ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ ГОРНЫХ НАУК Том 8, № 1, 2021

УДК 539.3 DOI: 10.15372/FPVGN2021080128

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОТЯЖЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВЫРАБОТКИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

А. И. Чанышев[1,2], О. Е. Белоусова[1], О. А. Лукьяшко[1]

[1]*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,* E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com,
Красный проспект 54, г. Новосибирск 630091, Россия
[2]*Новосибирский государственный университет экономики и управления,*
ул. Каменская 56, г. Новосибирск 630099, Россия

В постановке Лейбензона – Ишлинского в осесимметричном случае решается задача о потере устойчивости выработки, имеющей первоначальную форму кругового цилиндра. Предполагается, что в момент потери устойчивости образуются выпучины, обращенные внутрь выработанного пространства. Массив пород вокруг выработки рассматривается в одном из трех состояний: упругом, упругопластическом, в состоянии запредельного деформирования. Определяется критическая нагрузка, зависящая от длины выработки, радиуса и физико-механических свойств массива пород.

Цилиндрическая выработка, осесимметричная деформация, критерий устойчивости, Лейбензон – Ишлинский, критическая нагрузка

STABILITY LOSS IN AN EXTENDED CYLINDRICAL WORKING BEYOND THE ELASTIC LIMIT

A. I. Chanyshev[1,2], O. E. Belousova[1], and O. A. Lykyashko[1]

[1]*Chinakal Institute of Mining Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,*
E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com, *Krasny pr. 54, Novosibirsk 630091, Russia*
[2]*Novosibirsk State University of Economics and Management,*
ul. Kamenskaya 56, Novosibirsk 630099, Russia.

In the axisymmetric case of Leibenson – Ishlinsky formulation, the problem of stability loss in a mine working with initial circular cylindrical shape is solved. It is assumed that at the moment of stability loss bulges are formed, facing the inside of the mined-out space. The rock mass around the mine working is considered in one of three states: elastic, elastoplastic and post-limiting deformation. The critical load depending on the length of working, radius and physical/mechanical rock properties is determined.

Cylindrical working, axisymmetric deformation, stability criterion, Leibenson – Ishlinsky, critical load

Вопросы потери устойчивости горных выработок являются принципиальными для оценки безопасного состояния горных работ. В некоторых работах ее связывают с разрушением массива пород вокруг выработок [1 – 6], в других вводят коэффициенты устойчивости массива пород [7 – 10]. Исторически сложилось так, что потеря устойчивости рассматривалась как изменение формы конструкции за счет достижения определенных условий. Если говорить о потере устойчивости стержней при сжатии, то существует критическая нагрузка по Эйлеру, критическая нагрузка по Карману [11], есть критическая нагрузка по Шенли [11]. Аналогичные нагрузки рассматриваются и для других конструкций.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № АААА-А17-117121140065-7).

Из всех постановок, относящихся к исследованию потери устойчивости массивных конструкций, выделяется постановка задач теории устойчивости, предложенная Л. С. Лейбензоном [12] и А. Ю. Ишлинским [13]. Суть ее заключается в рассмотрении двух возможных продолжений процессов деформирования конструкций — основного процесса, при котором не происходит изменение формы нагружаемой конструкции и другого, бесконечно близкого к основному, с изменением геометрии конструкции в момент потери устойчивости. Этот подход получил развитие в [14, 15]. В данной работе он применяется для оценки устойчивости массива пород с цилиндрической выработкой длиной H и радиусом R. Предполагается, что до момента потери устойчивости выработка была цилиндрической формы, в момент потери устойчивости наряду с цилиндрической формой образуются другие формы с выпучинами, направленными во внутрь выработанного пространства.

Основные уравнения задачи. Рассматривается массив горных пород с цилиндрической выработкой радиуса R и длиной H.

Предполагается, вокруг выработки до момента потери устойчивости имеется однородное напряженно – деформированное состояние, описываемое тензорами T_σ, T_ε вида:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{rz} & 0 \\ \tau_{rz} & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\phi \end{pmatrix}, \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & \varepsilon_{rz} & 0 \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\varphi \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\sigma_r = \tau_{rz} = \sigma_\varphi = 0$, $\varepsilon_r = \varepsilon_\varphi$, $\varepsilon_{rz} = 0$, $\sigma_z = -P$ $(P > 0)$.

Для формулировки определяющих соотношений среды при продолжающемся нагружении введем тензорный базис с ортами

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; T_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; T_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Здесь T_1 соответствует шаровому тензору, остальные тензоры-орты — девиатору.

Состоянию (1) в базисе (2) соответствуют координаты

$$\begin{cases} S_1 = (T_\sigma, T_1) = \dfrac{\sigma_z}{\sqrt{3}} = -\dfrac{P}{\sqrt{3}}, \; S_2 = 0, \; S_3 = 0, \; S_4 = -\dfrac{2P}{\sqrt{6}}. \\ \Omega_1 = (T_\varepsilon, T_1) = \dfrac{\varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\varphi}{\sqrt{3}}, \; \Omega_2 = \Omega_3 = 0, \; \Omega_4 = \dfrac{2(\varepsilon_z - \varepsilon_r)}{\sqrt{6}}, \; (\varepsilon_r = \varepsilon_\varphi). \end{cases} \tag{3}$$

Из (3) следует, что до момента потери устойчивости нагружение происходило вдоль ортов T_1 и T_4, причем вдоль орта T_1 деформация изменялась упруго в силу закона упругого изменения объема, справедливого для первоначально изотропной среды. Основное нагружение происходит здесь вдоль орта T_4 с усилием S_4, и с ростом деформации на величину Ω_4. В других направлениях никаких деформаций не происходит.

Это означает следующее. Если за счет одноосного сжатия среды будет достигнуто пластическое состояние, то оно будет продолжиться в направлении орта T_4, а в направлениях других ортов T_2 и T_3 возможны лишь приращения упругих деформаций. Учитывая это обстоятельство, запишем определяющие соотношения для дополнительных напряжений и деформаций, характеризующих возмущенное состояние массива пород аналогично [12, 13]:

$$\frac{\Delta\varepsilon_r + \Delta\varepsilon_z + \Delta\varepsilon_\varphi}{\sqrt{3}} = \frac{\Delta\sigma_r + \Delta\sigma_z + \Delta\sigma_\varphi}{\sqrt{3}K}, \tag{4}$$

где $K = E/(1-2\nu)$; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона,

$$\sqrt{2}\Delta\varepsilon_{rz} = \sqrt{2}\Delta\tau_{rz}/2\mu, \quad \frac{\Delta\varepsilon_r - \Delta\varepsilon_\varphi}{\sqrt{2}} = \frac{\Delta\sigma_r - \Delta\sigma_\varphi}{\sqrt{2}\cdot 2\mu}, \quad \frac{2\Delta\varepsilon_z - \Delta\varepsilon_r - \Delta\varepsilon_\varphi}{\sqrt{6}} = \frac{2\Delta\sigma_z - \Delta\sigma_r - \Delta\sigma_\varphi}{\sqrt{6}\cdot 2\mu_p}, \quad (5)$$

где 2μ — модуль упругого сдвига; $2\mu_p$ — касательный модуль сдвига на диаграмме деформирования $|\sigma_z| = f(\varepsilon_z - \varepsilon_\varphi)$, полученной при одноосном сжатии образцов породы вдоль их образующих, где f — функция переменной $|\varepsilon_z - \varepsilon_\varphi|$. Представленные уравнения соответствуют теории пластического течения [11]. Для деформационной теории пластичности $2\mu = 2\mu_c$, где $2\mu_c$ — секущий модуль сдвига на указанной диаграмме.

Определяющие соотношения перепишем как

$$\begin{cases} \Delta\sigma_r = (K + 3\mu + \mu_p)\Delta\varepsilon_r/3 + (K - 2\mu_p)\Delta\varepsilon_z/3 + (K - 3\mu + \mu_p)\Delta\varepsilon_\varphi/3, \\ \Delta\sigma_z = (K - 2\mu_p)\Delta\varepsilon_r/3 + (K + 4\mu_p)\Delta\varepsilon_z/3 + (K - 2\mu_p)\Delta\varepsilon_\varphi/3, \\ \Delta\sigma_\varphi = (K - 3\mu + \mu_p)\Delta\varepsilon_r/3 + (K - 2\mu_p)\Delta\varepsilon_z/3 + (K + 3\mu + \mu_p)\Delta\varepsilon_\varphi/3, \\ \Delta\tau_{rz} = 2\mu\Delta\varepsilon_{rz}. \end{cases} \quad (6)$$

Используем соотношения Коши

$$\Delta\varepsilon_r = \frac{\partial\Delta u}{\partial r}, \Delta\varepsilon_\varphi = \frac{\Delta u}{r}, \Delta\varepsilon_z = \frac{\partial\Delta\omega}{\partial z}, \Delta\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial z} + \frac{\partial\Delta\omega}{\partial r}\right), \quad (7)$$

уравнения равновесия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Delta\sigma_r}{\partial r} + \dfrac{\partial\Delta\tau_{rz}}{\partial z} + \dfrac{\Delta\sigma_r - \Delta\sigma_\varphi}{r} = 0, \\ \dfrac{\partial\Delta\tau_{rz}}{\partial r} + \dfrac{\Delta\tau_{rz}}{r} + \dfrac{\partial\Delta\sigma_z}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Подставим (6) и (7) в (8), как результат получаем следующую систему уравнений для отыскания приращений смещений Δu и $\Delta\omega$ в цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases} (K - 2\mu_p + 3\mu)\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{u}{r^2} + \dfrac{\partial^2\omega}{\partial r\partial z}\right]/3 + \mu_p\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{u}{r^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] + (\mu - \mu_p)\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \\ (K - 2\mu_p + 3\mu)\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial z} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\right]/3 + \mu\left[\dfrac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\omega}{\partial r} + \dfrac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\right] - 2(\mu - \mu_p)\dfrac{\partial^2\omega}{\partial z^2} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где для упрощения записи символы приращений со значком Δ убраны.

Дальше, согласно [12, 13] требуется найти общее решение системы (9), чтобы затем по ним найти деформации (7), напряжения (6), затем удовлетворить граничным условиям задачи и найти критическую нагрузку.

Решение системы (9) разыскиваем в виде

$$u = A[\alpha\mathrm{ch}(pz) + \beta\mathrm{sh}(pz)]Z_1(\lambda r), \;\; \omega = B[\beta\mathrm{ch}(pz) + \alpha\mathrm{sh}(pz)]Z_0(\lambda r), \quad (10)$$

где A, B, α, β — произвольные постоянные, λ — характеристическое число, подлежащее определению, $Z_1(\lambda r)$ — цилиндрическая функция первого порядка, $Z_1(\lambda r)$ — цилиндрическая функция нулевого порядка.

Вычисляя производные от функции u, ω по координате r на основании известных свойств цилиндрических функций: $Z_1'(\lambda r) = -\dfrac{1}{\lambda r}Z_1(\lambda r) + Z_0(\lambda r), Z_0'(\lambda r) = -Z_1(\lambda r)$, получаем систему двух однородных линейных уравнений для определения двух неизвестных констант A и B:

$$
\begin{cases}
[\mu p^2-\lambda^2(K+\mu_p+3\mu)/3]A-\lambda p(K-2\mu_p+3\mu)/3\cdot B=0,\\
\lambda p(K-2\mu_p+3\mu)/3\cdot A+[p^2(K+4\mu_p)/3-\mu\lambda^2]\cdot B=0.
\end{cases}
\tag{11}
$$

Для существования ненулевого решения (11) ее определитель должен обратиться в нуль, т. е. должно быть выполнено условие

$$
(K+\mu_p+3\mu)\mu(\lambda/p)^4-(3K\mu_p-K\mu+8\mu\mu_p)(\lambda/p)^2+(K+4\mu_p)\mu=0. \tag{12}
$$

Кроме этого получаем общее решение системы (11) в виде

$$
B=L\cdot A, \tag{13}
$$

где $L=-\left(\dfrac{\lambda}{p}\right)\cdot(K-2\mu_p+3\mu)\Bigg/\left(K+4\mu_p-3\mu\left(\dfrac{\lambda}{p}\right)^2\right)$; A — произвольная константа.

Чтобы получить корни (12), введем обозначение

$$
(\lambda/p)^2=y. \tag{14}
$$

Тогда величина y на основании (12) должна удовлетворять квадратному уравнению

$$
y^2-(3K\mu_p-K\mu+8\mu\mu_p)y/(\mu(K+\mu_p+3\mu))+(K+4\mu_p)/(K+\mu_p+3\mu)=0. \tag{15}
$$

Корнями (15) служат в общем случае два комплексных числа:

$$
y_{1,2}=\frac{3K\mu_p-K\mu+8\mu\mu_p\pm i\sqrt{3(\mu-\mu_p)(K(\mu+3\mu_p)+4\mu\mu_p)(K+4\mu)}}{2\mu(K+\mu_p+3\mu)}, \tag{16}
$$

где i — мнимая единица.

Зная y, с применением (14) находим корни λ/p. Для их формулировки введем вспомогательные обозначения:

$$
\tau=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K+4\mu_p}{K+\mu_p+3\mu}}+\frac{3K\mu_p-K\mu+8\mu\mu_p}{4\mu(K+\mu_p+3\mu)}},\quad \gamma=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K+4\mu_p}{K+\mu_p+3\mu}}-\frac{3K\mu_p-K\mu+8\mu\mu_p}{4\mu(K+\mu_p+3\mu)}}. \tag{17}
$$

Тогда на этой основе получаем выражения корней характеристического уравнения (12):

$$
\left(\frac{\lambda}{p}\right)_1=\tau+i\gamma,\quad \left(\frac{\lambda}{p}\right)_2=\tau-i\gamma,\quad \left(\frac{\lambda}{p}\right)_3=-\tau+i\gamma,\quad \left(\frac{\lambda}{p}\right)_4=-\tau-i\gamma. \tag{18}
$$

Корни характеристического уравнения (12) получаются кратными, если $\mu=\mu_p$. Тогда τ = 1 γ = 0 и получаем две пары совпадающих корней:

$$
\left(\frac{\lambda}{p}\right)_1=\left(\frac{\lambda}{p}\right)_2=1,\quad \left(\frac{\lambda}{p}\right)_3=\left(\frac{\lambda}{p}\right)_4=-1.
$$

Во всех других случаях корни разные.

Исходя из этого обстоятельства, в случае разных корней характеристического уравнения (12), общее решение (9) записываем как сумму четырех слагаемых:

$$
u=\sum_{i=1}^{4}A_iZ_1(\lambda_i r)(\alpha\operatorname{ch}(pz)+\beta\operatorname{sh}(pz)),\quad \omega=\sum_{i=1}^{4}B_iZ_0(\lambda_i r)(\beta\operatorname{ch}(pz)+\alpha\operatorname{sh}(pz)), \tag{19}
$$

где между коэффициентами A_i и B_i выполняется соотношение типа (13), справедливое для всех $i=1,\ldots,4$.

Исследуем теперь характер изменения величин u и ω по координатам r и z. Будем считать, что ω — нечетная функция координаты z, где $-H/2 \le z \le H/2$, H — длина выработки. Это означает, что $\omega(H/2) = -\omega(-H/2)$, т. е. смещения ω на концах выработки разнонаправлены. Отсюда следует, что коэффициент β в (19) можно положить равным нулю, а коэффициент α тогда в силу произвольности констант B_i и A_i ($i = 1,...,4$) полагаем равным 1. Далее функции u и ω по координате z должны быть ограниченными. Для этого необходимо, чтобы величина p была величиной чисто мнимой. Если положить

$$p = i\frac{\pi}{H}, \tag{20}$$

тогда смещение u на концах выработки будет нулевым. Это происходит в силу определения косинусов и синусов, поскольку

$$\mathrm{sh}(pz) = i\sin\frac{\pi z}{H}, \quad \mathrm{ch}(pz) = \cos\frac{\pi z}{H}. \tag{21}$$

С учетом (20) находим, что корни характеристического уравнения (12) связаны условиями:

$$\lambda_1 = (-\gamma + i\tau)\frac{\pi}{H} = -\lambda_4, \quad \lambda_2 = (\gamma + i\tau)\frac{\pi}{H} = -\lambda_3. \tag{22}$$

Учтем, что функция ω должна быть четной функцией координаты r, т. е. $\omega(r) = \omega(-r)$. Отсюда следует, что должны совпадать по величине коэффициенты

$$B_1 = B_4, \quad B_2 = B_3. \tag{23}$$

Обратимся к зависимостям между коэффициентами A_k (k = 1, …, 4) в выражении для u. Поскольку справедливы соотношения (13), (22), (23), то из них вытекает, что коэффициенты A_1 и A_4 должны удовлетворять условию $A_1 = -A_4$. Точно также $A_3 = -A_2$, потому что $\lambda_1 = -\lambda_4$, $\lambda_3 = -\lambda_2$. Далее, так как функция $Z_0(\lambda r)$ — четная функция своего аргумента, то функция $Z_1(\lambda r) = -Z_0'(\lambda r)$ — нечетная. По этой причине получаем следующие представления для функций u и ω:

$$\omega = 2[B_1 Z_0(\lambda_1 r) + B_2 Z_0(\lambda_2 r)]\mathrm{sh}(pz), \quad u = 2[A_1 Z_1(\lambda_1 r) + A_2 Z_1(\lambda_2 r)]\mathrm{ch}(pz), \tag{24}$$

Применим выражения (24) для определения критической нагрузки в случае потери устойчивости массива пород с выработкой. На ее поверхности имеем краевые условия [12, 13]

$$\Delta\sigma_r\big|_{r=R} = 0, \quad \Delta\tau_{rz}\big|_{r=R} = -P_*\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{25}$$

где $\sigma_z = -P_*$ — критическое значение нагрузки, при которой возможна потеря устойчивости массива пород с выработкой.

Согласно (6), (7), (9) получаем выражения:

$$\Delta\sigma_r\big/2 = \left(\left[-2\mu\frac{Z_1(\lambda_1 r)}{r} + \frac{K + 3\mu + \mu_p}{3}\lambda_1 Z_0(\lambda_1 r)\right]\cdot A_1 + \right.$$

$$\left. + \left[-2\mu\frac{Z_1(\lambda_2 r)}{r} + \frac{K + 3\mu + \mu_p}{3}\lambda_2 Z_0(\lambda_2 r)\right]\cdot A_2 + \frac{K - 2\mu_p}{3}\left[B_1 Z_0(\lambda_1 r) + B_2 Z_0(\lambda_2 r)\right]\cdot\left(\frac{i\pi}{H}\right)\right)\cos\frac{\pi z}{H}, \tag{26}$$

$$\Delta\tau_{rz}\big/2 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\mu\left[A_1 Z_1(\lambda_1 r) + A_2 Z_1(\lambda_2 r)\right]\frac{\pi}{H}\cdot\mathrm{sh}\frac{\pi z}{H} +$$

$$+\mu\left[-B_1\lambda_1 Z_1(\lambda_1 r) - B_2\lambda_2 Z_1(\lambda_2 r)\right] i\sin\frac{\pi z}{H}. \tag{27}$$

Вычисляем производную

$$\left(\partial u\big/\partial z\right)\frac{1}{2} = -\left[A_1 Z_1(\lambda_1 r) + A_2 Z_1(\lambda_2 r)\right]\frac{\pi}{H}\cdot\sin\frac{\pi z}{H}. \tag{28}$$

Подставляя (26) – (28) в (25), находим линейную алгебраическую систему уравнений при $r = R$, связывающую неизвестные константы A_1, A_2, B_1, B_2. Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \tag{29}$$

где

$$\alpha_{11} = e^{i\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{\gamma}{\tau}\right)}\left[-2\mu Z_1\left[i\frac{\pi R}{H}\rho\right]\left(-i\frac{H}{\pi R}\right)+\frac{K+3\mu+\mu_p}{3}\left(\frac{\lambda}{p}\right)_1 Z_0\left(i\frac{R\pi}{H}\rho\right)+\frac{K-2\mu_p}{3}L_1 Z_0\left(i\frac{R\pi}{H}\rho\right)\right],$$

$$\alpha_{12} = e^{-i\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{\gamma}{\tau}\right)}\left[-2\mu Z_1\left[i\frac{\pi R}{H}\rho\right]\left(-i\frac{H}{\pi R}\right)+\frac{K+3\mu+\mu_p}{3}\left(\frac{\lambda}{p}\right)_2 Z_0\left(i\frac{R\pi}{H}\rho\right)+\frac{K-2\mu_p}{3}L_2 Z_0\left(i\frac{R\pi}{H}\rho\right)\right],$$

$$\alpha_{21} = \left(\frac{P_*}{\mu}+1\right)Z_1\left[\left(i\frac{R\pi}{H}\rho\right)e^{i\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)}\right]-L_1\left(\frac{\lambda}{p}\right)_1 Z_1\left[\left(i\frac{\pi R}{H}\rho\right)e^{i\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)}\right],$$

$$\alpha_{22} = \left(\frac{P_*}{\mu}+1\right)Z_1\left[i\frac{\pi R}{H}\cdot\rho\cdot e^{-i\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)}\right]-L_2\left(\frac{\lambda}{p}\right)_2 Z_1\left[i\frac{\pi R}{H}\cdot\rho\cdot e^{-i\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)}\right].$$

Параметры L_1, L_2 определяются (13). Отсюда находим критическую нагрузку $P = P_*$. Что касается выбора цилиндрических функций, то они, как и дополнительные смещения, должны убывать на бесконечности, стремясь к нулю. Это означает, что их надо искать в классе модифицированных функций вида $K_n(z)$. Это означает, что

$$Z_0\left[i\left(\frac{\pi R}{H}\rho e^{i\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)}\right)\right]=-\frac{2i}{\pi}K_0\left[\frac{\pi R}{H}\rho e^{i\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)}\right],\quad Z_1\left[i\left(\frac{\pi R}{H}\rho e^{i\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)}\right)\right]=-\frac{2}{\pi}K_1\left[\frac{\pi R}{H}\rho e^{i\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{\tau}{\gamma}\right)}\right].$$

С учетом указанной замены получаем значения критической нагрузки.

Результаты моделирования. На рис. 1 представлены зависимости предельной нагрузки $P_*/2\mu$ от безразмерного параметра $H/\pi R$, характеризующего форму выработки.

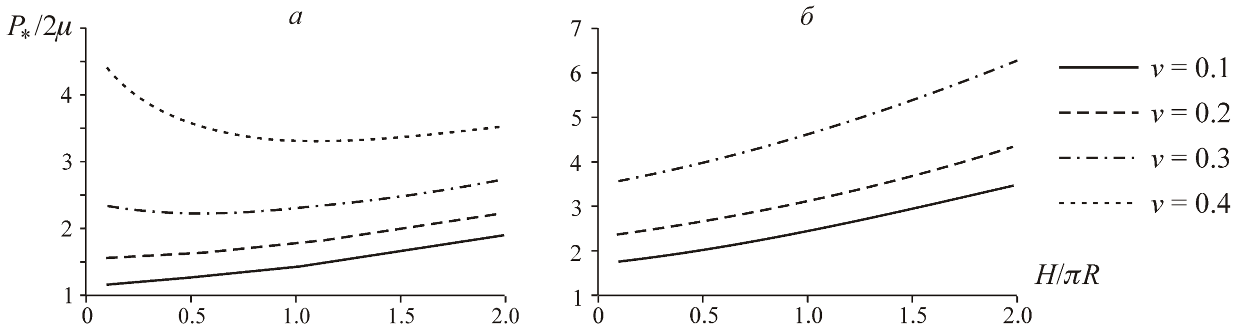

Рис. 1. Зависимость предельной нагрузки P_* от безразмерного параметра, характеризующего форму образца. Модуль Юнга $E = 6\cdot10^7$: *а* — $\mu_p = 0$; *б* — $\mu_p = -10\mu$

На рис. 2 представлены зависимости предельной нагрузки $P_*/2\mu$ от безразмерного параметра $H/\pi R$, характеризующего форму выработки, в случае упругости $\mu_p = \mu$, модуль Юнга $E = 6\cdot10^7$.

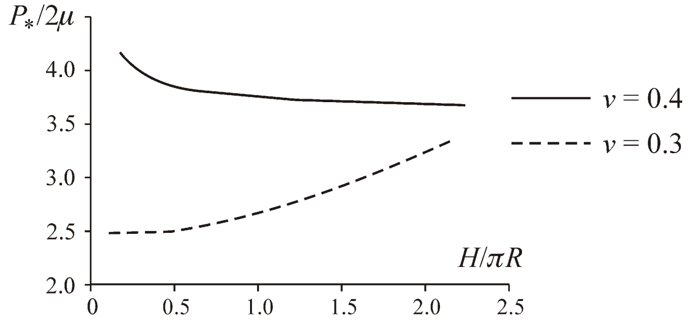

Рис. 2. Зависимость предельной нагрузки P_* от безразмерного параметра, характеризующего форму образца ($E = 6{\cdot}10^7$, $\mu_p = \mu$)

ВЫВОДЫ

Решена задача о потере устойчивости массива пород с цилиндрической выработкой. При этом решение для смещений u и ω стремится к нулю при возрастании радиальной координаты r. Приведены результаты расчетов критической нагрузки в зависимости от значений касательного модуля $2\mu_p$ и коэффициента Пуассона ν.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Turchaninov I. A., Iofis M. A., and Kasparyan E. V.** Fundamentals of rock mechanics, Leningrad, Nedra, 1989, 488 pp. [**Турчанинов И. А., Иофис М. А., Каспарьян Э. В.** Основы механики горных пород. — Л.: Недра. — 1989. — 488 с.]
2. **Proskuryakov N. M.** Management of the state of the rock massif, Textbook for universities, Moscow, Nedra, 1991, 386 pp. [**Проскуряков Н. М.** Управление состоянием массива горных пород / Учеб. для вузов. — М.: Недра. — 1991. — 386 с.]
3. **Chernyak I. L. and Yarunin S. A.** Management of the state of the rock massif, Textbook for universities, Moscow, Nedra, 1995, 395 pp. [**Черняк И. Л., Ярунин С. А.** Управление состоянием массива горных пород / Учеб. для вузов. — М.: Недра. — 1995. — 395 с.]
4. **Koshelev K. V., Petrenko Yu. A., and Novikov A. O.** Protection and repair of mine workings, Moscow, Nedra, 1990, 218 pp. [**Кошелев К. В., Петренко Ю. А., Новиков А. О.** Охрана и ремонт горных выработок. — М.: Недра. — 1990. — 218 с.]
5. **Bulychev N. S** Mechanics of underground structures in examples and tasks, Textbook for universities, Moscow, Nedra, 1989, 270 pp. [**Булычев Н. С**. Механика подземных сооружений в примерах и задачах / Учеб. пособие для вузов. — М.: Недра. — 1989. — 270 с.]
6. **Baklashov I. V. and Kartozia B. A.** Mechanics of underground structures and support structures, Moscow, Student, 2012, 543 pp.] [**Баклашов И. В., Картозия Б. А.** Механика подземных сооружений и конструкции крепей. — М.: Студент. — 2012. — 543 с.]
7. **Zborshchik M. P. and Nazimko V. I.** Protection of workings of deep mines in unloading zones, Kiev, Tehnika, 1991, 247 с. [**Зборщик М. П., Назимко В. И** Охрана выработок глубоких шахт в зонах разгрузки. — Киев: Тэхника. — 1991. — 247 с.]
8. **Protosenya A. G. and Bagautdinov I. I.** Evaluation of the influence of ore massif blockness parameters on the stability of mine workings, News of the Higher Institutions. Mining Journal, 2015, no. 8, pp. 49 – 54. [**Протосеня А. Г., Багаутдинов И. И**. Оценка влияния параметров блочности рудного массива массива на устойчивость горных выработок // Изв. вузов. Горный журнал. — 2015. — № 8. — С. 49 – 54.]
9. **Kharisov T. F.** The problem of estimating the safety factor of the sides of a pit, Subsoil Use Problems, 2018, no. 3(18), pp. 108 – 118. [**Харисов Т. Ф.** Проблема оценки коэффициента запаса устойчивости бортов карьера // Проблемы недропользования. — 2018. — Т. 3. — № 18. — С. 108 – 118.]

10. **Kozyrev S. A. and Kalyuzhny A.** Zoning of the near-rock massif of the “iron” quarry according to the stability of elements of open geotechnology taking into account the seismicity coefficient, Bulletin of the Kola Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 2019, vol. 11, no. 2, pp. 28 – 33. [**Козырев С. А., Калюжный А. С.** Районирование прибортового массива пород карьера “железный” по устойчивости элементов открытой геотехнологии с учетом коэффициента сейсмичности // Вестник КНЦ РАН. — 2019. — Т. 11. — № 2. — С. 28 – 33.]
11. **Kachanov L. M.** Fundamentals of the theory of plasticity, Moscow, Nauka, 1969, 420 pp. [**Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. — М.: Наука. — 1969. — 420 с.]
12. **Leibenzon L. S** On the application of harmonic functions to the question of the stability of spherical and cylindrical shells, Collection of works, Moscow, Publishing house of the Academy of Sciences of the USSR, 1951, vol. 1, 115 pp. [**Лейбензон Л. С.** О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. – Собрание трудов. — М.: Издательство АН СССР. — 1951. — Т. 1. — 115 с.]
13. **Ishlinsky A. Yu**. Consideration of questions about the stability of the equilibrium of elastic bodies from the point of view of the mathematical theory of elasticity, Ukrainian Mathematical Journal, 1954, vol. 4, no. 2, pp. 140 – 146. [**Ишлинский А. Ю.** Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Украинский математический журнал. — 1954. — Т. 4. — № 2. — С. 140 – 146**.**
14. **Ershov L. V.** On the stability of elastic-plastic equilibrium in the problems of rock pressure, Synopsis of Doct. Tech. Sci., Moscow, Moscow Institute of Radio Electronics and Mining Electromechanics, 1964, 15 pp. [**Ершов Л. В.** Об устойчивости упруго-пластического равновесия в задачах горного давления: автореф. дис. … докт. техн. наук. — М.: Московский институт радиоэлектроники и горной электромеханики. — 1964. — 15 с.]
15. **Alimzhanov M. T.** Stability of equilibrium of bodies and problems of rock mechanics, Alma-Ata: Science, 1982, 270 pp. [**Алимжанов М. Т.** Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород. — Алма-Ата: Наука. — 1982. — 270 с.]