

РАЗВИТИЕ ЛИНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ В БРУСЕ ПРИ ИЗГИБЕ

В. И. Крамаренко

(Новосибирск)

В работе [1] введено понятие L -пластического материала — материала, который удовлетворяет накладываемым граничным условиям не только путем образования пластических областей, но и скольжения по отдельным поверхностям. Вариационные постановки краевых задач рассмотрены в [2]. Ниже в рамках этих постановок решается задача о плоском изгибе бруса,

Примем, что в деформируемом материале есть потенциальная линия скольжения, рассекающая брус на две части (фиг. 1). Положение линии и ее вид считаются известными (полуобратная постановка): линия L — прямая, проходящая через центр бруса под углом $\pi/4$ к его продольной оси. Предположим, что материал вне линии скольжения деформируется линейно-упруго. На линии предполагается непрерывность нормальной компоненты вектора перемещений

$$(1) \quad v_1 - u_1 = v_2 - u_2,$$

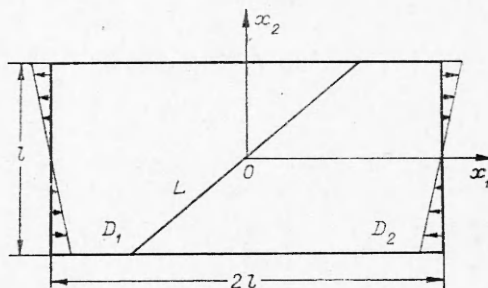
где v_1, v_2, u_1, u_2 — компоненты векторов перемещений в областях справа и слева от линии L (эти области обозначим D_2 и D_1). Величину разрыва касательной компоненты вектора перемещения (проскальзывание) обозначим через R

$$R = (v_1 - u_1)\sqrt{2}/2 + (v_2 - u_2)\sqrt{2}/2.$$

Примем, что на тех участках линии скольжения, где имеет место проскальзывание, касательное напряжение τ зависит только от величины проскальзывания

$$(2) \quad \tau = f(R).$$

На участках, где проскальзывания отсутствуют — линия L не функционирует, сохраняется упругое состояние материала. Экспериментальные данные показывают, что кривая $f(R)$ может иметь участок падения ($f'(R) < 0$). Развитие линии скольжения для таких материалов может носить как устойчивый, так и неустойчивый характер. Под устойчивостью развития понимаются малые приращения проскальзываний и удлинение участков скольжения при малом приращении параметра нагружения. Неустойчивость роста линии скольжения проявляется в скачкообразном возрастании проскальзываний и длин участков скольжения при малом увеличении



Ф и г. 1

параметра нагружения. Динамические эффекты, возникающие при скачкообразном развитии линии скольжения из одного устойчивого состояния в другое, не рассматриваются. Предположим, что поверхности бруса $x_2 = \pm l/2$ свободны от напряжений; на торцах бруса касательные напряжения отсутствуют, и заданы нормальные к поверхности перемещения

$$(3) \quad \begin{aligned} u_1 &= -\Omega x_2 \text{ при } x_1 = -l, -l/2 \leq x_2 \leq l/2, \\ v_1 &= \Omega x_2 \text{ при } x_1 = l, -l/2 \leq x_2 \leq l/2, \end{aligned}$$

где x_1, x_2 — декартовы координаты; Ω — параметр нагружения.

Введем функционал полной «потенциальной» энергии [2]. Для заданных граничных условий относительно напряжений функционал принимает вид

$$(4) \quad \Phi[u_1, u_2, v_1, v_2] = \frac{1}{2} E \int_{D_1} \psi_1 dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} E_1 \int_{D_2} \psi_2 dx_1 dx_2 - \int_L U ds,$$

где $\psi_1 = a_1(u_{1,1}^2 + u_{2,2}^2) + a_2 u_{1,1} u_{2,2} + a_3(u_{1,2} + u_{2,1})^2$; $\psi_2 = a_1(v_{1,1}^2 + v_{2,2}^2) + a_2 v_{1,1} v_{2,2} + a_3(v_{1,2} + v_{2,1})^2$; $a_1 = (1 - \nu)/((1 + \nu)(1 - 2\nu))$, $a_2 = 2\nu/((1 + \nu)(1 - 2\nu))$, $a_3 = 1/(2 + 2\nu)$ в случае плоской деформации; $a_1 = 1/(1 - \nu^2)$, $a_2 = 2\nu/(1 - \nu^2)$, $a_3 = 1/(2 + 2\nu)$ в случае плоского напряженного состояния;

$U = \int_0^R f(R) dR$ — диссипация энергии на единице длины линии скольжения; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона. Для решения

поставленной задачи воспользуемся вариационным принципом минимума полной «потенциальной» энергии [2]. Согласно этому принципу, действительные перемещения доставляют минимум функционалу (4) по отношению ко всем кинематически возможным перемещениям (1), (3). При этом требование стационарности функционала Φ при условии (1) обеспечивает непрерывность на линии возможного скольжения нормальной и касательной компонент тензора напряжений. Таким образом, задача сводится к минимизации функционала (4) при условии непрерывности (1) и граничных условиях (3). Задача решается численно методом прямой минимизации функционала — методом локальных вариаций [3]. Введем безразмерные переменные: $\sigma_{ij}l/(\nu E)$, R/ν , x_1/l , x_2/l , u_i/ν , v_i/ν ($i, j = 1, 2$) (l — ширина бруса, ν — характерное смещение), которые будем обозначать так же, как и размерные. Выберем квадратную разностную сетку на рассматриваемой области так, чтобы линия L пересекала ее только в узлах (шаг сетки Δx должен укладываться целое число раз на отрезке $l/2$). При этом в каждой точке пересечения сетки с линией скольжения определяются два сеточных узла: один узел отнесен к области D_1 , другой — к области D_2 . В результате такого разбиения получим треугольные ячейки вдоль линии L и квадратные — в остальной области. Обозначим квадратные ячейки символом N_{ij} , треугольные ячейки из области D_1 — символом P_{ij} , из области D_2 — символом Q_{ij} (i, j — координаты левой нижней вершины для данной ячейки). Интегралы (4) по областям D_1 и D_2 заменяются суммами

$$\int_{D_1} \psi_1 dx_1 dx_2 \approx \sum_{k,l} I_{kl}, \quad \int_{D_2} \psi_2 dx_1 dx_2 \approx \sum_{m,n} J_{mn},$$

где $I_{kl} = \int_{P_{kl}} H\psi_1((u_{p,q})_*)$ ($p, q = 1, 2$) — значение интеграла по ячейке

$N_{kl}(P_{kl})$ области D_1 ; $J_{mn} = H\psi_2(v_{p,q})_*$ ($p, q = 1, 2$) — значение интеграла по ячейке $N_{mn}(Q_{mn})$ области D_2 ; $H = \begin{cases} (\Delta x)^2 & \text{для } N_{kl}(N_{mn}), \\ (\Delta x)^2/2 & \text{для } P_{kl}(Q_{mn}) \end{cases}$ — площадь ячейки; индекс* означает взятие среднего значения соответствующей величины в ячейке: $(u_{1,1})_* = (u_{1m+1n} - u_{1mn})/\Delta x$, $(u_{1,2})_* = (u_{1m+1n+1} - u_{1m+1n})/\Delta x$ для ячейки Q_{mn} ; $(u_{1,1})_* = (u_{1kl+1l+1} - u_{1kl+1l})/\Delta x$, $(u_{1,2})_* = (u_{1kl+1l+1} - u_{1kl+1l})/\Delta x$ для ячейки P_{kl} ; $(u_{1,1})_* = (u_{1i+1j+1} - u_{1ij+1} + u_{1i+1j} - u_{1ij})/(2\Delta x)$, $(u_{1,2})_* = (u_{1i+1j+1} - u_{1i+1j} + u_{1ij+1} - u_{1ij})/(2\Delta x)$ для ячейки N_{ij} . Средние значения производных компонент вектора перемещений u_2, v_1, v_2 вычисляются аналогично. Величина диссипации энергии на линии скольжения аппроксимируется следующим образом:

$$\int_L U ds \approx \sum_{i,j} SU(R_{ij}),$$

где $S = \Delta x/\sqrt{2}$ в крайних узлах линии и $S = \Delta x\sqrt{2}$ в остальных узлах; значение $U(R_{ij})$, где R_{ij} — проскальзывание в узле с координатами (i, j) , определяется по диаграмме (2).

С целью уменьшения значения функционала в каждом узле перемещения $u_{1ij}, u_{2ij}, v_{1mn}, v_{2mn}$ варьируются с фиксированным шагом варьирования. На линии скольжения варьирование компонент вектора перемещения подчинено условию непрерывности (1). Для исходного значения параметра нагружения $\Omega^0 > 0$ перед началом процесса варьирования задается начальное приближение — нулевое. Итерации считаются законченными, если во всех узлах сетки дальнейшее изменение компонент вектора перемещения с данным шагом варьирования не уменьшает значения функционала. Варьирование на данной сетке заканчивается при уменьшении шага варьирования до заданного значения. Для ускорения процесса сходимости применяется дробление сетки. При переходе с одной сетки на другую шаг сетки Δx уменьшается вдвое. Начальным приближением на вновь полученной более мелкой сетке является линейно-интерполируемое для новых узлов решение с предыдущей сетки. При следующем значении параметра нагружения в качестве начального приближения задается решение, полученное на предыдущем шаге. Поскольку варьирование при заданном Ω начинается на грубой сетке, решение с предыдущего шага предварительно «сжимается» с мелкой сетки на начальную грубую сетку. Число шагов нагружения определяется заданием конечного значения параметра нагружения Ω_k .

По описанному алгоритму составлена программа на языке ФОРТРАН. Расчеты проведены на ЭВМ БЭСМ-6. Размеры начальной сетки 5×11 узлов, конечной 17×35 узлов.

Значения параметров выбирались следующие: $\Omega^0 = 0 - 0,14$, $\Delta\Omega = 0,002 - 0,02$, $\Omega_k = 0,2$. Варьирование компонент вектора перемещения прекращалось, как только шаг варьирования становился меньше $2 \cdot 10^{-6}$. При этом значение функционала устанавливается в третьей значащей цифре. В качестве проверочного варианта решалась задача одноосного растяжения бруса с различными диаграммами $f(R)$, допускающими участки упрочнения и разупрочнения. Полученные решения отличаются от точного не более чем на 0,8%. Решение задачи об изгибе бруса для упрочняющегося материала ($f'(R) > 0$) показывает, что участки проскальзывания возникают на концах линии L и с увеличением Ω «прорастают» к центру бруса. Увеличение длин участков скольжения и самих проскальзываний R по параметру нагружения происходит всегда монотонно. Рассмотрим подробнее случай, когда на линии скольжения материал разупрочняется,

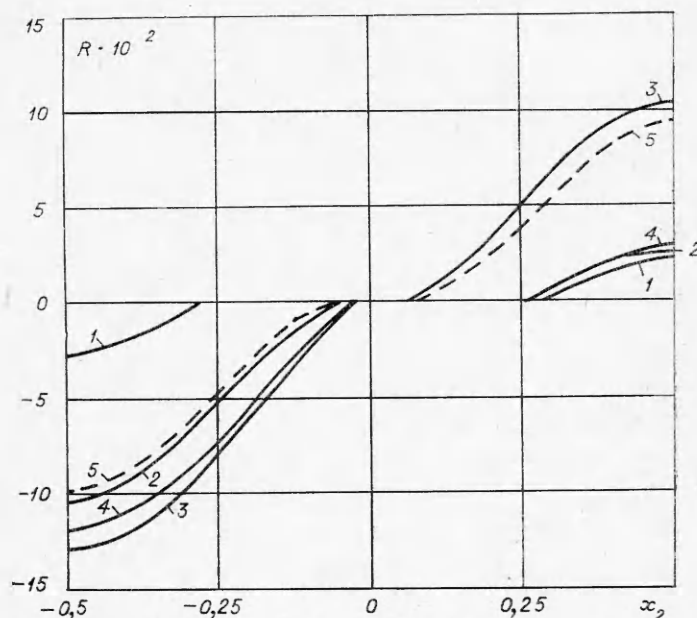
т. е. с возрастанием проскальзывания R силы сцепления берегов линии скольжения падают. Ограничимся линейной аппроксимацией кривой $f(R)$:

$$(5) \quad f(R) = \begin{cases} \tau_s - \eta R & \text{при } 0 < R \leq R_{*} \\ 0 & \text{при } R > R_{*} \end{cases}$$

где $R_{*} = \tau_s/\eta$; $\eta > 0$ — наклон участка падения; τ_s — безразмерный предел прочности материала при сдвиге. Отметим, что рассматриваемый алгоритм решения может быть применен для функций f любого вида и для произвольных значений перемещений. Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $\tau_s = 0,025$, $\nu = 0,3$, $\nu = 0,05$, $E = 1$, $l = 1$. Величина η изменялась в пределах от 1,25 до 0,19. При переходе к размерным величинам это равносильно решению задачи с различными наклонами диаграммы $\tau - R$, различными упругими свойствами материала и размерами образца. Рассмотрим деформирование бруса при активном нагружении последовательными шагами $\Delta\Omega > 0$ по параметру нагружения Ω с начального значения Ω^0 до конечного значения Ω_k . Расчеты показывают следующее. При $0 < \Omega < \Omega_l$ касательное напряжение на линии возможного скольжения не превосходит предела τ_s , и брус в целом деформируется упруго ($\Omega_l = 0,1$ при указанном выше значении τ_s). Как только $\Omega > \Omega_l$, на концах линии скольжения появляются участки проскальзываний. При дальнейшем возрастании Ω проскальзывания и длины участков скольжения растут устойчиво и симметрично относительно центра бруса. Если наклон кривой (5) достаточно мал ($\eta < \eta_{*} = 0,375$), линия скольжения продолжает развиваться устойчиво и симметрично при возрастании Ω вплоть до Ω_k . Если же $\eta > \eta_{*}$, то при некотором значении $\Omega = \Omega_1$ развитие линии скольжения теряет устойчивость: при малом увеличении Ω от $\Omega = \Omega_1$ на линии скольжения увеличение длины одного из двух участков скольжения происходит скачком. Длина другого участка не возрастает.

Таким образом, симметричный характер развития линии скольжения нарушается, т. е. при возникновении неустойчивости развития линии скольжения само условие симметрии становится неустойчивым. Дальнейшее увеличение параметра нагружения $\Omega > \Omega_1$ вызывает устойчивый рост проскальзываний и длин участков скольжения при сохранении возникшей несимметрии развития линии. Однако при некотором значении $\Omega = \Omega_2$ развитие линии скольжения вновь приобретает неустойчивый характер: происходит увеличение скачком длины и проскальзываний другого участка скольжения линии L . В результате этого скачка длины участков скольжения и возникающие на них проскальзывания выравниваются. При увеличении Ω от $\Omega = \Omega_2$ до $\Omega = \Omega_k$ линия скольжения сохраняет устойчивый и симметричный характер развития. Отметим, что для значений η , близких к критическому η_{*} , величины скачков проскальзываний и скачков длин участков скольжения малы и второй скачок в развитии линии может отсутствовать. Выше отмечалось, что при $\Omega > \Omega_1$ симметрия роста участков скольжения нарушается. Можно, однако, ожидать, что при $\Omega > \Omega_1$ в принципе возможен и другой путь развития линии скольжения, когда скачок происходит не на одном, а на обоих участках скольжения и симметрия развития линии не нарушается. Таким образом, точка $\Omega = \Omega_1$ является точкой бифуркации решения, т. е. при $\Omega > \Omega_1$ функционал имеет два локальных минимума, разделенных, как показывает счет, достаточно высоким «барьером». Решение при некотором параметре нагружения $\Omega' > \Omega_1$ можно получать двумя способами. Первый способ состоит в том, что задача решается сначала для некоторого значения Ω^0 , близкого к нулю, затем для $\Omega^0 + \Delta\Omega$ и т. д. При этом в качестве начального приближения всегда используется решение с предыдущего шага. Этот путь в силу погреш-

ностей счета, которые в данном случае играют роль малых реальных возмущений, всегда приводит к минимуму, соответствующему несимметричному развитию линии. Второй способ решения заключается в том, что в качестве начального значения Ω^0 сразу принимается $\Omega' > \Omega_1$. В этом случае исходная точка (нулевое приближение) лежит «одинаково далеко»



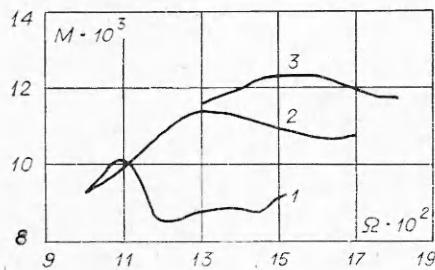
Ф и г. 2

от обоих минимумов, и поэтому можно ожидать, что путь, который будет пройден в итерациях, может привести и ко второму минимуму, соответствующему симметричному решению. Одно из таких решений приведено на фиг. 2. Следует отметить, что в реальном процессе нагружения значение параметра нагружения $\Omega = \Omega'$ достигается постепенным увеличением Ω от 0 до Ω' при $\Delta\Omega \rightarrow 0$. Поэтому действительный смысл имеет только решение, полученное первым способом — несимметричное решение. Второе (симметричное) решение возможно только теоретически.

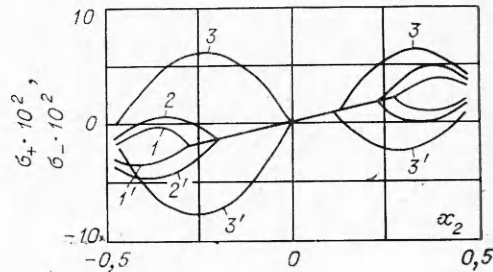
На фиг. 2 приведены также кривые распределения проскальзываний вдоль линии скольжения при различных Ω и $\eta = 0,625$. Кривые 1—3 соответствуют случаю несимметричного развития при $\Omega^0 = 0,1$, $\Delta\Omega = 0,005$ и значениях $\Omega = 0,125$; $0,130$; $0,150$, кривые 4 и 5 получены при одном значении $\Omega = 0,135$, но первая соответствует несимметричному развитию линии ($\Omega^0 = 0,1$, $\Delta\Omega = 0,005$), а вторая — симметричному развитию ($\Omega^0 = 0,135$). Критические значения параметра нагружения Ω_1 и Ω_2 для различных η приведены в таблице. На фиг. 3 даны кривые поведения несущей способности (величины изгибающего момента M) бруса в зависимости от Ω . Кривые 1—3 соответствуют значениям $\eta = 0,833$; $0,5$; $0,417$. Характерно,

η	0,417	0,5	0,625	0,833
Ω_1	0,16	0,15	0,13	0,12
Ω_2	0,18	0,165	0,15	0,13

что по мере увеличения параметра нагружения несущая способность бруса сначала возрастает, несмотря на появление участков скольжения, а затем начинает убывать. Причем максимальное значение несущая способность бруса достигает при $\Omega_l < \Omega < \Omega_1$, т. е. в



Фиг. 3



Фиг. 4

состоянии начавшихся скольжений по линии и до первого скачка проскальзываний.

Несколько неожиданный результат наблюдается в поведении тангенциального напряжения на берегах участков скольжения (компоненты тензора напряжений σ_{mm} , где вектор m направлен вдоль L). Тангенциальное напряжение на левом берегу линии скольжения обозначим через σ_- , на правом — через σ_+ . Кривые $1'-3'$ фиг. 4 соответствуют значению σ_- , $1-3$ — значению σ_+ . Рассмотрим нижнюю половину бруса. Пока брус находится в упругом состоянии, все компоненты тензора напряжений на линии скольжения непрерывны. При активизации линии (возникновении проскальзываний) одновременно появляются разрывы тангенциальных напряжений (кривые 1 и $1'$ фиг. 4 при $\Omega = 0,12$, $\eta = 0,5$). При малых Ω напряжения σ_- и σ_+ сжимающие.

Это естественно, так как на нижнюю половину торцов бруса действуют сжимающие усилия. Однако при дальнейшем увеличении параметра нагружения значение σ_+ становится положительным — появляется зона растяжения в результате возникшего скольжения на линии L (кривая 2 , фиг. 4, $\Omega = 0,13$, $\eta = 0,5$). Аналогичное поведение напряжений наблюдается и в верхней половине бруса (см. фиг. 4). Отметим, что вариационные постановки краевых задач [2] и рассмотренный алгоритм применимы и для решения задач о развитии трещин нормального разрыва.

Автор выражает благодарность Е. И. Шемякину, А. Ф. Ревуженко за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

Поступила 12 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И. О несимметрии пластического течения в сходящемся симметричном канале. — ФТПРПИ, 1977, № 3.
2. Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. Некоторые постановки краевых задач L -пластичности. — ПМТФ, 1979, № 2.
3. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М., «Наука», 1973.