ПМТФ, № 2, 1972

УДК 624.074.4

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ УДАРЕ

В. М. Корнев, В. Н. Солдовников

(Новосибирск)

Исследовано взаимодействие продольных и поперечных движений круговой цилиндрической оболочки при ударе по торцу. При бесконечной и конечной скоростях распространения возмущений вдоль образующей выявлены наиболее растущие формы потери устойчивости оболочки, которые подобны, если процесс выпучивания в случае конечной скорости распространения возмущений описывать в истинном времени действия сжимающей нагрузки. Установлено, что при нагружении большой интенсивности цилиндрическую оболочку можно моделировать стержнем при продольном ударе (указаны параметры подобия). Этот факт подтверждается сравнением с экспериментальными результатами.

Упругим системам при действии нагрузок большой интенсивности свойственно избирательное усиление некоторых высших форм потери устойчивости [1]. В экспериментах, описанных в работах [2–4], наблюдалось влияние на форму выпучивания стержней и оболочек волнового процесса, вызванного внезапным приложением нагрузки к упругой системе. При учете конечности скорости распространения продольных возмущений в работе [5] с помощью разложения решения в ряд на переменном интервале [6] получено асимптотическое представление формы потери устойчивости для полубесконечного стержня. Задача, аналогичная рассмотренной здесь, решалась численно в работе [7]; вероятно, ввиду небольшой скорости удара волнообразования по длине оболочки не наблюдались. Упоминание о влиянии волнового процесса на форму выпучивания имеется в [8].

1. Постановка задачи. Продольные и поперечные движения круговой цилиндрической оболочки описываются следующей системой уравнений:

$$D\left(w_{xxxx} + 12\,\frac{w}{R^2h^2}\right) - \frac{\nu Eh}{R\,(1-\nu^2)}\,u_x + (Nw_x)_x + \rho h w_{tt} = f\,(x,t) \qquad (1.1)$$

$$N_{xx} - c^{-2}N_{tt} = \nu\rho\,(h\,/\,R)\,w_{tt} \qquad (1.2)$$

Здесь x, t — продольная координата и время; u, w — продольное и поперечное смещение срединной поверхности оболочки радиуса R, нижние индексы обозначают дифференцирование по соответствующим переменным; E, ν, ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность материала; D — цилиндрическая жесткость; $c = \{E\,/\,[\rho\,(1-\nu^2)]\}^{1/2}$ — скорость звука; $f\,(x,\ t)$ — функция, определяемая возмущениями или несовершенствами; N — продольное усилие, которое в линейном приближении определяется по формуле

$$N = [Eh\,/\,(1-\nu^2)]\,(u_x - \nu w\,/\,R) \qquad (1.3)$$

Начальные и краевые условия при ударном постоянном во времени нагружении полубесконечной шарнирно опертой оболочки, которая покоится до удара, имеют вид

$$w = w_t = 0 \quad (t = 0,\ 0 \leqslant x < \infty),\quad w = w_{xx} = 0 \quad (x = 0) \qquad (1.4)$$

$$N = N_0 = \text{const} \quad (t > 0,\ x = 0),\quad N = N_t = 0 \quad (t = 0,\ x > 0)$$

В процессе нагружения оболочки могут присутствовать малые поперечные нагрузки, эксцентриситет приложения усилия N_0, кроме того, срединная поверхность оболочки может иметь форму, отличную от идеальной цилиндрической. Все это учитывается функцией $f(x, t)$, которая считается заданной.

Уравнения (1.1) и (1.2) совпадают с известными уравнениями из § 215 [9] теории колебаний круговых цилиндрических оболочек, в которых для усилий в срединной поверхности приняты линеаризованные выражения через смещения.

Решение задачи (1.1), (1.2), (1.4) существенно упрощается, когда продольное усилие $N(x, t) = \text{const}$. Это реализуется в двух случаях:

1) если оболочка настолько тонкостенная ($h / R \ll 1$), что выражением в правой части уравнения (1.2) можно пренебречь; тогда решение упрощенного волнового уравнения относительно продольного усилия в оболочке при условиях (1.4) имеет вид

$$N = N_0 = \text{const}$$

2) при бесконечной скорости распространения возмущений вдоль оболочки; тогда из уравнения движения

$$u_{xx} - \nu w_x / R = u_{tt} / c^2$$

при $c \to \infty$ следует, что $N = N_0 = \text{const}$ (см. (1.3)).

2. Исследование форм выпучивания при постоянном усилии. Рассматривается уравнение динамической потери устойчивости оболочки

$$D[w_{xxxx} + 12(1 - \nu^2) R^{-2} h^{-2} w] + N_0 w_{xx} + \rho h w_{tt} = f^*(x, t) \qquad (2.1)$$

Это уравнение получено путем исключения u_x из (1.1) при помощи (1.3), через $f^*(x, t)$ обозначены те слагаемые, которые не зависят от w.

Начальные и краевые условия для уравнения (2.1) (L — длина оболочки)

$$w = w_t = 0 \quad (t = 0, 0 \leqslant x \leqslant L), \quad w = w_{xx} = 0 \quad (x = 0, L) \qquad (2.2)$$

Решение задачи (2.1), (2.2) разыскивается в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(t) W_m(x), \quad W_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (m = 1, 2, \ldots) \qquad (2.3)$$

Здесь W_m — формы потери устойчивости.

Рассматривается поведение оболочки при интенсивном нагружении, т. е. $N_0 > N^*$, где $N^* = 4[3(1 - \nu^2)]^{1/2} DR^{-1}h^{-1}$ — критическая нагрузка Эйлера.

При действии нагрузок большой интенсивности $N_0 > N^*$ интерес представляют те степени свободы системы (формы потери устойчивости), которым соответствует быстрое нарастание прогибов [1]. Наиболее сильно развивающаяся форма потери устойчивости растет по экспоненциальному закону с показателем α, причем

$$\alpha^2 = \frac{12(1 - \nu^2)}{R^2 h^2} \frac{D}{\rho h} (\eta^4 - 1), \qquad \eta^2 = \frac{N_0}{N^*} \qquad (2.4)$$

Показатель α_0 наиболее растущей формы в стержне имеет вид

$$\alpha_0^2 = \frac{\pi^4 EI}{4\rho F l^4} \eta^4 \qquad (2.5)$$

Здесь обозначения те же, что и в [1]. Номера форм потери устойчивости для (2.4) и (2.5) равны соответственно

$$m^2 = \frac{2\eta^2 [3(1-\nu^2)]^{1/2}}{\pi^2} \frac{L^2}{Rh}, \qquad m_0^2 = \frac{\eta^2}{2} \tag{2.6}$$

Изучение динамических форм потери устойчивости и темпов нарастания при этом прогибов круговой цилиндрической оболочки можно проводить в экспериментах при интенсивном нагружении стержней, моделируя оболочку стержнем с параметрами, при которых $\alpha = \alpha_0$ и $m = m_0$ (см. (2.4) — (2.6)). Заметим, что равенство $\alpha = \alpha_0$ приближенно выполняется, когда $\eta^2 \gg 1$.

3. Анализ форм потери устойчивости с учетом взаимодействия продольных и поперечных движений. В случае тонкостенных оболочек ($\varepsilon = h/R \ll 1$) в первом приближении пренебрегаем правой частью уравнения (1.2). Тогда при исследовании решения уравнения (1.1) с учетом соотношения (1.3) можно использовать анализ нестационарных деформаций на переменном интервале [5,6].

Решение волнового уравнения (1.2) при начальных условиях (1.4) будем разыскивать в виде

$$N = N_* + \varepsilon N_1 \tag{3.1}$$

Здесь слагаемое N_* описывает распространение краевого режима в стержне (см. (1.4))

$$N_* = N_0 \quad (x < ct), \qquad N_* = 0 \quad (x \geqslant ct) \tag{3.2}$$

Второе слагаемое — решение неоднородного уравнения (1.2) с известной правой частью

$$N_1 = -\frac{\nu\rho c}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} w_{tt}^*(\xi, \tau)\, d\xi \tag{3.3}$$

Для получения функции w_{tt}^* в (3.3) функцию w_{tt} продолжают нечетным образом на всю ось x. Если $w_{tt} \equiv 0$ при $x \geqslant ct$, то $N_1 \equiv 0$ при $x \geqslant ct$.

Представление решения уравнения (1.2) в виде (3.1) справедливо до тех пор, пока $N_0 / N_1 \geqslant 1$. Необходимо отметить, что малость второго слагаемого в (3.1) обеспечивается тонкостенностью оболочки.

Как известно, изгибные возмущения, определяемые уравнением (1.1) при $x > ct$, несущественны. Кроме того, при более точной постановке задачи получаются уравнения типа динамических уравнений Тимошенко для балки, из которых следует, что скорость распространения изгибных возмущений c_* конечна и меньше c ($c_* < c$). Поэтому решение уравнения (1.1) будем исследовать с помощью рядов, определенных на переменном интервале [6].

После исключения u_x из уравнения (1.1) с помощью соотношения (1.3) получается

$$D[w_{xxxx} + 12(1-\nu^2) R^{-2}h^{-2}w] + (Nw_x)_x + \rho h w_{tt} = f^*(x, t) \tag{3.4}$$

Здесь $f^*(x, t)$ — функция, зависящая от продольного усилия N. Если правая часть $f(x, t) \equiv 0$ при $x < ct$ в (1.1), то $f^*(x, t) \equiv 0$ при $x > ct$ в (3.4). Следовательно, для уравнения (3.4) формулируется задача на переменном интервале. Краевые условия этой задачи имеют вид

$$w = w_{xx} = 0 \quad (x = 0), \qquad w = w_x = 0 \quad (x = l = ct) \tag{3.5}$$

Начальные условия — нулевые, а именно

$$w = w_t = 0 \quad (t = 0) \tag{3.6}$$

При разложении решения задачи (3.4) — (3.6) в ряд потребуются формы потери устойчивости оболочки. Исследуем эти формы

$$D\,[W^0_{xxxx} + 12\,(1 - \nu^2)\,R^{-2}h^{-2}W^0] + \lambda W^0_{xx} = 0 \tag{3.7}$$

$$W^0 = W^0_{xx} = 0 \quad (x = 0), \qquad W^0 = W_x{}^0 = 0 \quad (x = l)$$

Корни k_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ характеристического уравнения для (3.7) при $\lambda \to \infty$ становятся чисто мнимыми

$$k_{1,2} = \pm ik_0, \; k_{3,4} = \pm ik_1, \; k_0 \sim \sqrt{\lambda}, \; k_1 \to 0 \quad (\lambda \to \infty)$$

Непосредственные вычисления показывают, что асимптотики при $\lambda \to \infty$ собственных форм стержня и цилиндрической оболочки совпадают. Асимптотика этих форм $W^\circ = \sin m\pi x/l$ удовлетворяет условиям шарнирного опирания на обоих концах при $x = 0, l$, $W^\circ = W_{xx}{}^\circ = 0$.

Представим решение задачи (3.4) — (3.6) в виде

$$w = \sum_m W_m\,(x, t)\,q_m\,(t) \tag{3.8}$$

где $W_m\,(x, t)$ — собственные функции следующей задачи:

$$D\,[W_{xxxx} + 12\,(1 - \nu^2)\,R^{-2}h^{-2}W] + \Lambda\,[1 + \varepsilon s\,(x, t)]\,W_{xx} = 0$$

$$W = W_{xx} = 0 \quad (x = 0, l), \qquad s\,(x, t) = N_1 / N_0 \tag{3.9}$$

Для получения собственных функций и чисел задачи (3.9) используется теория возмущений [10]

$$W_m\,(x, t) = W_m{}^0\,(x, t) + \varepsilon W_m^{(1)}\,(x, t) + \ldots, \quad \Lambda_m = \lambda_m + \varepsilon\lambda_m^{(1)} + \ldots \tag{3.10}$$

Здесь $W_m{}^\circ$ и λ_m — асимптотики собственных форм потери устойчивости и собственных чисел задачи (3.7). В уравнении (3.9) и соотношениях (3.10) t рассматривается как параметр.

Подставим ряд (3.8) в уравнение (3.4), пренебрежем производными по времени порядка ε в ряду (3.10); это значит, что всю полезную информацию о развитии форм потери устойчивости во времени несет функция $q_m\,(t)$. Воспользуемся условием ортогональности $W_m\,(x, t)$ на переменном интервале, для $q_m\,(t)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

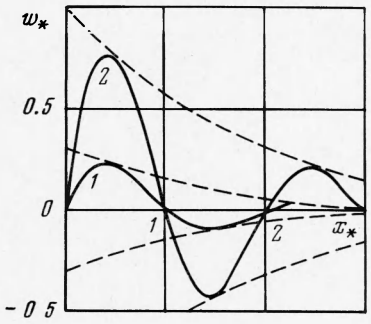
$$\rho h q_m'' + \left\{D\left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 + \frac{12\,(1 - \nu^2)}{R^2h^2}\right] - N_0\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \varepsilon s^*\,(t)\right\} q_m = f_m\,(t) \tag{3.11}$$

Здесь малое слагаемое $\varepsilon s^*\,(t)$ связано с переменностью продольного усилия N (см. (3.1)) и учитывает взаимодействие различных форм потери устойчивости оболочки (степеней свободы системы). Для достаточно тонких оболочек ($\varepsilon \ll 1$) это слагаемое можно опустить. Из упрощенного уравнения (3.11) находим наиболее растущие формы потери устойчивости оболочки [5]. Легко показать, что для этих форм отношение l / m остается

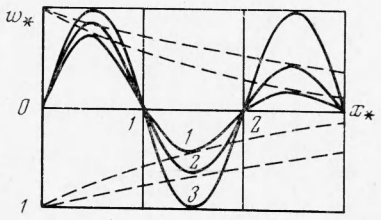
постоянным (см. (2.4) и (2.6))

$$l^* = \frac{l}{m} = \frac{\pi (Rh)^{1/2}}{\eta [12 (1 - \nu^2)]^{1/4}} \tag{3.12}$$

Выявленная форма потери устойчивости всегда реализуется в оболочке ввиду наличия нелинейного слагаемого $\varepsilon s^* (t)$ в (3.11), даже если начальные неправильности стимулируют развитие одной или нескольких форм потери устойчивости. Влияние начальных неправильностей, возмущений в процессе движения и переменности усилия N описывают функции $f_m (t)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Из соотношения (3.12) следует, что в первом приближении узлы (нули функции прогиба) не смещаются, что согласуется с экспериментальными результатами из [4]. Поэтому приближенное решение уравнения (3.4) ищем в виде

$$w(x, \tau) = Q(\tau) W^*(x), \quad W^*(x) = \sin \pi x / l^* \quad (0 \leqslant x \leqslant l), \quad W^*(x) = 0 \quad (x > l) \tag{3.13}$$

Здесь τ — истинное время действия сжимающего усилия N, т. е.

$$\tau = t - x / c \tag{3.14}$$

Перейдем в уравнении (3.4) к переменным x и τ. Пренебрегая второстепенными членами ($h / l^* \ll 1$), получим уравнение, формально совпадающее с (3.4), где t заменено на τ. Ищем решение этого уравнения в виде (3.13) методом Бубнова — Галеркина. Таким образом, функцию $Q(\tau)$ находим из решения задачи

$$Q'' - \alpha^2 Q = F(\tau), \quad Q = Q' = 0, \quad \tau = 0$$

Решение этой задачи очевидно.

Типичные формы выпучивания оболочек в разные моменты времени приведены в координатах $w_* = w / Q(t_2)$ и $x_* = x / l^*$ на фиг. 1 и фиг. 2; штриховые кривые показывают распределение амплитуд выбранной формы потери устойчивости вдоль оболочки. На фиг. 1 кривая *1* получена при $t = t_1$, кривая *2* — при $t = t_2 = 1.4\ t_1$. Влияние взаимодействия продольных и поперечных движений иллюстрируется фиг. 2. При конечной скорости распространения продольных возмущений $c = c_1$ форма выпучивания имеет вид кривой *1*. При $c = 2c_1$ получаем кривую *2* и, наконец, при бесконечной скорости распространения продольных возмущений ($c \to \infty$) получена кривая *3* (все кривые построены для одного и