

AMS subject classification: 65L10, 65L12

Новый компактный явный групповой итерационный метод переменных направлений с одной прогонкой для решения нелинейного, зависящего от времени, вязкого уравнения Бюргерса*

Р.К. Моханти^{1,2}, Дж.Талвар¹

¹Department of Applied Mathematics, South Asian University, Akbar Bhawan, Chanakyapuri, New Delhi, 110021, India

²Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Delhi, Delhi, 110007, India

E-mails: rmohanty@sau.ac.in; mohantyranjankumar@gmail.com (Моханти Р.К.), chhabrajyoti@gmail.com (Талвар Дж.)

Моханти Р.К., Талвар Дж. Новый компактный явный групповой итерационный метод переменных направлений с одной прогонкой для решения нелинейного, зависящего от времени, вязкого уравнения Бюргерса // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 4. — С. 389–405.

В данной статье обсуждается новый компактный явный групповой метод переменных направлений с одной прогонкой для решения, зависящего от времени, вязкого уравнения Бюргерса в декартовых и полярных координатах. Дается подробный анализ ошибок нового итерационного метода. Результаты предлагаемого итерационного метода сравниваются с результатами соответствующего явного группового метода переменных направлений (AGE) с двойной прогонкой для демонстрации вычислительной эффективности предложенного метода.

DOI: 10.15372/SJNM20150405

Ключевые слова: нелинейное параболическое уравнение, вязкий поток, компактный метод AGE, уравнение Бюргерса, число Рейнольдса.

Mohanty R.K., Talwar J. A new compact alternating group explicit iteration method for the solution of nonlinear time-dependent viscous Burgers' equation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 4. — P. 389–405.

In this article, we discuss a new single sweep compact alternating group explicit method for the solution of time dependent viscous Burgers' equation both in Cartesian and polar coordinates. An error analysis for the new iterative method is discussed in detail. We have compared the results of the proposed iterative method with the results of a corresponding double sweep alternating group explicit (AGE) iterative method to demonstrate computationally the efficiency of the proposed method.

Keywords: non-linear parabolic equation, viscous flow, Compact AGE Method, Burgers' equation, Reynolds number.

1. Введение

Рассмотрим зависящее от времени вязкое уравнение Бюргерса:

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (1)$$

*Работа выполнена при поддержке Совета научно-промышленных исследований (проект № 09/045(0836)2009-EMR-I).

где $v > 0$ — постоянная вязкости. Оно было введено Дж.М. Бюргерсом (см. [16]) как простейшая модель дифференциальных уравнений потока жидкости и используется в динамике жидкостей как упрощенная модель турбулентности, поведения пограничного слоя и образования ударной волны. Вязкое уравнение Бюргерса — хорошее тестовое уравнение для исследования различных численных схем, применяемых к более сложным системам уравнений в частных производных. Оно имеет примерно такую же структуру, что и уравнения Навье–Стокса по отношению к виду члена нелинейной конвекции и наличию члена вязкости. Таким образом, оно может считаться упрощенной формой одномерного уравнения Навье–Стокса. Уравнение (1) также считается одномерным нелинейным параболическим уравнением. Для решения уравнения Бюргерса было разработано много численных методов: методы конечных разностей (см. [1, 2, 4, 5, 7, 13–15, 17]), конечных элементов (см. [9, 11, 12, 18]) и спектральные методы [19].

За последние 40 лет большие усилия были направлены на разработку устойчивых и точных численных методов для численного решения одномерного уравнения Бюргерса, реализуемого на параллельных компьютерах. Была разработана подробная теория, получившая название: явный групповой итерационный метод переменных направлений (AGE), который интересен с математической точки зрения. В 1984 г. Эванс и Абдулла [10] обсудили использование явного группового метода для решения уравнения Бюргерса. В 1988 г. Эванс и Сахими [3] предложили использовать итерационный метод AGE для решения линейных параболических уравнений диффузии–конвекции. Недавно Моханти и Эванс [2] обсуждали использование итерационного метода AGE с двумя прогонками для решения одномерных нелинейных параболических начально краевых задач.

В данной статье мы предлагаем новый компактный итерационный метод AGE для решения одномерных нелинейных сингулярных параболических уравнений. Поскольку этот метод является явным и компактно сцепленным, он может использоваться на параллельных компьютерах. Было показано, что для фиксированного параметра отношения сетки предлагаемая разностная схема имеет четвертый порядок точности по пространству.

2. Описание метода

Рассмотрим следующее нелинейное параболическое уравнение:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \phi\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (2)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

и граничными условиями:

$$u(0, t) = f_0(t), \quad u(1, t) = f_1(t), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Двухуровневую неявную высокоточную разностную схему для численного решения параболического уравнения (2) при начальных и граничных условиях (3) и (4) можно описать следующим образом.

Пусть $h > 0$ и $k > 0$ — длины шагов по пространственной и временной координате соответственно. Заменим область $\Omega = \{(x, t) \mid 0 < x < 1, t > 0\}$ на множество точек сетки (x_l, t_j) , обозначаемых (l, j) , где $x_l = lh, t_j = jk$ для $l = 0, 1, \dots, N, N + 1$ и

$j = 0, 1, 2, \dots$, где N — положительное целое число с $(N + 1)h = 1$. Пусть $\lambda = k/h^2$ — параметр отношения сетки.

Пусть $U_l^j = u(x_l, t_j)$ — точное значение решения $u(x, t)$ в точке сетки (l, j) . Аппроксимируем решение (2) в точке сетки (l, j) посредством u_l^j . Разностная схема порядка $O(k^2 + h^4)$ (см. [4]) для решения дифференциального уравнения (2) задается следующим образом:

$$-(\bar{u}_{l-1}^j - 2\bar{u}_l^j + \bar{u}_{l+1}^j) + \frac{h^2}{12} [\bar{\phi}_{l+1}^j + \bar{\phi}_{l-1}^j + 10\bar{\phi}_l^j] = 0, \quad l = 1, 2, 3, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где мы используем следующие аппроксимации:

$$\bar{t}_j = t_j + \frac{k}{2}, \quad (6)$$

$$\bar{u}_{l+a}^{j+1} = \frac{u_{l+a}^{j+1} + u_{l+a}^j}{2}, \quad a = 0, \pm 1, \dots, \quad (7)$$

$$\bar{u}_{l+a}^j = \frac{u_{l+a}^{j+1} - u_{l+a}^j}{k}, \quad a = 0, \pm 1, \dots, \quad (8)$$

$$\bar{u}_{xl}^j = \frac{\bar{u}_{l+1}^j - \bar{u}_{l-1}^j}{2h}, \quad (9)$$

$$\bar{u}_{xl\pm 1}^j = \frac{\pm 3\bar{u}_{l\pm 1}^j \mp 4\bar{u}_l^j \pm \bar{u}_{l\mp 1}^j}{2h}, \quad (10)$$

$$\bar{\phi}_{l\pm 1}^j = \phi(x_{l\pm 1}, \bar{t}_j, \bar{u}_{l\pm 1}^j, \bar{u}_{xl\pm 1}^j, \bar{u}_{tl\pm 1}^j), \quad (11)$$

$$\bar{u}_{xl}^j = \bar{u}_{xl}^j - \frac{h}{20} (\bar{\phi}_{l+1}^j - \bar{\phi}_{l-1}^j), \quad (12)$$

$$\bar{\phi}_l^j = \phi(x_l, \bar{t}_j, \bar{u}_l^j, \bar{u}_{xl}^j, \bar{u}_{tl}^j). \quad (13)$$

В том случае, если дифференциальное уравнение является линейным, чтобы получить решение мы используем компактный итерационный метод AGE, а в нелинейном случае — компактный ньютоновский итерационный метод AGE. Подробности этих методов обсуждаются в п. 4.

3. Применения к сингулярным задачам

Рассмотрим линейное параболическое уравнение

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + B(x) \frac{\partial u}{\partial x} + C(x)u + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (14)$$

где $\nu > 0$ — коэффициент диффузии, $B(x) = -\alpha/x$ и $C(x) = \alpha/x^2$.

При $\alpha = 0$ приведенное выше уравнение является линейным параболическим уравнением в декартовых координатах. Заменив x на r и подставив $\alpha = 1$ и 2 , мы получим линейное параболическое уравнение в цилиндрических и сферических координатах соответственно.

Применив разностную формулу (5) к уравнению (14), мы получим

$$\begin{aligned}
& -\nu(\bar{u}_{l-1}^j - 2\bar{u}_l^j + \bar{u}_{l+1}^j) + \frac{h^2}{12}[10\bar{u}_{tl}^j + R_l\bar{u}_{tl+1}^j + S_l\bar{u}_{tl-1}^j] + \\
& \frac{h^2}{12}[10B_l\bar{u}_{xl}^j + R_lB_{l+1}\bar{u}_{xl+1}^j + S_lB_{l-1}\bar{u}_{xl-1}^j] + \frac{h^2}{12}[10C_l\bar{u}_l^j + R_lC_{l+1}\bar{u}_{l+1}^j + S_lC_{l-1}\bar{u}_{l-1}^j] + \\
& \frac{h^2}{12}[10\bar{f}_l^j + R_l\bar{f}_{l+1}^j + S_l\bar{f}_{l-1}^j] = 0, \quad l = 1, 2, 3, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$B_l = B(x_l), \quad R_l = 1 - \frac{hB_l}{2\nu}, \quad S_l = 1 + \frac{hB_l}{2\nu}, \quad C_l = C(x_l), \quad \bar{f}_l^j = f(x_l, \bar{t}_j).$$

Схема (15) имеет порядок $O(k^2 + h^4)$ для приближенного решения уравнения (14). Однако схема не срабатывает, когда решение должно определяться при $l = 1$ в окрестности сингулярности $x = 0$. Поскольку при $l = 1$ $B_{l-1} = 1/x_{l-1} = 1/x_0$, которое не определено для сингулярной точки $x_0 = 0$.

Чтобы преодолеть эту трудность, используем следующие аппроксимации:

$$B_{l\pm 1} = B_l \pm hB_{xl} + \frac{h^2}{2!}B_{xxl} \pm O(h^3), \tag{16}$$

$$C_{l\pm 1} = C_l \pm hC_{xl} + \frac{h^2}{2!}C_{xxl} \pm O(h^3), \tag{17}$$

$$\bar{f}_{l\pm 1}^j = \bar{f}_l^j \pm h\bar{f}_{xl}^j + \frac{h^2}{2!}\bar{f}_{xxl}^j \pm O(h^3), \tag{18}$$

где $\bar{f}_{xl}^j = f(x_l, \bar{t}_j)$, $B_l = -\frac{\alpha}{x_l}$, $B_{xl} = \frac{\alpha}{x_l^2} = C_l$, $B_{xxl} = -\frac{2\alpha}{x_l^3} = C_{xl}$, $C_{xxl} = \frac{6\alpha}{x_l^4}$.

Подставим эти аппроксимации в (15) и упростим их для получения двухуровневой неявной линейной разностной схемы в операторной форме

$$\begin{aligned}
& \left[(1 + \lambda P_0) + \frac{1}{12}(1 - 6\nu\lambda + \lambda P_1)\delta_x^2 - \frac{1}{12}(hQ_0 - \lambda P_2)(2\mu_x\delta_x) \right] u_l^{j+1} \\
& = \left[(1 - \lambda P_0) + \frac{1}{12}(1 + 6\nu\lambda - \lambda P_1)\delta_x^2 - \frac{1}{12}(hQ_0 + \lambda P_2)(2\mu_x\delta_x) \right] u_l^j + \Sigma f,
\end{aligned} \tag{19}$$

где $\delta_x u_l = (u_{l+1/2} - u_{l-1/2})$ и $\mu_x u_l = (u_{l+1/2} + u_{l-1/2})/2$ — операторы центральных разностей и усреднения относительно направления x . Мы имеем:

$$\begin{aligned}
Q_0 &= \frac{B_l}{2\nu}, \\
P_0 &= \frac{h^2}{24}[12C_l + h^2(C_{xxl} - 2Q_0C_{xl})], \\
P_1 &= \frac{h^2}{2}[2B_{xl} - 2Q_0B_l + C_l], \\
P_2 &= \frac{h}{4}[12B_l + h^2(B_{xxl} - 2Q_0B_{xl} + 2C_{xl} - 2Q_0C_{xl})], \\
\Sigma f &= \frac{-k}{12}[12\bar{f}_l^j + h^2(\bar{f}_{xxl}^j - 2Q_0\bar{f}_{xl}^j)].
\end{aligned}$$

Разностная схема (19) имеет локальную ошибку усечения $O(k^2 + h^4)$ и не имеет членов $1/(l \pm 1)$. Поэтому ее можно решить для $l = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, 3, \dots$ в области $0 < x < 1$, $t > 0$.

Теперь рассмотрим нелинейное сингулярное параболическое уравнение вида

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + D(x) \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + E(x)u + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (20)$$

где $\text{Re} = \nu^{-1} > 0$ — число Рейнольдса и

$$D(x) = -\frac{\alpha\nu}{x}, \quad E(x) = \frac{\alpha\nu}{x^2}.$$

Для $\alpha = 0$ приведенное выше уравнение представляет собой нелинейное вязкое уравнение Бюргера в декартовых координатах. Заменяя x на r и подставив $\alpha = 1$ и 2 , мы получим нелинейное вязкое уравнение Бюргера в цилиндрических и сферических координатах соответственно.

Применив разностную формулу (5) к нелинейному уравнению (20) и используя такой же метод, что и для линейного сингулярного уравнения, получим следующую разностную схему:

$$\begin{aligned} & \psi_l(u_{l-1}^{j+1}, u_l^{j+1}, u_{l+1}^{j+1}) \\ & \equiv -\lambda\nu\delta_x^2 \bar{u}_l^j + \frac{1}{12} [12 + \delta_x^2 - (Q_0 + H_1 \bar{u}_l^j)(2\mu_x \delta_x)] (u_l^{j+1} - u_l^j) + \\ & \frac{\lambda h^2}{12} [(12E_l + h^2 E_{xxl} + E_l \delta_x^2) \bar{u}_l^j + hE_{xl}(2\mu_x \delta_x) \bar{u}_l^j - (Q_0 + H_1 \bar{u}_l^j) \{E_l(2\mu_x \delta_x) \bar{u}_l^j + 2hE_{xl} \bar{u}_l^j\}] + \\ & \frac{\lambda h}{24} \{[(12D_l + h^2 D_{xxl})(2\mu_x \delta_x) \bar{u}_l^j + 4hD_{xl} \delta_x^2 \bar{u}_l^j] - (Q_0 + H_1 \bar{u}_l^j)(2hD_{xl}(2\mu_x \delta_x) \bar{u}_l^j) - \\ & (Q_0 + H_1 \bar{u}_l^j)(4D_l \delta_x^2 \bar{u}_l^j)\} + \\ & \frac{\lambda h}{24} \{(12 + 3\delta_x^2) \bar{u}_l^j (2\mu_x \delta_x) \bar{u}_l^j - (Q_0 + H_1 \bar{u}_l^j)(2\mu_x \delta_x) \bar{u}_l^j (2\mu_x \delta_x) \bar{u}_l^j - 4(Q_0 + H_1 \bar{u}_l^j) \bar{u}_l^j \delta_x^2 \bar{u}_l^j\} + \\ & \frac{k}{12} [(12\bar{f}_l^j + h^2 \bar{f}_{xxl}^j) - 2h\bar{f}_{xl}^j (Q_0 + H_1 \bar{u}_l^j)] = 0, \quad l = 1, 2, 3, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (21) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}_l^j &= \frac{u_l^{j+1} + u_l^j}{2}, \quad Q_0 = \frac{hD_l}{2\nu}, \quad H_1 = \frac{h\bar{u}_l^j}{2\nu}, \quad D_l = -\frac{\alpha\nu}{x_l}, \quad E_l = \frac{\alpha\nu}{x_l^2} = D_{xl}, \quad E_{xl} = -\frac{2\alpha\nu}{x_l^3} = D_{xxl}, \\ E_{xxl} &= \frac{6\alpha\nu}{x_l^4} \text{ и } \bar{f}_l^j = f(x_l, \bar{t}_j), \quad \bar{f}_{xl}^j = f(x_l, \bar{t}_j). \end{aligned}$$

Следует отметить, что разностная схема (21) также не имеет членов $1/(l \pm 1)$ и, таким образом, ее можно очень легко решить для $l = 1, 2, 3, \dots, N, j = 0, 1, 2, \dots$ в области $0 < x < 1, t > 0$.

4. Компактный метод AGE и теория сходимости

4.1. Компактный алгоритм AGE

Линейную систему (19) можно записать в матричной форме следующим образом:

$$a_l u_{l-1}^{j+1} + 2b_l u_l^{j+1} + c_l u_{l+1}^{j+1} = \beta_l, \quad l = 1, 2, 3, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} u_0^{j+1} &= f_0(t_{j+1}), & u_{N+1}^{j+1} &= f_1(t_{j+1}), \\ a_l &= \frac{1}{12}(1 - 6\nu\lambda + \lambda P_1) + \frac{1}{12}(hQ_0 - \lambda P_2), \\ 2b_l &= 1 + \lambda P_0 - \frac{1}{6}(1 - 6\nu\lambda + \lambda P_1), \\ c_l &= \frac{1}{12}(1 - 6\nu\lambda + \lambda P_1) - \frac{1}{12}(hQ_0 - \lambda P_2), \\ \beta_l &= (1 - \lambda P_0) + \frac{1}{12}(1 + 6\nu\lambda - \lambda P_1)\delta_x^2 u_l^j - \frac{1}{12}(hQ_0 + \lambda P_2)(2\mu_x \delta_x)u_l^j + \Sigma f, \end{aligned}$$

что можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \boldsymbol{\gamma}, \quad (23)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & 2b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{N-1} & 2b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & & & a_N & 2b_N \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ \vdots \\ u_N^{j+1} \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \beta_1 - a_1 u_0^{j+1} \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N - c_N u_{N+1}^{j+1} \end{bmatrix}_{N \times 1} \equiv \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{bmatrix}_{N \times 1}.$$

Для реализации компактного итерационного метода AGE разобьем матрицу коэффициентов \mathbf{A} на две подматрицы: \mathbf{G}_1 и \mathbf{G}_2 . Предположим, что они удовлетворяют следующим условиям (см. [6]):

1. $\mathbf{G}_1 + \omega_1 \mathbf{I}$ и $\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I}$ — несингулярные для подходящего выбора $\omega_1 > 0$ и $\omega_2 > 0$.
2. Для любых векторов $\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \omega_1 > 0$ и $\omega_2 > 0$ “удобно” решить систему явно, т.е. $\mathbf{z}_1 = (\mathbf{G}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}$ и $\mathbf{z}_2 = (\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1}$ для векторов \mathbf{z}_1 и \mathbf{z}_2 соответственно.

Рассмотрим ситуацию, когда \mathbf{G}_1 и \mathbf{G}_2 — небольшие (2×2) -блочные системы. Теперь обсудим случай, когда N — нечетное число (при $x_0 = 0, x_{N+1} = 1$).

Пусть

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} \boxed{b_1} & & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{\begin{matrix} b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}} & & & \\ & & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & \boxed{\begin{matrix} b_{N-1} & c_{N-1} \\ a_N & b_N \end{matrix}} & \\ & & & & \end{bmatrix}_{N \times N},$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}} & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} b_{N-1} & c_{N-1} \\ a_N & b_N \end{matrix}} & & \\ \mathbf{0} & & & & \boxed{b_N} \end{bmatrix}_{N \times N}.$$

Таким образом, систему (25), (26) можно переписать следующим образом:

$$(\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2)\mathbf{u} = \gamma. \quad (24)$$

Тогда двухпараметрический метод AGE для решения приведенной выше системы можно записать следующим образом:

$$(\mathbf{G}_1 + \omega_1 \mathbf{I})\mathbf{z}^{(s)} = \gamma - (\mathbf{G}_2 - \omega_1 \mathbf{I})\mathbf{u}^{(s)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (25)$$

$$(\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I})\mathbf{u}^{(s+1)} = \gamma - (\mathbf{G}_1 - \omega_2 \mathbf{I})\mathbf{z}^{(s)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (26)$$

где $\mathbf{z}^{(s)}$ — промежуточный вектор.

Исключив $\mathbf{z}^{(s)}$ и объединив уравнения (25) и (26), мы получим итерационный метод

$$(\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I})\mathbf{u}^{(s+1)} = [\mathbf{I} - (\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{G}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}](\mathbf{G}_2 - \omega_1 \mathbf{I})\mathbf{u}^{(s)} + (\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{G}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}\gamma, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (27)$$

или

$$\mathbf{u}^{(s+1)} = \mathbf{T}_w \mathbf{u}^{(s)} + \gamma_w, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (28)$$

где

$$\mathbf{T}_w = (\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1}[(\mathbf{G}_2 - \omega_1 \mathbf{I}) - (\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{G}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{G}_2 - \omega_1 \mathbf{I})]$$

и

$$\gamma_w = (\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{G}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}\gamma.$$

В предыдущем методе AGE мы использовали две прогонки. Сейчас мы свели две прогонки в одну в компактной форме. Новый итерационный метод (27) или (28) — это компактный двухпараметрический итерационный метод AGE, а матрица \mathbf{T}_w называется компактной итерационной матрицей AGE.

Теперь обсудим компактный ньютоновский метод AGE для нелинейного разностного уравнения (5). Когда $\phi(x, t, u, u_x, u_t)$ является нелинейным, разностный метод (5) образует нелинейную систему разностных уравнений. Компактный ньютоновский итерационный метод AGE может использоваться для решения такой системы. Определим:

$$\mathbf{u}^{j+1} = \begin{bmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ \vdots \\ u_N^{j+1} \end{bmatrix}, \quad \psi(\mathbf{u}^{j+1}) = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{u}^{j+1}) \\ \psi_2(\mathbf{u}^{j+1}) \\ \vdots \\ \psi_N(\mathbf{u}^{j+1}) \end{bmatrix}$$

и

$$a_l(\mathbf{u}^{j+1}) = \frac{\partial \psi_l}{\partial u_{l-1}^{j+1}}, \quad l = 2(1)N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (29a)$$

$$2b_l(\mathbf{u}^{j+1}) = \frac{\partial \psi_l}{\partial u_l^{j+1}}, \quad l = 1(1)N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (29b)$$

$$c_l(\mathbf{u}^{j+1}) = \frac{\partial \psi_l}{\partial u_{l+1}^{j+1}}, \quad l = 1(1)N - 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (29в)$$

Тогда якобиан $\psi(\mathbf{u}^{j+1})$ можно записать как трехдиагональную матрицу N -го порядка:

$$\mathbf{T} \equiv \frac{\partial \psi(\mathbf{u}^{j+1})}{\partial \mathbf{u}^{j+1}} = \begin{bmatrix} 2b_1(\mathbf{u}^{j+1}) & c_1(\mathbf{u}^{j+1}) & & & \mathbf{0} \\ a_2(\mathbf{u}^{j+1}) & 2b_2(\mathbf{u}^{j+1}) & c_2(\mathbf{u}^{j+1}) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{N-1}(\mathbf{u}^{j+1}) & 2b_{N-1}(\mathbf{u}^{j+1}) & c_{N-1}(\mathbf{u}^{j+1}) \\ \mathbf{0} & & & & a_N(\mathbf{u}^{j+1}) & 2b_N(\mathbf{u}^{j+1}) \end{bmatrix}_{N \times N}. \quad (30)$$

Теперь, используя любую начальную аппроксимацию $(\mathbf{u}^{j+1})^{(0)}$, определим

$$(\mathbf{u}^{j+1})^{(s+1)} = (\mathbf{u}^{j+1})^{(s)} + \Delta(\mathbf{u}^{j+1})^{(s)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (31)$$

где $\Delta(\mathbf{u}^{j+1})^{(s)}$ — решение системы:

$$\mathbf{T}\Delta(\mathbf{u}^{j+1})^{(s)} = -\psi(\mathbf{u}^{j+1})^{(s)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots. \quad (32)$$

Для компактного ньютоновского метода AGE рассмотрим случай, когда N — нечетное. Разобьем матрицу \mathbf{T} следующим образом: $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$, где

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \overline{b_1} & & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{\begin{matrix} b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}} & & & \\ & & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & \overline{\begin{matrix} b_{N-1} & c_{N-1} \\ a_N & b_N \end{matrix}} & \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad (33)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \overline{\begin{matrix} b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}} & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} b_{N-2} & c_{N-2} \\ a_{N-1} & b_{N-1} \end{matrix}} & & \\ \mathbf{0} & & & & \overline{b_N} \end{bmatrix}_{N \times N}.$$

Таким образом, компактный ньютоновский метод AGE можно задать следующим образом:

$$(\mathbf{T}_2 + \omega_2 \mathbf{I})\Delta(\mathbf{u}^{j+1})^{(s+1)} = [\mathbf{I} - (\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{T}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}](\mathbf{T}_2 - \omega_1 \mathbf{I})\Delta(\mathbf{u}^{j+1})^{(s)} - (\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{T}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}\psi(\mathbf{u}^{j+1})^{(s)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots. \quad (34)$$

Здесь $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$ — параметры релаксации, а $(\mathbf{T}_1 + \omega_1 \mathbf{I})$ и $(\mathbf{T}_2 + \omega_2 \mathbf{I})$ — невырожденные матрицы. Поскольку $(\mathbf{T}_1 + \omega_1 \mathbf{I})$ и $(\mathbf{T}_2 + \omega_2 \mathbf{I})$ состоят из (2×2) подматриц, их легко можно обратить. Далее матрицы $(\mathbf{T}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{T}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{T}_2 - \omega_1 \mathbf{I})$ и $(\mathbf{T}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{T}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}$ можно рассчитать способом, подходящим для параллельных вычислений. Для сходимости компактного ньютоновского метода AGE достаточно, чтобы начальный вектор $(\mathbf{u}^{j+1})^{(0)}$ был близок к решению.

4.2. Сходимость компактного метода AGE

Компактный итерационный метод AGE задается следующим образом:

$$(\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I})\mathbf{u}^{(s+1)} = [\mathbf{I} - (\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{G}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}](\mathbf{G}_2 - \omega_1 \mathbf{I})\mathbf{u}^{(s)} + (\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{G}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}\boldsymbol{\gamma},$$

$$s = 0, 1, 2, \dots,$$

или

$$\mathbf{u}^{(s+1)} = \mathbf{T}_w \mathbf{u}^{(s)} + \boldsymbol{\gamma}_w, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\mathbf{T}_w = (\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1}[(\mathbf{G}_2 - \omega_1 \mathbf{I}) - (\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{G}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{G}_2 - \omega_1 \mathbf{I})]$$

и

$$\boldsymbol{\gamma}_w = (\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{G}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}\boldsymbol{\gamma}.$$

Матрица \mathbf{T}_w называется компактной итерационной матрицей AGE.

Чтобы доказать сходимость метода, нам нужно доказать, что $S(\mathbf{T}_w) \leq 1$, где $S(\mathbf{T}_w)$ обозначает спектральный радиус \mathbf{T}_w .

Лемма 1. Пусть $k \leq h$ и $\lambda = k/h^2 \leq 1/6\nu$, где $\nu = \text{Re}^{-1}$, Re — число Рейнольдса. Тогда все собственные значения \mathbf{G}_1 и \mathbf{G}_2 являются вещественными.

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned} a_l &= \frac{1}{12}(1 - 6\nu\lambda + \lambda P_1) + \frac{1}{12}(hQ_0 - \lambda P_2) \\ &= \frac{1}{12} \left[1 + \lambda \left\{ -6\nu + \frac{h^2}{2}(2B_{xl} - 2Q_0 B_l + C_l) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{h}{4}(12B_l + h^2(B_{xxl} - 2Q_0 B_{xl} + 2C_{xl} - 2Q_0 C_{xl})) \right\} + hQ_0 \right] \\ &= \frac{1}{12} [1 + \lambda\{-6\nu + O(h)\}] = \frac{1}{12} [1 - 6\nu\lambda + O(k/h)], \end{aligned}$$

таким образом, $a_l > 0$ для $k \leq h$ и $\lambda = k/h^2 \leq 1/6\nu$;

$$\begin{aligned} c_l &= \frac{1}{12}(1 - 6\nu\lambda + \lambda P_1) - \frac{1}{12}(hQ_0 - \lambda P_2) \\ &= \frac{1}{12} \left[1 + \lambda \left\{ -6\nu + \frac{h^2}{2}(2B_{xl} - 2Q_0 B_l + C_l) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{h}{4}(12B_l + h^2(B_{xxl} - 2Q_0 B_{xl} + 2C_{xl} - 2Q_0 C_{xl})) \right\} + hQ_0 \right] \\ &= \frac{1}{12} [1 + \lambda\{-6\nu + O(h)\}] = \frac{1}{12} [1 - 6\nu\lambda + O(k/h)], \end{aligned}$$

$c_l > 0$ для $k \leq h$ и $\lambda = k/h^2 \leq 1/6\nu$.

Поэтому мы имеем $a_{l+1}c_l > 0$ для $l = 1, 3, 5, \dots, N-1$.

Пусть λ_i , $i = 1, 2, \dots, N$, — собственные значения \mathbf{G}_1 . Тогда λ_i — корни квадратного уравнения

$$\lambda_i^2 - (b_i + b_{i+1})\lambda_i + (b_i b_{i+1} - a_{i+1} c_i) = 0. \quad (35)$$

Упростив это выражение, получим

$$\lambda_i = \frac{1}{2} \left[(b_i + b_{i+1}) \pm \sqrt{(b_i - b_{i+1})^2 + 4a_{i+1}c_i} \right]. \quad (36)$$

Определители этих квадратных уравнений следующие:

$$(b_i - b_{i+1})^2 + 4a_{i+1}c_i > 0, \quad i = 1, 3, 5, \dots, N - 1.$$

Следовательно, собственные значения G_1 являются вещественными.

Аналогичным образом можно показать, что собственные значения G_2 — вещественные. \square

Теперь введем условие, достаточное для сходимости компактного метода AGE.

Теорема 1. Пусть λ_i и μ_i , $i = 1, 2, \dots, N$, — собственные числа G_1 и G_2 соответственно. Если

$$\omega_1 > \max\{0, -\lambda_1, \dots, -\lambda_N\}, \quad (37)$$

$$\omega_2 > \max\{0, -\mu_1, \dots, -\mu_N\}, \quad (38)$$

$$\omega_2 - 2 \min_i \lambda_i < \omega_1 < \omega_2 + 2 \min_i \mu_i, \quad (39)$$

то компактный итерационный метод AGE сходится для системы (23).

Доказательство. Пусть $D = \text{diag}\left(1, \frac{c_1}{a_2}, \frac{c_1 c_2}{a_2 a_3}, \dots, \frac{c_1 c_2 \dots c_{N-1}}{a_2 a_3 \dots a_N}\right) \equiv \text{diag}(d_1, d_2, d_3, \dots, d_N)$.

Поскольку недиагональные элементы A положительны, имеем

$$a_{l+1}c_l > 0, \quad l = 1, 2, 3, \dots, N - 1.$$

Поэтому диагональные элементы D — положительные.

Компактная итерационная матрица AGE задается следующим образом:

$$\begin{aligned} T_w &= (G_2 + \omega_2 I)^{-1} [(G_2 - \omega_1 I) - (\omega_1 + \omega_2)(G_1 + \omega_1 I)^{-1}(G_2 - \omega_1 I)] \\ &= (G_2 + \omega_2 I)^{-1} [I - (\omega_1 + \omega_2)(G_1 + \omega_1 I)^{-1}](G_2 - \omega_1 I). \end{aligned}$$

Определим:

$$\begin{aligned} T_w^* &= (G_2 + \omega_2 I) T_w (G_2 + \omega_2 I)^{-1} \\ &= [I - (\omega_1 + \omega_2)(G_1 + \omega_1 I)^{-1}](G_2 - \omega_1 I)(G_2 + \omega_2 I)^{-1}, \\ D^{1/2} T_w^* D^{-1/2} &= [I - (\omega_1 + \omega_2)(\bar{G}_1 + \omega_1 I)^{-1}](\bar{G}_2 - \omega_1 I)(\bar{G}_2 + \omega_2 I)^{-1}, \end{aligned}$$

где $\bar{G}_1 = D^{1/2} G_1 D^{-1/2}$ и $\bar{G}_2 = D^{1/2} G_2 D^{-1/2}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{T}_w) &= \mathbf{S}(\mathbf{T}_w^*) = \mathbf{S}(\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{T}_w^*\mathbf{D}^{-1/2}) \leq \|\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{T}_w^*\mathbf{D}^{-1/2}\|_2 \\ &\leq \|\mathbf{I} - (\omega_1 + \omega_2)(\bar{\mathbf{G}}_1 + \omega_1\mathbf{I})^{-1}\|_2 \|(\bar{\mathbf{G}}_2 - \omega_1\mathbf{I})(\bar{\mathbf{G}}_2 + \omega_2\mathbf{I})^{-1}\|_2. \end{aligned}$$

Легко убедиться в том, что $\bar{\mathbf{G}}_1$ и $\bar{\mathbf{G}}_2$ симметричны. Поэтому матрицы $(\bar{\mathbf{G}}_2 - \omega_1\mathbf{I}) \times (\bar{\mathbf{G}}_2 + \omega_2\mathbf{I})^{-1}$ и $[\mathbf{I} - (\omega_1 + \omega_2)(\bar{\mathbf{G}}_1 + \omega_1\mathbf{I})^{-1}]$ тоже симметричны. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|(\bar{\mathbf{G}}_2 - \omega_1\mathbf{I})(\bar{\mathbf{G}}_2 + \omega_2\mathbf{I})^{-1}\|_2 &= \max_{\mu_i \in \sigma(\bar{\mathbf{G}}_2)} \left| \frac{\mu_i - \omega_1}{\mu_i + \omega_2} \right|, \\ \|[\mathbf{I} - (\omega_1 + \omega_2)(\bar{\mathbf{G}}_1 + \omega_1\mathbf{I})^{-1}]\|_2 &= \|[(\bar{\mathbf{G}}_1 + \omega_1\mathbf{I})(\bar{\mathbf{G}}_1 + \omega_1\mathbf{I})^{-1} - (\omega_1 + \omega_2)(\bar{\mathbf{G}}_1 + \omega_1\mathbf{I})^{-1}]\|_2 \\ &= \|[(\bar{\mathbf{G}}_1 - \omega_2\mathbf{I})][(\bar{\mathbf{G}}_1 + \omega_1\mathbf{I})^{-1}]\|_2. \end{aligned}$$

Кроме того, $(\bar{\mathbf{G}}_1 - \omega_2\mathbf{I})(\bar{\mathbf{G}}_1 + \omega_1\mathbf{I})^{-1}$ симметрична. Поэтому

$$\|(\bar{\mathbf{G}}_1 - \omega_2\mathbf{I})(\bar{\mathbf{G}}_1 + \omega_1\mathbf{I})^{-1}\|_2 = \max_{\lambda_i \in \sigma(\bar{\mathbf{G}}_1)} \left| \frac{\lambda_i - \omega_2}{\lambda_i + \omega_1} \right|.$$

Мы имеем

$$\mathbf{S}(\mathbf{T}_w) \leq \max_{\lambda_i \in \sigma(\bar{\mathbf{G}}_1)} \left| \frac{\lambda_i - \omega_2}{\lambda_i + \omega_1} \right| \max_{\mu_i \in \sigma(\bar{\mathbf{G}}_2)} \left| \frac{\mu_i - \omega_1}{\mu_i + \omega_2} \right|.$$

Из уравнений (37), (38) имеем $\omega_1, \omega_2 > 0$ и $\lambda_i + \omega_1 > 0$ для $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Следовательно,

$$\frac{\lambda_i - \omega_2}{\lambda_i + \omega_1} < 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Кроме того, из (39) получим

$$\begin{aligned} \omega_2 &< \omega_1 + 2 \min_i \lambda_i < \omega_1 + 2\lambda_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \\ -1 &< \frac{\lambda_i - \omega_2}{\lambda_i + \omega_1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N. \end{aligned}$$

Мы можем заключить, что $\left| \frac{\lambda_i - \omega_2}{\lambda_i + \omega_1} \right| < 1, i = 1, 2, 3, \dots, N$.

Таким образом, $\max_{\lambda_i \in \sigma(\bar{\mathbf{G}}_1)} \left| \frac{\lambda_i - \omega_2}{\lambda_i + \omega_1} \right| < 1$.

Аналогичным образом мы можем доказать, что $\max_{\mu_i \in \sigma(\bar{\mathbf{G}}_2)} \left| \frac{\mu_i - \omega_1}{\mu_i + \omega_2} \right| < 1$. Следовательно, $\mathbf{S}(\mathbf{T}_w) < 1$.

Отсюда следует сходимость компактного метода AGE (27). \square

5. Примеры

Мы решили три задачи для иллюстрации предлагаемых компактных итерационных методов и демонстрации их вычислительной сходимости. Точные решения этих задач известны. Функции в правой части, начальные и краевые условия могут быть получены с использованием точных решений. Мы также сравнили предложенный компактный метод AGE с соответствующим методом AGE с двойной прогонкой (см. [2, 5, 6]). При решении нелинейных уравнений мы рассматривали только пять внутренних итераций. Во

всех случаях $(\mathbf{u}^{j+1})^{(0)} = 0$, и итерации были прекращены, когда был достигнут допуск ошибки. Для простоты в вычислениях $|(\mathbf{u}^{j+1})^{(s+1)} - (\mathbf{u}^{j+1})^{(s)}| \leq 10^{-10}$. Все вычисления выполнялись с использованием программного обеспечения MATLAB.

Пример 1. Рассмотрим уравнение (14), точное решение которого

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\nu t}} \exp\left(\frac{-(x - \eta t)^2}{2(1 + 2\nu t)}\right).$$

Среднеквадратичные (СК) ошибки, число итераций и время ЦПУ для компактного метода AGE и метода AGE с двойной прогонкой приведены в табл. 1 для фиксированных $k = 0.01$, $\eta = 10$ и малых значений ν .

Таблица 1

h^{-1}	Метод AGE			Компактный метод AGE			Ошибки
	ω_{opt}	Итерации	Время ЦПУ, с	ω_{opt}	Итерации	Время ЦПУ, с	СК
$\nu = 0.002$							
10	21.11	06	0.211	20.81	05	0.146	$0.17497 \cdot 10^{-5}$
20	13.67	13	0.240	08.76	11	0.213	$0.16899 \cdot 10^{-7}$
30	50.10	17	0.367	59.86	06	0.319	$0.26360 \cdot 10^{-8}$
40	09.80	23	0.285	08.77	20	0.223	$0.72841 \cdot 10^{-8}$
50	11.61	26	0.328	13.20	13	0.207	$0.97704 \cdot 10^{-8}$
60	09.10	32	0.348	09.80	15	0.296	$0.95141 \cdot 10^{-8}$
$\nu = 0.001$							
10	41.65	06	0.404	41.39	05	0.174	$0.3268 \cdot 10^{-5}$
20	25.55	16	0.367	21.00	11	0.176	$0.7988 \cdot 10^{-6}$
30	21.51	24	0.515	14.18	16	0.196	$0.7784 \cdot 10^{-7}$
40	19.55	32	0.661	11.10	21	0.222	$0.4822 \cdot 10^{-7}$
50	17.71	37	0.360	09.68	24	0.229	$0.2333 \cdot 10^{-7}$
60	17.29	42	0.411	13.00	29	0.198	$0.2009 \cdot 10^{-7}$

Пример 2 (Уравнение Бюргерса).

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0. \quad (40)$$

Уравнение Бюргерса (40) решается с использованием схемы (21) (где $\alpha = f = 0$), точное решение которого задается так:

$$u(x, t) = \frac{2v\pi \sin(\pi x) e^{-v\pi^2 t}}{2 + \cos(\pi x) e^{-v\pi^2 t}}.$$

СК ошибки, число итераций и время ЦПУ для компактного ньютоновского метода AGE и ньютоновского метода AGE приведены в табл. 2а и табл. 2б при $t = 1.0$ для фиксированного $k = 0.01$ и различных значений v . График численных данных для $v = 0.01$ и $N = 69$ приведен на рисунке.

Таблица 2а

h^{-1}	Ньютоновский метод AGE			Компактный ньютоновский метод AGE			Ошибки
	ω_{opt}	Итерации	Время ЦПУ, с	ω_{opt}	Итерации	Время ЦПУ, с	СК
$v = 0.1$							
50	3.69	06	0.409	2.30	05	0.267	$0.9491 \cdot 10^{-6}$
60	4.41	07	0.343	2.65	06	0.327	$0.9476 \cdot 10^{-6}$
70	5.94	08	0.544	5.88	06	0.345	$0.9464 \cdot 10^{-6}$
80	6.80	09	0.505	6.60	07	0.395	$0.9456 \cdot 10^{-6}$
90	7.66	11	0.625	7.37	08	0.404	$0.9450 \cdot 10^{-6}$
$v = 0.01$							
50	0.62	03	0.324	0.27	03	0.257	$0.2837 \cdot 10^{-8}$
60	0.64	03	0.351	0.30	03	0.243	$0.9417 \cdot 10^{-9}$
70	0.67	03	0.369	0.35	03	0.280	$0.5606 \cdot 10^{-9}$
80	0.69	03	0.307	0.40	03	0.230	$0.7564 \cdot 10^{-9}$
90	0.73	03	0.291	0.46	03	0.227	$0.9224 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2б

h^{-1}	Ньютоновский метод AGE			Компактный ньютоновский метод AGE			Ошибки
	ω_{opt}	Итерации	Время ЦПУ, с	ω_{opt}	Итерации	Время ЦПУ, с	СК
$Re = 10$							
10	0.46	09	0.572	0.29	07	0.408	$0.8947 \cdot 10^{-5}$
20	0.41	09	1.162	0.27	07	0.783	$0.5434 \cdot 10^{-6}$
40	0.39	09	2.243	0.26	07	1.621	$0.3372 \cdot 10^{-7}$
80	0.38	09	4.132	0.25	07	3.044	$0.2104 \cdot 10^{-8}$
$Re = 10^2$							
10	0.34	12	0.642	0.23	09	0.466	$0.6771 \cdot 10^{-5}$
20	0.32	14	1.389	0.22	11	0.933	$0.4039 \cdot 10^{-6}$
40	0.28	14	2.662	0.19	11	1.981	$0.2519 \cdot 10^{-7}$
80	0.27	14	4.618	0.19	11	3.355	$0.1582 \cdot 10^{-8}$
$Re = 10^3$							
10	0.29	12	0.740	0.20	08	0.522	$0.1709 \cdot 10^{-6}$
20	0.27	13	1.682	0.18	10	1.217	$0.1030 \cdot 10^{-7}$
40	0.25	13	3.267	0.16	10	2.392	$0.6352 \cdot 10^{-9}$
80	0.24	13	5.282	0.15	10	4.014	$0.3956 \cdot 10^{-10}$
$Re = 10^4$							
10	0.25	12	0.984	0.17	08	0.743	$0.1917 \cdot 10^{-8}$
20	0.24	12	1.966	0.16	10	1.487	$0.1160 \cdot 10^{-9}$
40	0.23	12	3.882	0.15	10	2.973	$0.7155 \cdot 10^{-11}$
80	0.22	13	5.924	0.15	10	4.521	$0.4471 \cdot 10^{-12}$

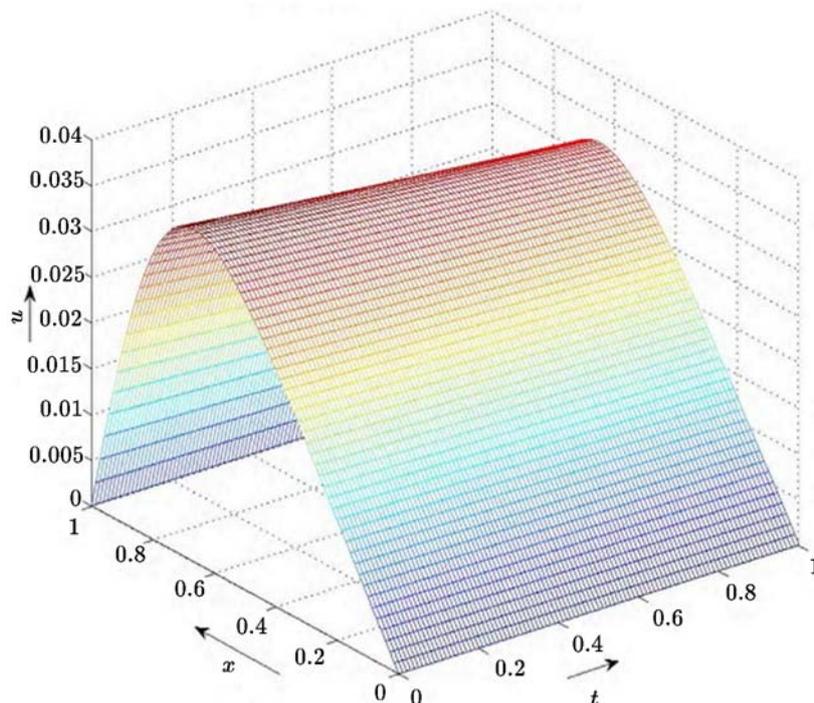


Рис. Численные решения для примера 2, $N = 69$, $\nu = 0.01$

Пример 3 (Уравнение Бюргера в полярных координатах).

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\alpha}{r^2} u \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + f(r, t), \quad 0 < r < 1, \quad t > 0. \quad (41)$$

Уравнение Бюргера (41) в полярных координатах решается с использованием схемы (21). Заменяя x на r и подставив $\alpha = 1$ и 2 в разностное уравнение (21), мы получим двухуровневое нелинейное разностное уравнение для численного решения уравнения (41). Уравнение решается с точным решением, задаваемым как $u(x, t) = e^{-t} \cos(r)$.

СК ошибки, число итераций и время ЦПУ для компактного ньютоновского метода AGE и ньютоновского метода AGE приведены в табл. 3 при $t = 1.0$ для фиксированных $k = 0.01$, $\alpha = 1, 2$ и различных значений $\text{Re} = \nu^{-1}$.

Скорость сходимости можно получить с использованием формулы

$$\frac{\log(e_{h_1}) - \log(e_{h_2})}{\log(h_1) - \log(h_2)},$$

где e_{h_1} и e_{h_2} — максимальные абсолютные (МА) ошибки для двух значений ширины однородной сетки: h_1 и h_2 соответственно. Чтобы рассчитать порядок сходимости предлагаемого метода, мы брали $h_1 = 1/40$ и $h_2 = 1/80$ для всех случаев. Результаты приведены в табл. 4.

Таблица 3

h^{-1}	Ньютоновский метод AGE			Компактный ньютоновский метод AGE			Ошибки
	ω_{opt}	Итерации	Время ЦПУ, с	ω_{opt}	Итерации	Время ЦПУ, с	СК
$\alpha = 1, \text{Re} = 10$							
10	1.37	09	1.122	1.07	07	0.825	$0.1432 \cdot 10^{-4}$
20	1.20	10	2.364	0.87	08	1.772	$0.9761 \cdot 10^{-6}$
40	0.92	10	4.524	0.76	08	3.320	$0.6328 \cdot 10^{-7}$
80	0.88	10	8.296	0.65	08	6.121	$0.4024 \cdot 10^{-8}$
$\alpha = 1, \text{Re} = 10^2$							
10	1.55	12	1.348	1.32	09	0.985	$0.1240 \cdot 10^{-4}$
20	1.42	12	2.877	1.03	09	1.904	$0.6561 \cdot 10^{-6}$
40	1.28	13	5.332	0.89	10	4.142	$0.5556 \cdot 10^{-7}$
80	1.21	14	9.207	0.81	10	7.119	$0.3490 \cdot 10^{-8}$
$\alpha = 2, \text{Re} = 10$							
10	2.19	10	0.740	1.83	07	0.522	$0.1884 \cdot 10^{-4}$
20	1.88	10	1.682	1.51	07	1.217	$0.1197 \cdot 10^{-5}$
40	1.75	10	3.267	1.27	07	2.392	$0.7524 \cdot 10^{-7}$
80	1.54	11	5.282	1.14	08	4.014	$0.4715 \cdot 10^{-8}$
$\alpha = 2, \text{Re} = 10^2$							
10	2.84	11	1.883	2.22	08	1.312	$0.1214 \cdot 10^{-4}$
20	2.33	11	2.912	1.88	08	2.183	$0.1095 \cdot 10^{-5}$
40	2.18	13	7.651	1.61	09	5.871	$0.7466 \cdot 10^{-7}$
80	1.93	15	11.720	1.37	11	8.779	$0.4672 \cdot 10^{-8}$

Таблица 4

Пример 1		Пример 3	
Параметры	Порядок	Параметры	Порядок
$\nu = 0.1$	4.00	$\alpha = 1, \nu = 0.1$	3.98
$\nu = 0.01$	3.99	$\alpha = 1, \nu = 0.01$	3.99
$\nu = 0.001$	4.00	$\alpha = 2, \nu = 0.1$	3.99
$\nu = 0.0001$	4.00	$\alpha = 2, \nu = 0.01$	3.99

6. Обсуждение и выводы

Проведено сравнение времени ЦПУ и числа итераций компактного метода AGE с одной прогонкой с такими же параметрами стандартного метода AGE с двойной прогонкой. Временной шаг $k = 1/100$. Таким образом, чтобы достичь $t = 1$, нам пришлось пройти 100 временных шагов и использовать итерационный метод на каждом временном шаге. Время ЦПУ, указанное в таблицах, — это общее время для достижения $t = 1$, начиная с $t = 0$ и вычисляя ошибку на каждом временном шаге. Мы вычислили СК ошибки, число итераций и время ЦПУ для различных значений N и т. д. при $t = 1.0$. При $t = 1.0$ пусть u_l и U_l будут приближенным и точным решениями u в точке сетки x_l . Предположим, что $\epsilon_l = u_l - U_l$ — ошибка при x_l (при отсутствии ошибок округления) при $t = 1.0$. Тогда СК ошибка = $\left(\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \epsilon_l^2 \right)^{1/2}$. СК ошибки вычисляются на каждом временном шаге. Мы, однако, приводим результаты при $t = 1.0$. Поскольку мы делаем вычисления для обычного численного метода с использованием как метода AGE, так и компактного метода AGE, СК ошибки для них одни и те же. Сравним число итераций и

время ЦПУ для AGE и компактного метода AGE. Численные результаты показывают, что для компактного метода AGE требуется примерно на 20% меньше времени ЦПУ, чем для метода AGE.

В данной статье, с использованием трех пространственных точек сетки, рассмотрен компактный метод AGE и компактный ньютоновский итерационный метод AGE на основе разностной схемы с точностью $O(k^2 + h^4)$ для численного решения уравнения Бюргера и уравнения теплопроводности в полярных координатах. Предложенные методы превосходят соответствующие методы AGE с двойной прогонкой по числу итераций и времени ЦПУ, необходимых для достижения такой же точности. Кроме того, подробно обсуждалась сходимость предложенного метода и было показано, что итерационный метод сходится при больших числах Рейнольдса.

Литература

1. **Mohanty R.K.** An $O(k^2 + h^4)$ finite difference method for one-space Burgers' equation in polar coordinates // Numer. Meth. Partial Diff. Eq.—1996.— Vol. 12.— P. 579–583.
2. **Mohanty R.K., Evans D.J.** Alternating group explicit parallel algorithms for the solution of one-space dimensional non-linear singular parabolic equations using an $O(k^2 + h^4)$ difference method // Int. J. Comput. Math.—2005.— Vol. 82.— P. 203–218.
3. **Evans D.J., Sahimi M.S.** The alternating group explicit (AGE) iterative method for solving parabolic equations, 1-2 dimensional problems // Int. J. Comput. Math.—1988.— Vol. 24.— P. 250–281.
4. **Mohanty R.K., Jain M.K., and Kumar D.** Single cell finite difference approximations of $O(kh^2 + h^4)$ for $(\partial u / \partial n)$ for one space dimensional nonlinear parabolic equation // Numer. Meth. Partial Diff. Eq.—2000.— Vol. 16.— P. 408–415.
5. **Evans D.J., Mohanty R.K.** Alternating group explicit method for the numerical solution of non-linear singular two-point boundary value problems using a fourth order finite difference method // Int. J. Comput. Math.—2002.— Vol. 79, № 10.— P. 1121–1133.
6. **Evans D.J.** Iterative methods for solving non-linear two point boundary value problems // Int. J. Comput. Math.—1999.— Vol. 72.— P. 395–401.
7. **Smith G.D.** Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods.— Oxford: Clarendon Press, 1996.
8. **Hopf E.** The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math.—1950.— Vol. 3.— P. 201–230.
9. **Aksan E.N., Ozdes A.** A numerical solution of Burgers solution // Appl. Math. Comput.—2004.— Vol. 156.— P. 395–402.
10. **Evans D.J., Abdullah A.R.** The group explicit method for the solution of Burger's equation // Computing.—1984.— Vol. 32.— P. 239–253.
11. **Ozis T., Ozdes A.** A direct variational method applied to Burgers' equation // J. Comput. Appl. Math.—1996.— Vol. 71.— P. 163–175.
12. **Ozis T., Aksan E.N., and Ozdes A.** A finite element approach for solution of Burgers' equation // Appl. Math. Comput.—2003.— Vol. 139.— P. 417–428.
13. **Mittal R.C., Singhal P.** Numerical solution of Burger's equation // Communications in Numerical Methods in Engineering.—1993.— Vol. 9.— P. 397–406.
14. **Salkuyeh D.K., Sharafeh F.S.** On the numerical solution of the Burgers's equation // Int. J. Comput. Math.—2009.— Vol. 86, № 8.— P. 1334–1344.

15. **Hon Y.C., Mao X.Z.** An efficient numerical scheme for Burgers' equation // Appl. Math. Comput. — 1998. — Vol. 95. — P. 37–50.
16. **Burger J.M.** A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Adv. Appl. Math. — 1947. — № 1. — P. 171–179.
17. **Kadalbajoo M.K., Awasthi A.** A numerical method based on Crank–Nicolson scheme for Burgers' equation // Appl. Math. Comput. — 2006. — Vol. 182. — P. 1430–1442.
18. **Aksan E.N.** A numerical solution of Burgers' equation by finite element method constructed on the method of discretization in time // Appl. Math. Comput. — 2005. — Vol. 170, iss. 2. — P. 895–904.
19. **Khalifa A.K., Noor K.I., and Noor M.A.** Some numerical methods for solving Burgers' equation // Int. J. of the Physical Sciences. — 2011. — Vol. 6, № 7. — P. 1702–1710 .

*Поступила в редакцию 8 августа 2014 г.,
в окончательном варианте 8 января 2015 г.*

