsilon\dot{I}_2 - \gamma I_1 + 2\gamma I_2 = 0.$$

Выполняя прямую проверку, нетрудно показать, что функции $I_1 = (2U/(3\varepsilon)) \sin(\omega t)$, $I_2 = (U/(3\varepsilon)) \sin(\omega t)$ являются точным решением этой системы. Найденная амплитуда силы тока в первом контуре для случая трех равных емкостей является наибольшей.

Заключение. Представлена методика аналитического исследования вынужденных колебаний механических систем с двумя степенями свободы путем перехода к нормальным координатам. Показано, что в механической задаче существует система координат, в которой дифференциальные уравнения движения и их решение имеют простой вид. Это достигается путем одновременной диагонализации трех матриц: кинетической, потенциальной энергии и диссипативной функции. С использованием упрощенных предложенным способом уравнений движения проведен полный анализ вынужденных малых колебаний двойного маятника с горизонтальной вибрацией точки подвеса. В задаче имеются четыре произвольных параметра: две длины и две массы. Представлен полный анализ этой системы. Наиболее простой вид имеют выражения для антирезонансных частот маятника $\sqrt{(g(l_1 + l_2)/(l_1 l_2))(m_1 + m_2)/m_1}$ и $\sqrt{(g/l_2)(m_1 + m_2)/m_1}$, при которых остаются неподвижными нижняя и верхняя массы маятника соответственно. Достаточно простой вид

имеют выражения для частот вибрации, при которых соответствующие угловые координаты имеют максимальные амплитуды.

Проведено исследование более сложной задачи о течении переменного тока в двухконтурной электрической цепи с пятью произвольными параметрами: индуктивностью, сопротивлением и тремя различными емкостями. С помощью предложенной методики максимальная амплитуда силы тока выражена через функцию одного аргумента. Доказано, что при фиксированной мощности источника переменного тока U и сопротивлении ε максимальная амплитуда силы тока равна $2U/(3\varepsilon)$ и достигается при равных емкостях. Найдены антирезонансные частоты $\sqrt{(C_2 + C_3)/(2LC_2C_3)}$ и $\sqrt{1/(LC_3)}$. При первой частоте ток не течет в первом контуре, при второй — во втором контуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уиттекер Э. Аналитическая динамика. М.: Эдиториал УРСС, 2004.
2. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука, 1973.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
4. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматлит, 2001.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
6. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
7. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. М.: Мир, 1989.
8. Kumar M. Simultaneous diagonalization of rectangular matrices // Linear Algebra Appl. 1982. V. 47. P. 139–150.
9. Szafraniec A. Mathematical modelling of transient electromagnetic processes in a power network // Proc. of the conf. 2019 Applications of electromagnetics in modern techniques and medicine (PTZE), Janow Podlaski (Poland), June 2019. S. 1., 2019. P. 232–236. DOI: 10.23919/PTZE.2019.8781748.
10. Bielek Z., Bielek D., Biolkova V. Lagrangian for circuits with higher-order elements // Entropy. 2019. V. 21, N 11. 1059.
11. Jeltsema D., Scherpen J. M. A. On the existence of Lagrangians for Clarke and Park transformed switched-mode electrical networks // IFAC-PapersOnLine. 2019. V. 52, iss. 16. P. 90–95. DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.11.761.
12. Jeltsema D., Scherpen J. M. A. Multidomain modeling of nonlinear networks and systems // IEEE Control Systems Mag. 2009. V. 29, N 4. P. 28–59. DOI: 10.1109/MCS.2009.932927.
13. Schelkunoff S. A. Methods of electromagnetic field analysis // Bell System Tech. J. 1948. V. 27, N 3. P. 487–509. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1948.tb01342.x.
14. Судаков В. Ф. Переходные процессы в параметрически возбуждаемых линейных электрических цепях // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н. Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2014. № 5. С. 82–93.
15. Новиков М. А. Одновременная диагонализация трех вещественных симметричных матриц // Изв. вузов. Математика. 2014. № 12. С. 70–82.
16. Петров А. Г. О существовании нормальных координат для вынужденных колебаний линейных диссипативных систем // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2022. № 5. С. 93–102.

*Поступила в редакцию 29/II 2024 г.,
после доработки — 29/II 2024 г.
Принята к публикации 25/III 2024 г.*