Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 5

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВИХРЕВОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

УДК 532.591+517.958

А. А. Чесноков

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

Точные решения уравнений вихревой мелкой воды были получены Фриманом [1], рассматривавшим простые волны. В [2] найдены группа преобразований, допускаемых системой дифференциальных уравнений, и некоторые точные решения. Стационарные решения с областями возвратного течения получены в [3]. В [4] сформулированы условия гиперболичности системы уравнений движения на основе обобщения этого понятия для класса интегродифференциальных уравнений, предложенного в [5].

Данная работа посвящена построению точных частных решений интегродифференциальных уравнений теории мелкой воды, описывающих в эйлерово-лагранжевой системе координат завихренные течения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей в поле силы тяжести. В ней с использованием группы преобразований, допускаемых системой рассматриваемых уравнений, выписаны более простые подсистемы, определяющие классы точных решений, и некоторые из них проинтегрированы. Получены решения, описывающие движение жидкости с образованием областей возвратного течения в нестационарном случае. Приведено решение, на котором система интегродифференциальных уравнений с ростом времени теряет гиперболичность.

1. Модель вихревой мелкой воды и допускаемые преобразования. Решение краевой задачи

$$\begin{gathered} u_T + uu_X + vu_Y + h_X = 0, \quad u_X + v_Y = 0, \\ h_T + u(T, X, h)h_X = v(T, X, h), \quad v(T, X, 0) = 0 \end{gathered} \tag{1.1}$$

описывает в области $-\infty < X < \infty$, $0 \leqslant Y \leqslant h(T, X)$ плоскопараллельные завихренные движения слоя идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей $Y = h(T, X)$ в поле силы тяжести в приближении мелкой воды [6]. Система уравнений (1.1) получается в результате обезразмеривания уравнений Эйлера и учета того, что для рассматриваемых течений отношение характерного вертикального масштаба к горизонтальному мало.

Как показано в [7], заменой переменных

$$T = t, \quad X = x, \quad Y = \Phi(t, x, \lambda) \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1), \tag{1.2}$$

где функция $\Phi(t, x, \lambda)$ — решение задачи Коши $\Phi_t + u(t, x, \Phi)\Phi_x = v(t, x, \Phi)$, $\Phi(0, x, \lambda) = \Phi_0(x, \lambda)$, область течения отображается на полосу $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $-\infty < X < \infty$, а функции $u(t, x, \lambda)$, $H(t, x, \lambda) = \Phi_\lambda$ определяются из системы

$$u_t + uu_x + \int\limits_0^1 H_x \, d\lambda = 0, \qquad H_t + Hu_x + uH_x = 0. \tag{1.3}$$

Замена переменных (1.2) обратима при условии $\Phi_\lambda \neq 0$. В дальнейшем будем предполагать, что $\Phi_\lambda > 0$ ($\Phi(t, x, 0) = 0$, $\Phi(t, x, 1) = h(t, x)$). При отсутствии завихренности ($\omega = -u_Y = -u_\lambda H^{-1} = 0$) модель (1.3) сводится к известным уравнениям теории мелкой воды.

Нетрудно заметить, что система уравнений (1.3) инвариантна относительно следующей группы преобразований G_5: 1) $t' = t + a$, 2) $x' = x + a$, 3) $x' = at + x$, $u' = u + a$,

4) $t' = at$, $x' = ax$, 5) $x' = ax$, $u' = au$, $H' = a^2H$. По соответствующей этим преобразованиям алгебре Ли операторов L_5 $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_x$, $X_3 = t\partial_x + \partial_u$, $X_4 = t\partial_t + x\partial_x$, $X_5 = x\partial_x + u\partial_u + 2H\partial_H$ можно строить инвариантные решения, применяя предложенный в [8] метод.

Для рационального использования имеющихся преобразований при нахождении инвариантных решений выписана оптимальная система подалгебр алгебры Ли операторов L_5, построение которой осуществлено по алгоритму, данному в [9]. Все представители оптимальной системы подалгебр ранга один следующие: 1) $\alpha X_4 + X_5$, 2) $X_2 - X_4 + X_5$, 3) $X_1 + X_5$, 4) $X_3 + X_4$, 5) X_4, 6) $X_1 + X_3$, 7) X_3, 8) X_2, 9) X_1. Система оптимальна в том смысле, что решения, получаемые с помощью ее представителей, исчерпывают все возможные инвариантные решения, отвечающие однопараметрическим подгруппам группы преобразований G_5 с точностью до замены переменных. Дальнейшее построение инвариантных решений сводится к нахождению инвариантов соответствующих подалгебр и интегрированию получаемых фактор-систем.

2. Системы уравнений, определяющие инвариантные решения. Для всех представителей оптимальной системы ранга один приводится набор базисных инвариантов J, представление решения и фактор-система E/H ($H(\alpha^i X_i)$ обозначает подалгебру).

1. $H(\alpha X_4 + X_5)$, $J = (xt^{-(1+1/\alpha)},\ \lambda,\ ut^{-1/\alpha}, Ht^{-2/\alpha})$. Решения инвариантны относительно растяжений всех переменных, зависящих от параметра α $(\alpha \neq 0)$. Они описывают класс автомодельных (в узком смысле) движений жидкости. Представление решения $u = t^\beta\varphi(\xi,\lambda)$, $H = t^{2\beta}\psi(\xi,\lambda)$, $\xi = xt^{-(1+\beta)}$, $\beta = \alpha^{-1}$. Фактор-система E/H

$$\beta\varphi - (1+\beta)\xi\varphi' + \varphi\varphi' + \int_0^1 \psi'\,d\lambda = 0,\ \ 2\beta\psi - (1+\beta)\xi\psi' + (\varphi\psi)' = 0, \tag{2.1}$$

где дифференцирование осуществляется по переменной ξ.

При $\alpha = 0$ $J = (t, \lambda, ux^{-1}, Hx^{-2})$. Решения инвариантны относительно растяжений x, u и H. Представление решения $u = x\varphi(t,\lambda)$, $H = x^2\psi(t,\lambda)$. Фактор-система E/H

$$\varphi_t + \varphi^2 + 2\int_0^1 \psi\,d\lambda = 0, \quad \psi_t + 3\varphi\psi = 0. \tag{2.2}$$

2. $H(X_2 - X_4 + X_5)$, $J = (t\exp(x), \lambda, tu, t^2H)$. Решения инвариантны относительно одновременных переносов по направлению оси x, растяжений времени, u и H. Представление решения $u = t^{-1}\varphi(\xi,\lambda)$, $H = t^{-2}\psi(\xi,\lambda)$, $\xi = t\exp(x)$. Фактор-система E/H

$$(\varphi + \varphi^2/2 + \int_0^1 \psi\,d\lambda)' = \varphi/\xi, \quad (\psi + \varphi\psi)' = 2\psi/\xi. \tag{2.3}$$

3. $H(X_1 + X_5)$, $J = (x\exp(-t), \lambda, u\exp(-t), H\exp(-2t))$. Решения инвариантны относительно одновременных переносов по t, растяжений x, u и H. Представление решения $u = \varphi(\xi,\lambda)\exp(t)$, $H = \psi(\xi,\lambda)\exp(2t)$, $\xi = x\exp(-t)$. Фактор-система E/H

$$\varphi - \xi\varphi' + \varphi\varphi' + \int_0^1 \psi'\,d\lambda = 0, \quad 2\psi - \xi\psi' + (\varphi\psi)' = 0. \tag{2.4}$$

4. $H(X_3 + X_4)$, $J = (t^{-1}\exp(xt^{-1}), \lambda, t^{-1}\exp(u), H)$. Решения инвариантны относительно одновременных преобразований Галилея вдоль оси x и равномерных растяжений t, x. Представление решения $u = \ln(t\varphi(\xi,\lambda))$, $H = \psi(\xi,\lambda)$, $\xi = t^{-1}\exp(xt^{-1})$. Фактор-

система E/H

$$\varphi + \xi\varphi'(\ln(\varphi\xi^{-1}) - 1) + \xi\varphi\int\limits_0^1 \psi'\,d\lambda = 0, \quad \varphi'\psi + \varphi\psi'(\ln(\varphi\xi^{-1}) - 1) = 0. \tag{2.5}$$

5. $H(X_4)$, $J = (xt^{-1}, \lambda, u, H)$. Решения инвариантны относительно равномерных растяжений переменных t, x. Они описывают класс автомодельных движений жидкости. Представление решения $u = \varphi(\xi, \lambda)$, $H = \psi(\xi, \lambda)$, $\xi = xt^{-1}$. Фактор-система E/H

$$-\xi\varphi' + \varphi\varphi' + \int\limits_0^1 \psi'\,d\lambda = 0, \quad -\xi\psi' + (\varphi\psi)' = 0. \tag{2.6}$$

6. $H(X_1 + X_3)$, $J = (x - t^2/2, \lambda, u - t, H)$. Решения инвариантны относительно одновременных переносов по t и преобразований Галилея. Представление решения $u = \varphi(\xi, \lambda) + t$, $H = \psi(\xi, \lambda)$, $\xi = x - t^2/2$. Фактор-система E/H

$$1 + \varphi\varphi' + \int\limits_0^1 \psi'\,d\lambda = 0, \quad (\varphi\psi)' = 0. \tag{2.7}$$

7. $H(X_3)$, $J = (t, \lambda, x - tu, H)$. Решения инвариантны относительно преобразований Галилея. Они описывают класс галилеево-инвариантных решений. Представление решения $u = (x - \varphi(t, \lambda))t^{-1}$, $H = \psi(t, \lambda)$. Фактор-система E/H

$$\varphi_t = 0, \quad \psi_t + \psi t^{-1} = 0. \tag{2.8}$$

8. $H(X_2)$, $J = (t, \lambda, u, H)$. Решения инвариантны относительно переносов по оси x. Представление решения $u = \varphi(t, \lambda)$, $H = \psi(t, \lambda)$. Фактор-система E/H

$$\varphi_t = 0, \qquad \psi_t = 0. \tag{2.9}$$

9. $H(X_1)$, $J = (x, \lambda, u, H)$. Решения инвариантны относительно переносов по времени. Они описывают класс стационарных движений жидкости. Представление решения $u = \varphi(x, \lambda)$, $H = \psi(x, \lambda)$. Фактор-система E/H

$$\varphi\varphi_x + \int\limits_0^1 \psi_x\,d\lambda = 0, \quad (\varphi\psi)_x = 0. \tag{2.10}$$

Во всех перечисленных случаях можно осуществить сведение фактор-систем к одному уравнению. Ниже указаны замены переменных и виды возникающих интегродифференциальных уравнений.

1. Заменой зависимой переменной

$$w(\xi, \lambda) = \exp\Big(\int\limits_0^\xi ((1 + \beta)s - \varphi(s, \lambda))^{-1}\,ds\Big)$$

фактор-система (2.1) при $\beta \neq -3^{-1}$ сводится к уравнению

$$w^2 w'' + 2\beta w(w')^2 - \beta(1 + \beta)\xi(w')^3 - (w')^3 \int\limits_0^1 C(\lambda) w^{3\beta - 1}(3\beta(w')^2 + ww'')\,d\lambda = 0.$$

Функции φ и ψ, определяющие инвариантное решение, выражаются через w по формулам $\varphi = (1 + \beta)\xi - w/w'$, $\psi = C(\lambda) w^{3\beta} w'$, где $C(\lambda)$ — произвольная функция.

В случае $\beta = -3^{-1}$ для определения функции $w = \varphi - (2/3)\xi$ получим уравнение

$$ww' + 3^{-1}w - (2/9)\xi - \int\limits_0^1 C(\lambda)w^{-2}w'\,d\lambda = 0.$$

Функции φ и ψ выражаются через w по формулам $\varphi = w + (2/3)\xi$, $\psi = C(\lambda)w^{-1}$.

Пусть $w(t,\lambda) = \exp\Big(\int\limits_0^t \varphi(s,\lambda)\,ds\Big)$ — новая искомая функция. Тогда фактор-система (2.2) сводится к интегродифференциальному уравнению:

$$w_{tt} + 2w\int\limits_0^1 C(\lambda)w^{-3}\,d\lambda = 0, \tag{2.11}$$

а функции φ и ψ связаны с w формулами $\varphi = w_t w^{-1}$, $\psi = C(\lambda)w^{-3}$.

2. Заменой независимой и зависимой переменных

$$\tau = \ln\xi, \qquad w(\tau,\lambda) = \exp\Big(\int\limits_0^\tau (\varphi(s,\lambda)+1)^{-1}\,ds\Big)$$

фактор-система (2.3) сводится к уравнению

$$w^2 w_{\tau\tau} - w_\tau^3 - w_\tau^3\int\limits_0^1 C(\lambda)(ww_{\tau\tau} + w_\tau^2)\,d\lambda = 0. \tag{2.12}$$

Функции φ и ψ, по которым определяется инвариантное решение, выражаются через w формулами $\varphi = ww_\tau^{-1} - 1$, $\psi = C(\lambda)ww_\tau$.

3. Заменой зависимой переменной $w(\xi,\lambda) = \exp\Big(\int\limits_0^\xi (s - \varphi(s,\lambda))^{-1}\,ds\Big)$ фактор-система (2.4) сводится к уравнению

$$w^2w'' + w(w')^2 - (w')^3\xi - (w')^3\int\limits_0^1 C(\lambda)w(ww'' + 2(w')^2)\,d\lambda = 0.$$

Функции φ и ψ выражаются через w формулами $\varphi = \xi - w/w'$, $\psi = C(\lambda)w^2w'$.

4. Заменой зависимой переменной

$$w(\xi,\lambda) = \exp\Big(-\int\limits_0^\xi (s\ln(\varphi(s,\lambda)s^{-1}) - 1)^{-1}\,ds\Big)$$

фактор-система (2.5) сводится к уравнению

$$\xi w^2w'' + w^2w' - \xi^2(w')^3 + \xi^3(w')^3\int\limits_0^1 C(\lambda)(w' + \xi w'')\,d\lambda = 0.$$

Функции φ и ψ выражаются через w формулами $\varphi = \xi\exp(1 - w(\xi w')^{-1})$, $\psi = -C(\lambda)\xi w'$.

5. Заменой зависимой переменной $w(\xi,\lambda) = \exp\Big(\int\limits_0^\xi (s - \varphi(s,\lambda))^{-1}\,ds\Big)$ фактор-система

(2.6) сводится к уравнению

$$w^2 w'' - (w')^3 \int\limits_0^1 C(\lambda) w''\, d\lambda = 0.$$

Функции φ и ψ выражаются через w формулами $\varphi = \xi - w/w'$, $\psi = C(\lambda) w'$.

3. Инвариантные решения. Приводятся результаты интегрирования некоторых фактор-систем и анализируются найденные решения.

А. Подсистема (2.1). При $\beta = -2^{-1}$ система (2.1) интегрируется и решение имеет вид

$$\varphi(\xi, \lambda) = 2^{-1}\xi \pm \sqrt{4^{-1}\xi^2 + C(\lambda) - 2\eta(\xi)},$$

$$\psi(\xi, \lambda) = C'(\lambda)(D(\lambda)(\xi - 2\varphi))^{-1} \exp\Big(-\int\limits_0^\xi (\tau - 2\varphi)^{-1}\, d\tau\Big).$$

Здесь $C(\lambda)$ и $D(\lambda)$ — произвольные функции; $\eta(\xi)$ находится из уравнения $\eta = \int\limits_0^1 \psi\, d\lambda$.

Рассмотрим область течения, где $\varphi - 2^{-1}\xi < 0$. Пусть $D(\lambda) \equiv 1$, $C'(\lambda) > 0$, $C(1) = C_1$, $C(0) = C_0$. Тогда для определения функции η получим уравнение

$$\eta(\xi) = \int\limits_{C_0}^{C_1} (\xi^2 + 4C - 8\eta(\xi))^{-1/2} \exp\Big(-\int\limits_0^\xi (\tau^2 + 4C - 8\eta(\tau))^{-1/2}\, d\tau\Big)\, dC,$$

решение которого может быть найдено методом последовательных приближений. Функция η_i определяется подстановкой в правую часть рассматриваемого уравнения функции η_{i-1}, вычисленной на предыдущем шаге. В качестве начального выбирается приближение $\eta_0 = \eta(0)$, которое находится из уравнения $\sqrt{C_1 - 2\eta_0} - \sqrt{C_0 - 2\eta_0} = \eta_0$. При выполнении неравенства $2\sqrt{C_1 - C_0 + 4} \leqslant C_0$ итерационный процесс сходится при любом $\xi \geqslant 0$.

Интегрирование фактор-системы (2.1) в предположении, что $\int\limits_0^1 \psi\, d\lambda = l\xi^2$, $0 < l = \mathrm{const} < 9^{-1}$, $-1/3 < \beta \leqslant 0$, дает решение, приведенное в [10].

В случае $l = 9^{-1}$, $\beta = -2/3$ имеем решение

$$u = 2x(3t)^{-1} + 3^{-1} f_1^{-1}(\lambda) f_2(\lambda) t^{-2/3}, \ H = -3(f_1^2(\lambda) f_2^{-1}(\lambda) x^2 t^{-2} + 2 f_1(\lambda) x t^{-5/3} + f_2(\lambda) t^{-4/3}),$$

$$\int\limits_0^1 f_j(\lambda)\, d\lambda = 0 \qquad (j = 1, 2), \qquad \int\limits_0^1 f_1^2(\lambda) f_2^{-1}(\lambda)\, d\lambda = -27^{-1}.$$

Течение вихревое; уравнение свободной границы $y = x^2(3t)^{-2}$.

Б. Подсистема (2.2). Решение уравнения (2.11) ищется в виде $w = a(\lambda) g_1(t) + b(\lambda) g_2(t)$. Предполагается, что $d'(\lambda) = C(\lambda)(a(\lambda))^{-3} > 0$, $d(\lambda) = b(\lambda)(a(\lambda))^{-1}$, $d_1 = d(1)$, $d_0 = d(0)$. В результате интегрирования уравнения (2.11) и перехода к исходным функциям φ, ψ находим их параметрические представления:

$$\varphi = \tilde{\varphi}(\tau, \lambda) = \frac{(d_1 - d(\lambda)) k_1 F^2(\tau)}{d(\lambda) - d_0 + (d_1 - d(\lambda))(k_1 \tau + k_2)} - F(\tau) F'(\tau), \tag{3.1}$$

$$\psi = \tilde{\psi}(\tau, \lambda) = \frac{(d_1 - d_0)^3 d'(\lambda) F^3(\tau)}{[d(\lambda) - d_0 + (d_1 - d(\lambda))(k_1\tau + k_2)]^3}, \qquad t = \int\limits_0^\tau F^{-2}(\tau')\,d\tau', \quad \tau \geqslant 0.$$

Здесь $F(\tau) = (d_1 - d_0)k_1^{-2}[(k_1\tau + k_2 - 1)\ln(k_1\tau + k_2) - (k_1\tau + k_2)] + k_3\tau + k_4$; $k_1 > 0$; $k_2 > 0$; k_3, k_4 — постоянные интегрирования.

Функция $F(\tau)$ определена при $\tau > 0$ и выпукла вниз. Неравенство $H > 0$ выполнено, если $F(\tau) > 0$. Уравнение свободной границы $y = h(t,x) = \tilde{h}(\tau, x)$ дается формулой

$$\tilde{h}(\tau, x) = 2^{-1}(d_1 - d_0)(F(\tau))^3(1 + (k_1\tau + k_2)^{-1})(k_1\tau + k_2)^{-1}x^2 \tag{3.2}$$

и в каждый фиксированный момент времени имеет вид параболы с ветвями, направленными вверх. Анализ показывает, что начальные данные определяют один из трех возможных режимов течения. Свободная граница при $t = 0$ задается формулой $y = lx^2$ (константа $l > 0$ определяется начальными данными).

1. $F(\tau) > 0$, $F'(\tau) < 0$, $F(\tau_1) = 0$. Параметр τ изменяется от 0 до τ_1, а время t — от нуля до бесконечности. В силу (3.2) и поведения функции F глубина с ростом времени падает до нуля при $t = \infty$. Горизонтальная компонента скорости $u = x\tilde{\varphi}$ положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$ ($\tau < \tau_1$), следовательно, происходит оттекание жидкости на бесконечность.

2. $F(\tau) > 0$, $F'(\tau) > 0$. Время t изменяется от 0 до $t_1 = \int\limits_0^\infty F^{-2}(\tau) < \infty$, так как интеграл сходится. За конечное время глубина становится бесконечной всюду, кроме точки $x = 0$, что происходит за счет притока жидкости с бесконечности.

3. $F(\tau) > 0$, $F'(\tau) < 0$ ($0 \leqslant \tau < \tau_0$), $F'(\tau) > 0$ ($\tau_0 < \tau < \tau_1$). Время t изменяется от 0 до $t_1 < \infty$. Этот случай является комбинацией двух предыдущих. До определенного момента $t_0 = t(\tau_0) < t_1$ реализуется режим 1, а при $t > t_0$ — режим 2.

Рассматриваемое решение допускает обобщение: $u = x\varphi(t,\lambda) + \varphi_1(t,\lambda)$, $H = x^2\psi(t,\lambda) + x\psi_1(t,\lambda) + \psi_2(t,\lambda)$. Функции φ и ψ находятся из системы (2.2), а для определения функций φ_1, ψ_1 и ψ_2 получим уравнения

$$(\varphi_1)_t + \varphi\varphi_1 + \int\limits_0^1 \psi_1\,d\lambda = 0, \quad (\psi_1)_t + 2\varphi\psi_1 + 2\varphi_1\psi = 0, \quad (\psi_2)_t + \varphi_1\psi_1 + \varphi\psi_2 = 0.$$

Приведем следующие частные решения:

1) функции φ и ψ заданы формулами (3.1),

$$\varphi_1 = \psi_1 = 0, \quad \psi_2(t,\lambda) = l(\lambda)\exp\Big(-\int\limits_0^t \varphi(t',\lambda)\,dt'\Big), \quad l(\lambda) > 0;$$

это решение аналогично рассмотренному выше, но глубина в точке $x = 0$ больше нуля;

2) полагая функции ψ и ψ_1 равными нулю, находим решение

$$u = (x + C_2(\lambda))(t + C_1(\lambda))^{-1}, \qquad H = C_3(\lambda)(t + C_1(\lambda))^{-1}. \tag{3.3}$$

Пусть начальные данные для системы уравнений (1.3) имеют вид

$$u(0,x,\lambda) = a(\lambda)x + b(\lambda), \; H(0,x,\lambda) = H_0(\lambda) \Big(a(\lambda) \neq 0, \; H_0(\lambda) > 0, \; \int\limits_0^1 H_0(\lambda)\,d\lambda = h_0 < \infty\Big).$$

Тогда формула (3.3) с функциями $C_1(\lambda) = a^{-1}(\lambda)$, $C_2(\lambda) = b(\lambda)a^{-1}(\lambda)$, $C_3(\lambda) = H_0(\lambda)a^{-1}(\lambda)$ дает решение этой задачи Коши. Если $a(\lambda) > 0$, то решение определено при всех $t \geqslant 0$ и описывает сжатие жидкой полосы под действием давления. Глубина $h(t)$ с ростом времени падает от h_0 при $t = 0$ до нуля при $t = \infty$. Горизонтальная компонента скорости положительна при $x + b(\lambda)a^{-1}(\lambda) > 0$ и отрицательна при $x + b(\lambda)a^{-1}(\lambda) < 0$, следовательно, происходит оттекание жидкости на бесконечность. В случае $a(\lambda) < 0$ решение определено при $t \in [0, M]$, $M = -\min a^{-1}(\lambda)$ и описывает обратный процесс. С ростом времени глубина увеличивается за счет притока жидкости с бесконечности. В зависимости от начального распределения в момент времени $t = M$ глубина может быть конечной или бесконечной.

В. Подсистема (2.3). Рассмотрим уравнение (2.12). Легко видеть, что функция $w(\tau, \lambda) = a(\lambda)\tau + b(\lambda)$ является решением, если $1 + \int\limits_0^1 C(\lambda)(a(\lambda))^2\, d\lambda = 0$. Переходя к исходным функциям φ, ψ и полагая $C(\lambda) = (a(\lambda))^{-2}$, получим следующее инвариантное решение:

$$u = (x + \ln t + d(\lambda) - 1)t^{-1}, \ H = -(x + \ln t + d(\lambda))t^{-2}. \tag{3.4}$$

Решение (3.4) определено при $x < -M - \ln t$, $M = \max d(\lambda)$. Свободная граница имеет вид прямой с угловым коэффициентом $-t^{-2}$. В области определения решения функция $u(t, x, \lambda) < 0$.

Г. Подсистема (2.9). Фактор-система (2.9) описывает класс стационарных завихренных течений. Подробный их анализ дан в [3].

Д. Подсистема (2.10). Решение фактор-системы (2.10) $u = u(\lambda)$, $H = H(\lambda)$ описывает сдвиговые течения. В эйлеровой системе координат решение имеет вид $u = u(y)$, $v = 0$, $h = \mathrm{const}$.

Е. Инвариантное решение $u = t$, $H = (x - t^2/2)a(\lambda)$, $\int\limits_0^1 a(\lambda)\, d\lambda = -1$ построено по подалгебре $X_1 + X_3, X_4 + X_5$. В эйлеровых координатах оно имеет вид $u = t$, $v = 0$, $h = t^2/2 - x$. Пусть $x = t^2/2 - h_0$ — жесткая стенка (h_0 — положительная постоянная), на ней $u = x'(t) = t$, $h = h_0$; в точке $x = t^2/2$ функция $h(t, x) = 0$, следовательно, в каждый момент времени жидкость находится в треугольнике $t^2/2 - h_0 \leqslant x \leqslant t^2/2$, $0 \leqslant y \leqslant t^2/2 - x$, и относительно движущейся со скоростью t системы координат ее скорость равна нулю. Поэтому рассматриваемое течение можно интерпретировать как равноускоренное движение покоящегося жидкого клина. Это решение допускает обобщение. Приводимые ниже формулы описывают аналогичное завихренное течение:

$$u = t + f(\lambda), \quad H = (x - t^2/2)a(\lambda) - tf(\lambda)a(\lambda) + g(\lambda), \quad \int\limits_0^1 a(\lambda)\, d\lambda = -1.$$

Нестационарные течения с критическим слоем. Здесь использованы методы, развитые в [3] при исследовании течений с критическим слоем, и получен класс точных решений, описывающих нестационарные движения жидкости с образованием областей возвратного течения.

В результате интегрирования фактор-системы (2.7) находим решение

$$u = t \pm \sqrt{2(C(\lambda) - \xi - h)}, \quad H = D(\lambda)(u - t)^{-1}, \quad \xi = x - t^2/2, \tag{3.5}$$

где функция $h(\xi)$ определяется из уравнения $F = h - \int\limits_0^1 H\, d\lambda = 0$.

Изменение знака происходит при $C(\lambda) = \xi + h(\xi)$. Рассмотрим область течения, где

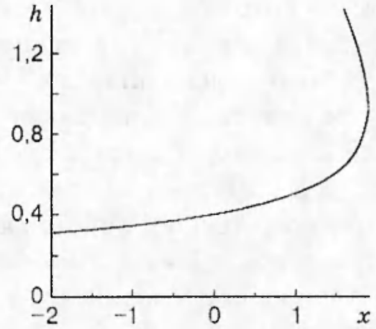

Рис. 1

$u - t$ не меняет знак. В дальнейшем будем считать, что $D(\lambda) \equiv -1$, а $C(\lambda)$ — строго возрастающая и непрерывно дифференцируемая функция. В формуле, выражающей скорость, возьмем знак минус. Обозначим через C_m минимальное значение $C(\lambda)$. Уравнение для определения $h(\xi)$ в данном случае имеет вид

$$F(h,\xi) = h - \int_0^1 (2(C(\lambda) - \xi - h))^{-1/2}\, d\lambda = 0. \tag{3.6}$$

Проведем качественный анализ уравнения (3.6). Функция $F(h,\xi)$ определена в области $h + \xi \leqslant C_m$, $0 \leqslant h < \infty$. При $h + \xi < C_m$ существуют непрерывные производные функции $F(h,\xi)$, причем производная по ξ и вторые производные отрицательны. На сечениях $h = h_0$, $h_0 \in (0, b]$, где $b = \int_0^1 (2(C(\lambda) - C_m))^{-1/2}\, d\lambda$ (интеграл сходится в силу условий, которым удовлетворяет функция $C(\lambda)$), существует единственное значение $\xi_0 \in (-\infty, C_m - h_0]$ такое, что $F(h_0,\xi_0) = 0$, так как $F(h_0,\xi) \to h_0 > 0$ при $\xi \to -\infty$, $F(h_0,\xi) \to h_0 - b \leqslant 0$ при $\xi \to C_m - h_0$ и $F_\xi < 0$. На сечениях $\xi = \xi_0$, $\xi_0 \in (-\infty, a)$, $a = C_m - b$ уравнение $F(h,\xi_0) = 0$ имеет единственный корень, так как $F(0,\xi_0) < 0$, $F(C_m - \xi_0, \xi_0) = a - \xi_0 > 0$ и $F_h(h,\xi_0)$ может менять знак только один раз ($F_{hh} < 0$).

Рассмотрим функцию $F(h,\xi)$ на сечениях $\xi = \xi_0 \geqslant a$. На сечении $\xi = a$ функция F обращается в нуль дважды при изменении h от 0 до b. Действительно, $F(b,a) = 0$ и $F_h \to -\infty$ при $h \to b$, значит, для некоторых h, достаточно близких к b, $F(h,a) > 0$, а $F(0,a) < 0$, следовательно, существует (и в силу выпуклости F по h единственное) значение h_0 ($0 < h_0 < b$) такое, что $F(h_0,a) = 0$. Легко видеть, что для близких к a значений ξ_0 функция $F(h,\xi_0)$ обращается в нуль дважды при изменении h от 0 до $C_m - \xi_0$. Обозначим через d ($a < d < C_m$) максимальное значение ξ_0, при котором имеет корень уравнение $F(h,\xi_0) = 0$. Пусть h_0 — корень уравнения $F(h,d) = 0$, тогда в этой точке

$$F_h = 1 - \int_0^1 H(u-t)^{-2}\, d\lambda = 0,$$

и, согласно [5], линии $x - (1/2)t^2 = \xi = \text{const}$ являются характеристиками.

На рис. 1 изображена кривая $F(h,\xi) = 0$, соответствующая функции $C(\lambda) = \lambda + 3$. В этом случае $C_m = 3$, $d \approx 1{,}885$, $a = 3 - \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$. Для исходной координаты $x = \xi + t^2/2$ кривая на рис. 1 отвечает моменту времени $t = 0$. В любой другой момент времени $t = t_0$ график уравнения получается сдвигом по оси x вправо на величину $t_0^2/2$, что соответствует равноускоренному движению. Производная функции $h(\xi)$ имеет вид $h' = (1 - F_h)F_h^{-1}$.

Качественное поведение этой кривой сохраняется при изменении функции $C(\lambda)$.

Предыдущие рассуждения показывают, что уравнение $F(h,\xi) = 0$ имеет при $\xi < d$ две ветви решений. Нижняя ветвь $h_1(\xi)$ определена для всех $\xi < d$. Формулы (3.5) со свободной границей $h = h_1(\xi)$ задают на этом интервале инвариантное решение; в области течения $u - t$ не меняет знак (критический слой отсутствует). Верхняя ветвь $h_2(\xi)$ определена для $\xi \in [a, d]$. Рассмотрим вопрос о продолжении решения (3.5) с функцией $h = h_2(\xi)$ в область $\xi < a$. В результате будет построено решение, описывающее нестационарное течение с критическим слоем. При $\xi \leqslant a$ уравнение свободной границы $h_2(\xi)$ зададим произвольно, при этом потребуем выполнения следующих условий: 1) $h_2(a) = b$; 2) $h_2'(a) = -1$; 3) $h_2'(\xi) > -1$, $h_2(\xi) > h_1(\xi)$ $(\xi < a)$; 4) $h_2(\xi) \to 0$, $h_2'(\xi) \to 0$ $(\xi \to -\infty)$.

При $\xi \leqslant a$ уравнением $y = g(\xi)$, где

$$g(\xi) = h_2(\xi) - \int\limits_0^1 (2(C(\lambda) - \xi - h_2(\xi)))^{-1/2}\, d\lambda, \tag{3.7}$$

зададим верхнюю границу области возвратного течения, при этом нижняя граница этой области $y = 0$. В области $0 \leqslant y \leqslant g(\xi)$ будет построено течение, обладающее следующим свойством: на определенной кривой, лежащей в этой области, функция u меняет знак, а линии тока в движущейся со скоростью t системе координат устроены так, как показано на рис. 2. Решение при $\xi < a$ во внешней области (от границы области возвратного течения до свободной границы) определим формулами (3.5) с заданной функцией $h = h_2(\xi)$, а в области возвратного течения — формулами

$$u = t \mp \sqrt{2(Q(\lambda) - \xi - h_2(\xi))}, \qquad H = (u - t)^{-1}, \tag{3.8}$$

где $Q(\lambda)$ — неизвестная функция; знак плюс берется для $0 \leqslant \lambda \leqslant \mu$, а минус — выше линии $u = 0$ для $\mu \geqslant \nu \geqslant 0$ (значение $\mu(\xi)$ определяется уравнением $Q(\mu) - \xi - h_2(\xi) = 0$).

Интегрированием функции H по λ от 0 до μ находим высоту линии $u = 0$, далее интегрирование от μ до 0 в области выше линии $u = 0$ определяет толщину зоны возвратного течения. Приравнивая эту величину к функции $g(\xi)$, заданной формулой (3.7), получим интегральное уравнение для определения $Q(\lambda)$:

$$2\int\limits_0^\mu (2(Q(\lambda) - \xi - h_2(\xi)))^{-1/2}\, d\lambda = g(\xi). \tag{3.9}$$

Сделаем замену переменных $\eta = h_2(\xi) + \xi$, $s = Q(\lambda)$. В силу условий на $h_2(\xi)$ при $\xi < a$ функция $\eta(\xi)$ обратима. Этой заменой (3.9) сводится к уравнению Абеля:

$$-\sqrt{2}\int\limits_{C_m}^{\eta} \tau(s)(s - \eta)^{-1/2}\, ds = g(\xi(\eta)) = G(\eta).$$

Здесь неизвестной является функция $\tau(s) = -(Q'(\lambda(s)))^{-1} = \omega^{-1}$. Решение уравнения Абеля имеет вид

$$\tau(s) = (\sqrt{2}\pi)^{-1}\int\limits_{C_m}^{s} G'(\eta)(\eta - s)^{-1/2}\, d\eta.$$

Теперь функцию $Q(\lambda)$ можно определить, решая уравнение в полных дифференциалах: $\tau(Q)dQ + d\lambda = 0$, $Q(0) = C_m$.

Приведем пример решения, выражающегося в элементарных функциях. Пусть $C(\lambda) = \lambda + 3$ и при $\eta < 3$ $(\xi < a = 3 - \sqrt{2})$ свободная граница задана следующим образом: $h(\xi(\eta)) =$

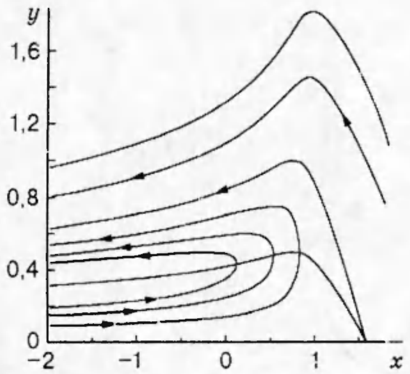

Рис. 2

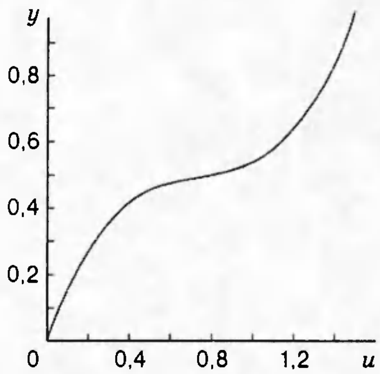

Рис. 3

$\tilde{h}(\eta) = \sqrt{2(3-\eta)}(3{,}5-\eta)^{-1} + \sqrt{2(4-\eta)} - \sqrt{2(3-\eta)}$. Тогда граница области возвратного течения определяется функцией $y = G(\eta) = \sqrt{2(3-\eta)}(3{,}5-\eta)^{-1}$. Линия $u = 0$ задается уравнением $y = 2^{-1}G(\eta)$, функция Q определяется в виде $Q(\lambda) = 3 + 2^{-1}(1-(1-\lambda)^{-2})$, а $\mu(\xi(\eta)) = \tilde{\mu}(\eta) = 1 - \sqrt{0{,}5(3{,}5-\eta)^{-1}}$.

Свободная граница, область возвратного течения, линия $u = 0$ и линии тока изображены на рис. 2 в момент времени $t = 0$. При $t > 0$ картина течения получается сдвигом по оси x вправо на величину $t^2/2$.

Изменение типа системы уравнений в процессе эволюции течения. Приведем решение, на котором уравнения (1.3) с ростом времени меняют тип. Рассмотрим следующее инвариантное решение:

$$u = (x - C(\lambda))t^{-1}, \qquad H = D(\lambda)t^{-1}, \tag{3.10}$$

полученное в результате интегрирования фактор-системы (2.8). В эйлеровой системе координат оно имеет вид $u = (x - C(ty))/t$, $v = -y/t$, $h = \text{const}/t$. Это решение описывает вихревое течение при сжатии жидкого слоя под действием давления.

Приведенные в [4] необходимые и достаточные условия гиперболичности интегродифференциальных уравнений теории мелкой воды с монотонным по глубине профилем скорости следующие:

$$\chi^+ \neq 0, \qquad \text{æ} = \Delta \arg\, \chi^+(u)/\chi^-(u) = 0 \tag{3.11}$$

(приращение аргумента комплексной функции χ вычисляется при изменении значений λ от нуля до единицы при фиксированных t и x). Функции $\chi^\pm(u)$ имеют вид

$$\chi^\pm(u(\lambda)) = 1 + \tilde{\omega}_1^{-1}(u_1 - u)^{-1} - \tilde{\omega}_0^{-1}(u_0 - u)^{-1} - \int\limits_{u_0}^{u_1} (\tilde{\omega}^{-1})_v (v-u)^{-1}\, dv \mp \pi i (\tilde{\omega}^{-1})_u, \tag{3.12}$$

где $\tilde{\omega} = u_\lambda H^{-1} = -\omega$; индексы 0 и 1 относятся к функциям при $\lambda = 0$ и 1.

Условия (3.11) гарантируют отсутствие комплексных корней уравнения

$$1 = \int\limits_{u_0}^{u_1} \tilde{\omega}^{-1}(u-k)^{-2}\, du,$$

которое, согласно [5], определяет скорости k распространения характеристик.

Покажем, что на исходном решении, на котором выполняются условия (3.11), с ростом времени могут появиться комплексные характеристические корни, а это, вероятно,

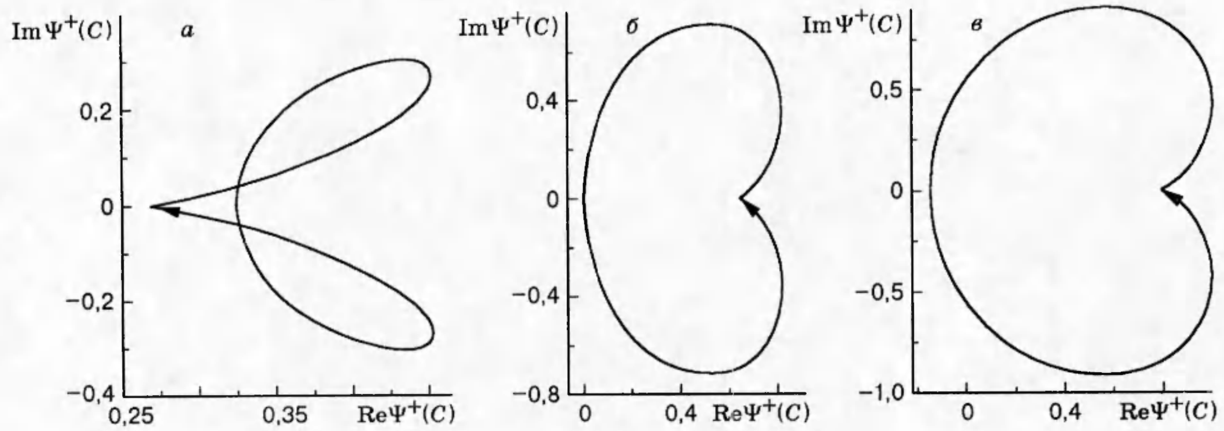

Рис. 4

означает потерю устойчивости течения. Пусть в формуле (3.10) $D(\lambda) \equiv 1$, а функция $C(\lambda)$ задана неявно уравнением

$$C^3 + 9^{-1}C - 2^{-1} + \lambda = 0. \tag{3.13}$$

Уравнение (3.13) имеет один вещественный и два мнимых корня при каждом $\lambda \in [0, 1]$. Заметим, что производная функции $C(\lambda)$, равная завихренности, не обращается в нуль и в бесконечность, так как $\omega = C'(\lambda) = -(3C^2 + 9^{-1})^{-1}$. В силу уравнения (3.13) $C(1/2) = 0$, $-C_1 = -C(1) = C(0) = C_0 \approx 0{,}747$.

Профиль скорости решения (3.10) при $x = C_0$ и $t = 1$ показан на рис. 3 (при других значениях x и t график получается сдвигом по горизонтальной оси и соответствующим изменением масштаба).

Проверим выполнение условий (3.11) на рассматриваемом решении. Функции $\chi^\pm$, заданные формулой (3.12), в этом случае имеют вид

$$\chi^\pm(C) = 1 + (3C_0^2 + 9^{-1})(C_0 + C)^{-1}t + (3C_0^2 + 9^{-1})(C_0 - C)^{-1}t - \\ -12C_0 t - 6Ct \ln|(C - C_0)(C + C_0)^{-1}| \pm 6\pi Cti.$$

Проверку условий гиперболичности проведем в терминах функций $\Psi^\pm$, определяемых формулой

$$\Psi^\pm = (C_0^2 - C^2)\chi^\pm(C) \tag{3.14}$$

и не имеющих полюсов в точках $C = \pm C_0$.

На рис. 4,*а*–*в* приведены графики функции $\Psi^+(C)$ при изменении C от C_0 до C_1 в моменты времени $t = 0{,}1$; $0{,}239$; $0{,}3$ соответственно; по оси абсцисс откладываются значения $\mathrm{Re}\Psi^+(C)$, а по оси ординат — значения $\mathrm{Im}\Psi^+(C)$ (графики функции $\Psi^-(C)$ аналогичны, но обход осуществляется в другом направлении). Мнимая часть функций $\Psi^\pm(C)$ обращается в нуль при $C = -C_1$, 0, C_1, а сами функции в этих точках принимают следующие значения:

$$\Psi^\pm(C_0) = \Psi^\pm(C_1) = 2C_0(3C_0^2 + 9^{-1})t > 0 \quad (t > 0), \qquad \Psi^\pm(0) = C_0^2 - 2C_0(3C_0^2 - 9^{-1})t.$$

В момент времени $t = t_* = 2^{-1}C_0(3C_0^2 - 9^{-1})^{-1} \approx 0{,}239$ в точке $C = 0$ функция Ψ^+ обращается в нуль (рис. 4,*б*), что ведет к нарушению условий (3.11). Как следует из рис. 4,*а*, приращение аргумента функций $\Psi^\pm(C)$ равно нулю, а значит, $æ = 0$ и условия (3.11) при $t = 0{,}1$ выполнены. При $t = 0{,}3$ на основании рис. 4,*в* заключаем, что $\Delta \arg\, \Psi^+(C) = 2\pi$, а $\Delta \arg\, \Psi^-(C) = -2\pi$, и, следовательно, $æ = 4\pi$. В этом случае условия гиперболичности нарушены. Относительно простой вид функций $\Psi^{\pm}$, заданных формулой (3.14), позволяет провести качественный анализ и сделать вывод, что для любого t из интервала $[t_0, t_*)$ $(0 < t_0 < t_*)$ условия (3.11) выполнены и на рассматриваемом решении система уравнений (1.3) гиперболична. При $t > t_*$ условия гиперболичности нарушены, что означает наличие комплексных характеристических корней, отделяющихся от непрерывного вещественного спектра в момент времени $t = t_*$. Таким образом, приведенный выше пример показывает, что в процессе эволюции течения система уравнений (1.3) может менять тип. При сжатии жидкой полосы, по-видимому, возможно возникновение длинноволновой неустойчивости при некоторых распределениях начальной завихренности.

Автор благодарит профессора В. М. Тешукова за внимание к работе, участие в обсуждении результатов и ценные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (грант NR7000).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Freeman N. C.** Simple waves on shear flows: similarity solutions // J. Fluid Mech. 1972. V. 56. P. 257–263.
2. **Sachdev P. L., Varugheze Ph.** Invariance group properties and exact solutions of equations describing time-dependent free surface flows under gravity // Quart. Appl. Math. 1986. V. 43. P. 465–482.
3. **Varley E., Blythe P. A.** Long eddies in sheared flows // Stud. Appl. Math. 1983. V. 68. P. 103–187.
4. **Тешуков В. М.** Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 17–26.
5. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–562.
6. **Benney D. J.** Some properties of long waves // Stud. Appl. Math. 1973. V. 52. P. 45–50.
7. **Захаров В. Е.** Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 15–24.
8. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
9. **Овсянников Л. В.** Об оптимальных системах подалгебр // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 6. С. 702–704.
10. **Sachdev P. L.** Exact self-similar time-dependent free surface flows under gravity // J. Fluid Mech. 1980. V. 96. P. 797–802.

Поступила в редакцию 18/XII 1995 г.,
в окончательном варианте — 25/III 1996 г.