

УДК 519.63

## Метод расщепления при аппроксимации схемой CABARET неоднородного скалярного закона сохранения\*

Н.А. Зюзина<sup>1,2</sup>, В.В. Остапенко<sup>1,2</sup>, Е.И. Полунина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, пр. Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090

<sup>2</sup>Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mails: nzyuzina1992@gmail.com (Зюзина Н.А.), ostapenko\_vv@ngs.ru (Остапенко В.В.), ecpolunina2014@gmail.com (Полунина Е.И.)

**Зюзина Н.А., Остапенко В.В., Полунина Е.И.** Метод расщепления при аппроксимации схемой CABARET неоднородного скалярного закона сохранения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 2. — С. 185–200.

Предложен метод расщепления по физическим процессам для схемы CABARET, аппроксимирующей неоднородный скалярный закон сохранения с выпуклой и монотонно возрастающей функцией потока. Показано, что на первом шаге этого метода, когда аппроксимируется однородный закон сохранения, схема CABARET является монотонной, что обеспечивает отсутствие в ее численных решениях нефизических осцилляций на фронтах ударных волн. Приведены тестовые расчеты, иллюстрирующие преимущества предложенной модификации схемы CABARET.

**DOI:** 10.15372/SJNM20180205

**Ключевые слова:** метод расщепления по физическим процессам, монотонная схема CABARET, неоднородный скалярный закон сохранения.

**Zyuzina N.A., Ostapenko V.V., Polunina E.I.** Splitting method for CABARET scheme approximating the non-uniform scalar conservation law // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 2. — P. 185–200.

The splitting method for the CABARET scheme approximating the non-uniform scalar conservation law with convex and monotonically increasing flux function has been proposed. It was shown that at the first step of this method, when the uniform conservation law is approximated, the CABARET scheme is monotonic and its numerical solutions do not have non-physical oscillations in the shock wave fronts. Test computations that illustrate these properties of the CABARET scheme are presented.

**Keywords:** *splitting method, monotone CABARET scheme, non-uniform scalar conservation law.*

---

## Введение

В работе [1] в качестве одной из разностных схем, предназначенных для численного решения одномерного линейного уравнения переноса, была рассмотрена трехслойная по времени и двухточечная по пространству схема Upwind Leapfrog, которая имеет второй

---

\*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00333).

порядок аппроксимации на гладких решениях, является явной и условно устойчивой при числах Куранта  $r \in (0, 1]$ . Детальный анализ этой схемы был проведен в работах [2, 3], в которых с учетом кососимметричности своего пространственного шаблона она была названа схемой CABARET. Основные достоинства этой схемы связаны с тем, что она задана на компактном пространственном шаблоне, является обратимой по времени и точной при двух различных числах Куранта:  $r = 0.5, 1$ , что наделяет ее уникальными диссипативными и дисперсионными свойствами [3].

Для численного решения уравнений одномерной газовой динамики [4, 5] был разработан балансно-характеристический вариант схемы CABARET [6], который с учетом коррекции потоковых переменных (необходимой для монотонизации разностного решения на ударных волнах) показал высокую точность при расчете классического теста Blast Wave [7]. Было показано, что разработанная в [6] схема в случае специальной аппроксимации начальных данных является монотонной [8] и сильно монотонной [9] при числах Куранта  $r \in (0, 0.5]$ .

В последнее время для численного моделирования пространственно многомерных газодинамических течений [10] и мезомасштабных течений в океане [11] широко применяется двухслойная по времени форма записи схемы CABARET [12]. Монотонность этой схемы при аппроксимации линейного уравнения переноса в одномерном случае изучалась в [13] и [14], а в двумерном — в [15]. Условия монотонности двухслойной по времени схемы CABARET, аппроксимирующей однородный скалярный закон сохранения с выпуклым потоком, исследовались в [16] и [17].

В настоящей работе предложен метод расщепления по физическим процессам для схемы CABARET, аппроксимирующей неоднородный гиперболический скалярный закон сохранения с выпуклой и монотонно возрастающей функцией потока. Показано, что на первом шаге этого метода, когда аппроксимируется однородный закон сохранения, схема CABARET является монотонной, что обеспечивает отсутствие в ее численных решениях нефизических осцилляций на фронтах ударных волн. Приведены тестовые расчеты, иллюстрирующие преимущества данной модификации схемы CABARET.

## 1. Стандартная схема CABARET

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного гиперболического скалярного закона сохранения

$$v_t + f(v)_x = g(v), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad (1.1)$$

со строго монотонно возрастающей, строго выпуклой функцией потока  $f(v)$ :

$$a(v) = f'(v) > 0, \quad a'(v) = f''(v) > 0$$

и непрерывной правой частью  $g(v)$ . Аппроксимируем эту задачу двухслойной по времени схемой CABARET, заданной на прямоугольной разностной сетке

$$\{x_j, t_n\} : x_j = jh, \quad t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad t_0 = 0, \quad (1.2)$$

в которой  $h$  — постоянный шаг сетки по пространству, а  $\tau_n$  — шаг сетки по времени, определяемый из условия устойчивости

$$\tau_n = rh / \max_j |a_{j+1/2}^n|, \quad (1.3)$$

где  $r \in (0, 1)$  — число Куранта,  $a_{j+1/2}^n = a(U_{j+1/2}^n)$ . В этой схеме используются потоковые  $u_j^n = u(x_j, t_n)$  и консервативные  $U_{j+1/2}^n = u(x_{j+1/2}, t_n)$  переменные, заданные соответственно в целых  $x_j$  и полуцелых  $x_{j+1/2} = x_j + h/2$  пространственных узлах разностной сетки.

Пусть  $u_j^n, U_{j+1/2}^n$  — известное численное решение задачи (1.1) на  $n$ -м временном слое  $t_n$ , при  $n = 0$  — сеточная аппроксимация начальной функции  $v_0(x)$ . Численное решение  $u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1}$  на  $(n + 1)$ -м временном слое  $t_{n+1}$  находится по стандартной схеме SAVARET [12] в три этапа. На первом этапе по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1/2} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n/2} + \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{h} = g_{j+1/2}^n, \quad (1.4)$$

где  $f_j^n = f(u_j^n)$ ,  $g_{j+1/2}^n = g(U_{j+1/2}^n)$ , вычисляются значения консервативных переменных  $U_{j+1/2}^{n+1/2} = U(x_{j+1/2}, t_{n+1/2})$  на полуцелом временном слое  $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$ . На втором этапе путем экстраполяции

$$\bar{u}_{j+1}^{n+1} = 2U_{j+1/2}^{n+1/2} - u_j^n \quad (1.5)$$

находятся предварительные значения потоковых переменных  $\bar{u}_{j+1}^{n+1}$ , которые корректируются по формуле

$$u_{j+1}^{n+1} = F\left(\bar{u}_{j+1}^{n+1}, m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n\right), \quad (1.6)$$

в которой

$$F(u, m, M) = \begin{cases} u, & m \leq u \leq M, \\ m, & u < m, \\ M, & u > M, \end{cases} \quad (1.7)$$

$$m_{j+1/2}^n = \min(u_j^n, U_{j+1/2}^n, u_{j+1}^n) + \tau_n g_{j+1/2}^{n+1/2}, \quad (1.8)$$

$$M_{j+1/2}^n = \max(u_j^n, U_{j+1/2}^n, u_{j+1}^n) + \tau_n g_{j+1/2}^{n+1/2}, \quad (1.9)$$

где  $g_{j+1/2}^{n+1/2} = g(U_{j+1/2}^{n+1/2})$ .

На третьем, заключительном, этапе по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{h} = g_{j+1/2}^{n+1} = g(U_{j+1/2}^{n+1}) \quad (1.10)$$

вычисляются значения консервативных переменных  $U_{j+1/2}^{n+1}$  на  $(n + 1)$ -м временном слое  $t_{n+1}$ . Суммируя уравнения (1.4) и (1.10), получаем симметричное разностное уравнение

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{f_{j+1}^n + f_{j+1}^{n+1} - (f_j^n + f_j^{n+1})}{2h} = \frac{g_{j+1/2}^n + g_{j+1/2}^{n+1}}{2},$$

аппроксимирующее со вторым порядком дивергентное дифференциальное уравнение (1.1).

## 2. О монотонности схемы CABARET

С.К. Годунов ввел понятие монотонности разностной схемы [18], предполагающее, что при аппроксимации задачи Коши для линейного уравнения переноса разностная схема сохраняет монотонность любых монотонных сеточных начальных данных при переходе с одного временного слоя на другой (далее такие схемы будем называть G-монотонными). Обобщение этого понятия на линейные гиперболические системы уравнений приводит к требованию сохранения монотонности разностного решения относительно всех инвариантов аппроксимируемой системы. При аппроксимации линейных гиперболических уравнений и линейных гиперболических систем уравнений G-монотонность разностной схемы эквивалентна TVD-свойству схемы, введенному Хартемом [19]. Как показано в [20], в случае аппроксимации квазилинейного однородного закона сохранения

$$v_t + f(v)_x = 0, \quad (2.1)$$

точные решения которого, подобно решениям линейного уравнения переноса, также обладают свойством сохранения монотонности начальных данных, TVD-свойство разностной схемы усиливает свойство G-монотонности схемы.

В настоящее время TVD-свойство разностной схемы, а следовательно, и свойство ее G-монотонности (с учетом их модификаций в рамках ENO-схем [20], NED-схемы [21], WENO-схемы [22] и др.) является одним из основных требований, предъявляемым к разностным схемам сквозного счета, предназначенным для численного расчета обобщенных решений квазилинейных гиперболических уравнений, в том числе и неоднородных (1.1). Однако, в отличие от своего однородного аналога (2.1) и подобно квазилинейным гиперболическим системам, точное решение задачи Коши для неоднородного уравнения (1.1) с произвольной правой частью  $g(v)$  в общем случае не сохраняет монотонность начальных данных, не обладает TVD-свойством и, как следствие, не удовлетворяет принципу максимума. Отсюда следует, что применение в стандартной схеме CABARET (1.4)–(1.10), аппроксимирующей задачу Коши (1.1), коррекции потоков (1.6), основанной на разностном аналоге принципа максимума (1.7) с учетом величин  $g_{j+1/2}^{n+1/2}$  в формулах (1.8), (1.9), не является строго обоснованным, поскольку точное решение этой задачи в общем случае принципу максимума не удовлетворяет.

С другой стороны, в работах [13, 16] показано, что при аппроксимации задачи Коши для однородного закона сохранения (2.1) стандартная схема CABARET [12] не является G-монотонной, т. е. всегда можно указать такие монотонные сеточные начальные данные, при которых разностное решение, получаемое по этой схеме, теряет свойство монотонности на следующих временных слоях. Как следует из результатов работы [8], для того, чтобы стандартная схема CABARET, аппроксимирующая однородный закон сохранения (2.1), сохраняла монотонность сеточных начальных данных, необходимо, чтобы эти начальные данные имели специальный вид, например удовлетворяли условию

$$u_j^0 = v_0(x_j), \quad U_{j+1/2}^0 = \frac{u_j^0 + u_{j+1}^0}{2}. \quad (2.2)$$

При этом для сохранения монотонности начальных данных (2.2) необходимо, чтобы расчеты по стандартной схеме CABARET проводились при числах Куранта  $r \in (0, 0.5]$ .

В настоящей работе для построения схемы CABARET, аппроксимирующей задачу Коши (1.1), применяется метод расщепления по физическим процессам [23], идею которого проиллюстрируем на примере абстрактной дифференциально-разностной схемы

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{\tau_n} + f_x^{n+1/2} = g^{n+1/2}, \quad w^n = w(x, t_n),$$

аппроксимирующей неоднородное уравнение (1.1), где

$$f^{n+1/2} = \widehat{f}(w^n), \quad g^{n+1/2} = \widehat{g}(w^n, w^{n+1})$$

суть некоторые сеточные аппроксимации функций  $f(v)$  и  $g(v)$  в точке  $(x, t_{n+1/2})$ . На первом шаге этого метода решается однородное дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{\widehat{w}^{n+1} - w^n}{\tau_n} + f_x^{n+1/2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{w}^{n+1} = w^n - \tau_n f_x^{n+1/2}, \quad (2.3)$$

аппроксимирующее однородное дифференциальное уравнение (2.1). В результате находят предварительные значения  $\widehat{w}^{n+1}$ , которые используются на втором шаге метода

$$\frac{w^{n+1} - \widehat{w}^{n+1}}{\tau_n} = g^{n+1/2} \quad \Leftrightarrow \quad w^{n+1} = \widehat{w}^{n+1} + \tau_n g^{n+1/2} \quad (2.4)$$

для нахождения величин  $w^{n+1}$ .

На первом шаге (2.3) метода расщепления применяется G-монотонная модификация схемы CABARET [16], обеспечивающая сохранение монотонности разностного решения при аппроксимации однородного уравнения (2.1). На втором шаге (2.4) этого метода используется неявная разностная схема второго порядка, которая не препятствует формированию новых локальных экстремумов в разностном решении, если такие экстремумы возникают в точном решении неоднородного уравнения (1.1). Подробное описание данной модификации схемы CABARET приводится в следующем пункте.

### 3. Модифицированная схема CABARET

Первый шаг метода расщепления, на котором схема CABARET аппроксимирует однородное дивергентное дифференциальное уравнение (2.1), состоит из четырех этапов. На первом этапе по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1/2} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n/2} + \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{h} = 0$$

определяются консервативные переменные  $U_{j+1/2}^{n+1/2}$ . На втором этапе по формуле (1.5) находятся величины  $\bar{u}_{j+1}^{n+1}$ , используемые для определения предварительных значений потоков

$$\bar{f}_{j+1}^{n+1/2} = f\left(\bar{u}_{j+1}^{n+1/2}\right), \quad \bar{u}_{j+1}^{n+1/2} = (u_{j+1}^n + \bar{u}_{j+1}^{n+1})/2,$$

которые корректируются по формуле

$$\tilde{f}_{j+1}^{n+1/2} = F \left( \tilde{f}_{j+1}^{n+1/2}, m_{j+1}^n, M_{j+1}^n \right),$$

где

$$m_{j+1}^n = \min \left( f_{j+1/2}^n, f_{j+1}^n \right), \quad M_{j+1}^n = \max \left( f_{j+1/2}^n, f_{j+1}^n \right), \quad f_{j+1/2}^n = f(U_{j+1/2}^n).$$

Если на  $n$ -м временном слое при  $j = k$  выполнены неравенства

$$U_{k-3/2}^n \leq U_{k-1/2}^n \leq U_{k+1/2}^n \Leftrightarrow f_{k-3/2}^n \leq f_{k-1/2}^n \leq f_{k+1/2}^n, \quad (3.1)$$

то при помощи функции

$$F_1(u, M) = \begin{cases} u, & u \leq M, \\ M, & u \geq M, \end{cases}$$

ограничивающей сверху, проводится дополнительная коррекция потока  $\tilde{f}_k^{n+1/2}$  по формуле

$$f_k^{n+1/2} = F_1 \left( \tilde{f}_k^{n+1/2}, \varphi_{k-1}^n \right),$$

где

$$\varphi_{k-1}^n = f_{k-1}^n + \frac{U_{k-1/2}^n - u_{k-1}^n}{z_n}, \quad z_n = \frac{\tau_n}{h}.$$

Если на  $n$ -м временном слое при  $j = k$  выполнены неравенства

$$U_{k-3/2}^n \geq U_{k-1/2}^n \geq U_{k+1/2}^n \Leftrightarrow f_{k-3/2}^n \geq f_{k-1/2}^n \geq f_{k+1/2}^n, \quad (3.2)$$

то при помощи функции

$$F_2(u, m) = \begin{cases} u, & u \geq m, \\ m, & u \leq m, \end{cases}$$

ограничивающей снизу, дополнительная коррекция потока  $\tilde{f}_k^{n+1/2}$  проводится по формуле

$$f_k^{n+1/2} = F_2 \left( \tilde{f}_k^{n+1/2}, \varphi_{k-1}^n \right).$$

Если ни одно из двух условий (3.1) или (3.2) не выполнено, то коррекция потока  $\tilde{f}_k^{n+1/2}$  не проводится, т.е. полагается, что  $f_k^{n+1/2} = \tilde{f}_k^{n+1/2}$ .

На третьем этапе из разностных уравнений

$$\frac{\hat{U}_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{f_{j+1}^{n+1/2} - f_j^{n+1/2}}{h} = 0$$

находятся предварительные значения  $\hat{U}_{j+1/2}^{n+1}$  консервативной переменной. На четвертом этапе по формулам

$$\tilde{u}_j^{n+1} = 2u_j^{n+1/2} - u_j^n, \quad u_j^{n+1/2} = f^{-1} \left( f_j^{n+1/2} \right),$$

где  $f^{-1}$  — функция, обратная к  $f$ , находятся вторые предварительные значения  $\tilde{u}_j^{n+1}$  потоковых переменных, которые корректируются по формуле

$$\widehat{u}_j^{n+1} = \begin{cases} F(\widehat{u}_j^{n+1}, m_j^{n+1}, M_j^{n+1}), & a_{j-1/2}^{n+1} \geq a_{j+1/2}^{n+1}, \\ \frac{1}{2}(\widehat{U}_{j-1/2}^{n+1} + \widehat{U}_{j+1/2}^{n+1}), & a_{j-1/2}^{n+1} < a_{j+1/2}^{n+1}, \end{cases} \quad (3.3)$$

где

$$m_j^{n+1} = \min(\widehat{U}_{j-1/2}^{n+1}, \widehat{U}_{j+1/2}^{n+1}), \quad M_j^{n+1} = \max(\widehat{U}_{j-1/2}^{n+1}, \widehat{U}_{j+1/2}^{n+1}). \quad (3.4)$$

На этом завершается первый шаг (2.3) метода расщепления, в результате которого определяются предварительные значения  $\widehat{u}_j^{n+1}$  и  $\widehat{U}_{j+1/2}^{n+1}$  разностного решения на  $(n+1)$ -м временном слое. На втором шаге (2.4) метода расщепления по неявным формулам

$$u_j^{n+1} = \widehat{u}_j^{n+1} + \tau_n g \left( \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} \right), \quad U_{j+1/2}^{n+1} = \widehat{U}_{j+1/2}^{n+1} + \tau_n g \left( \frac{U_{j+1/2}^{n+1} + U_{j+1/2}^n}{2} \right)$$

вычисляются окончательные значения разностного решения  $u_j^{n+1}$  и  $U_{j+1/2}^{n+1}$  на  $(n+1)$ -м временном слое.

Из результатов работ [16] и [17] следует, что на первом шаге метода расщепления модифицированная схема SABARET является монотонной, т. е. удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} U_{j-1/2}^n \leq u_j^n \leq U_{j+1/2}^n \quad \forall j & \Rightarrow \widehat{U}_{j-1/2}^{n+1} \leq \widehat{u}_j^{n+1} \leq \widehat{U}_{j+1/2}^{n+1} \quad \forall j, \\ U_{j-1/2}^n \geq u_j^n \geq U_{j+1/2}^n \quad \forall j & \Rightarrow \widehat{U}_{j-1/2}^{n+1} \geq \widehat{u}_j^{n+1} \geq \widehat{U}_{j+1/2}^{n+1} \quad \forall j, \end{aligned}$$

что обеспечивает отсутствие в ее разностных решениях численных осцилляций на линиях сильных разрывов точного решения.

#### 4. Численное моделирование пленочных течений

В качестве конкретного примера рассмотрим задачу Коши (1.1), в которой

$$f(v) = v^3/3, \quad g(v) = \beta/v, \quad v > 0, \quad \beta = \text{const}. \quad (4.1)$$

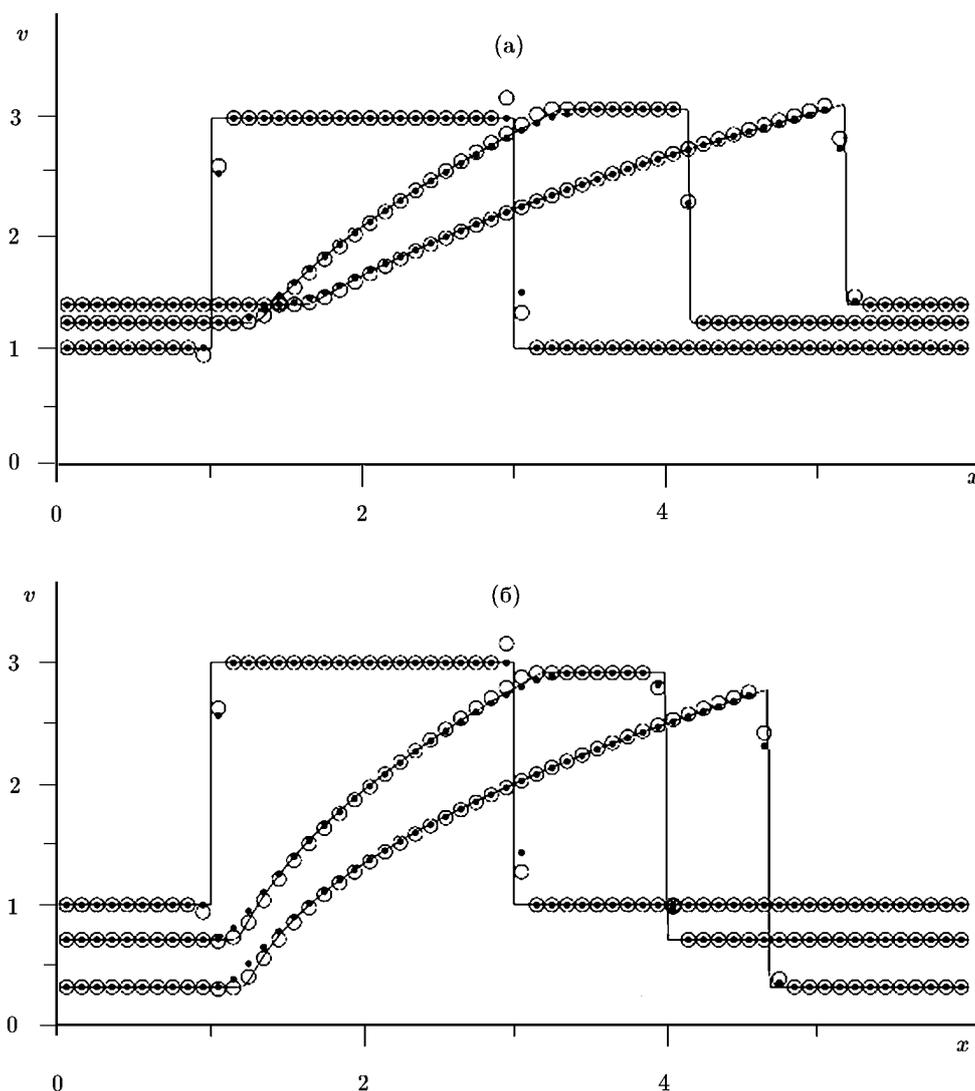
Такая задача возникает при моделировании в рамках длинноволнового приближения процесса стекания вязкой пленки по вертикальной стенке с учетом тепломассопереноса на свободной поверхности [24–26]. При  $\beta > 0$  на свободной поверхности стекающей пленки жидкость конденсируется, а при  $\beta < 0$  испаряется. Приводимые далее численные расчеты двух различных задач Коши (1.1), (4.1) выполнены по стандартной и модифицированной схемам SABARET, заданным на прямоугольной разностной сетке (1.2), (1.3) с пространственным шагом  $h = 0.1$  и числом Куранта  $r = 0.5$ . Сеточные начальные данные задавались по формулам (2.2) или по формулам

$$U_{j+1/2}^0 = v_0(x_{j+1/2}), \quad u_j^0 = \frac{U_{j-1/2}^0 + U_{j+1/2}^0}{2}. \quad (4.2)$$

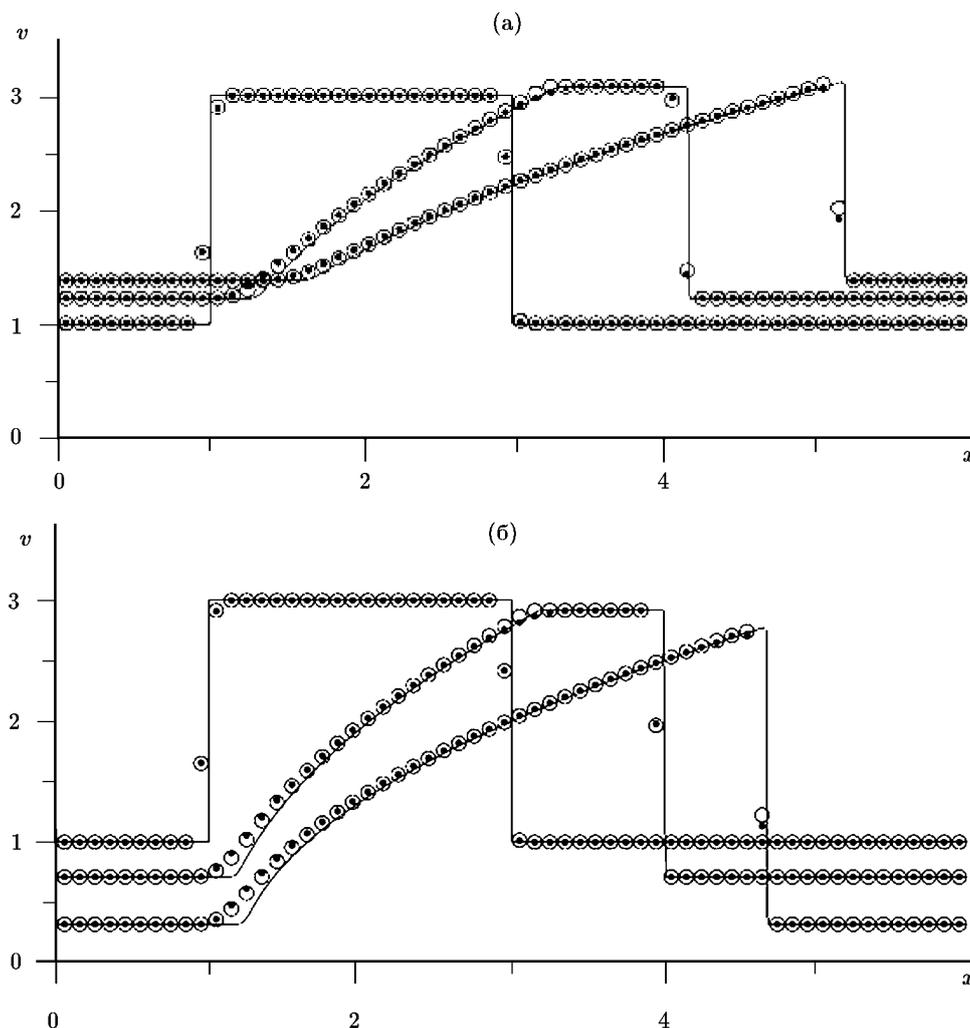
На рисунках 1 и 2 для трех последовательных моментов времени  $t = \tau_0$ ,  $t = 0.25$  и  $t = 0.45$  приведены результаты расчета по стандартной (кружочки) и модифицированной (точки) схемам SABARET задачи Коши (1.1), (4.1) с кусочно-постоянной начальной функцией

$$v_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ 3, & 1 \leq x < 3, \\ 1, & 3 \leq x, \end{cases} \quad (4.3)$$

имеющей в точке  $x = 1$  неустойчивый сильный разрыв, переходящий при  $t > 0$  в центрированную волну разрежения, а в точке  $x = 1$  — устойчивый сильный разрыв, переходящий при  $t > 0$  в ударную волну. Рис. 1а и 2а соответствуют случаю конденсации ( $\beta = 1$ ), а рис. 1б и 2б — случаю испарения ( $\beta = -1$ ). Разностная сетка (1.1), (4.1) задавалась на отрезке  $[0, X]$  оси  $x$ , где  $X = 10$ , что соответствует  $M = X/h = 100$  пространственным ячейкам сетки. Поскольку при функциях (4.1) характеристики уравнения (1.1) распространяются в положительном направлении оси  $x$ , то на левой границе  $x = 0$  расчетной области ставилось граничное условие  $u_0^n = 1$ .



**Рис. 1.** Сравнение точного и численного решений задачи Коши (1.1), (4.1), (4.3) с сеточными начальными данными (4.2) при параметрах  $\beta = 1$  (а) и  $\beta = -1$  (б) в моменты времени  $t = \tau_0$ ,  $t = 0.25$  и  $t = 0.45$ . Сплошная линия — точное решение; кружочки — расчет по стандартной схеме; точки — по модифицированной схеме



**Рис. 2.** Сравнение точного и численного решений задачи Коши (1.1), (4.1), (4.3) с сеточными начальными данными (2.2) при параметрах  $\beta = 1$  (а) и  $\beta = -1$  (б) в моменты времени  $t = \tau_0$ ,  $t = 0.25$  и  $t = 0.45$ . Сплошная линия — точное решение; кружочки — расчет по стандартной схеме; точки — по модифицированной схеме

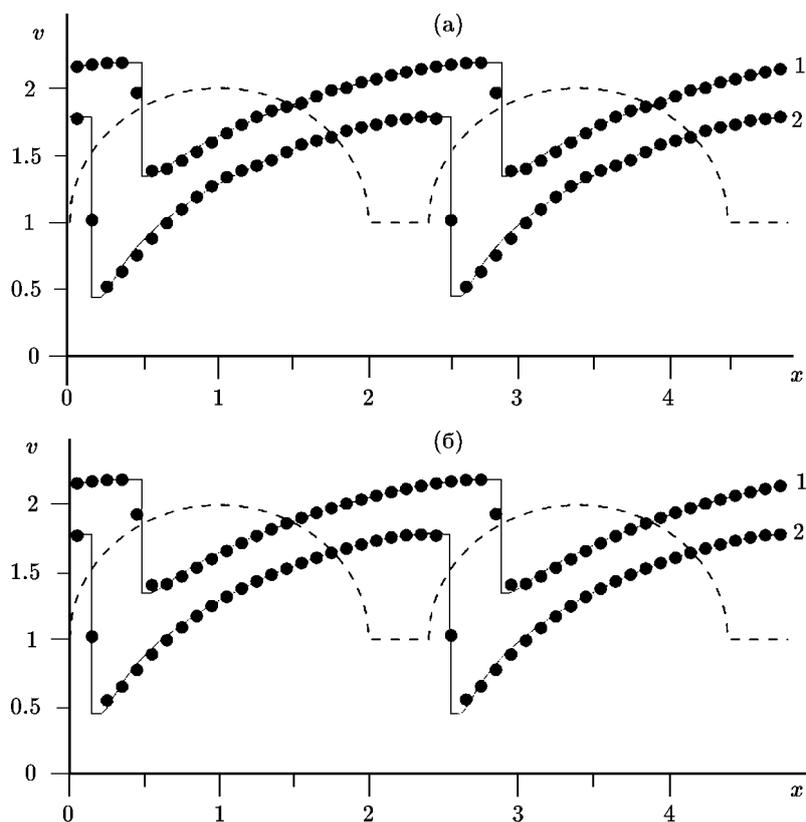
Сплошными линиями на рис. 1 и 2 изображено точное решение, которое получается на основе метода, изложенного в [26].

На рис. 1 показаны расчеты, в которых сеточные начальные данные задавались по формуле (4.2). Из этого рисунка видно, что, в отличие от модифицированной схемы CABARET, которая на первом шаге метода расщепления является G-монотонной, разностное решение, получаемое по стандартной схеме (которая свойством G-монотонности не обладает), имеет на первых временных шагах паразитические осцилляции, достаточно быстро затухающие с течением времени. Однако, если такие расчеты провести при сеточных начальных данных (2.2), адаптированных к стандартной схеме CABARET, то указанные осцилляции в ней будут отсутствовать (рис. 2). При этом численные значения, получаемые по стандартной и модифицированной схемам, получаются достаточно близкими друг к другу.

На рис. 3 на момент времени  $t = 0.4$  черными кружочками показаны результаты расчета по стандартной (рис. 3а) и модифицированной (рис. 3б) схемам CABARET задачи Коши (1.1), (4.1) со следующими периодическими начальными данными:

$$v_0(x) = \begin{cases} \sqrt{x(2-x)} + 1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & 2 \leq x \leq X, \end{cases} \quad v_0(x) = v_0(x + X) \quad \forall x, \quad (4.4)$$

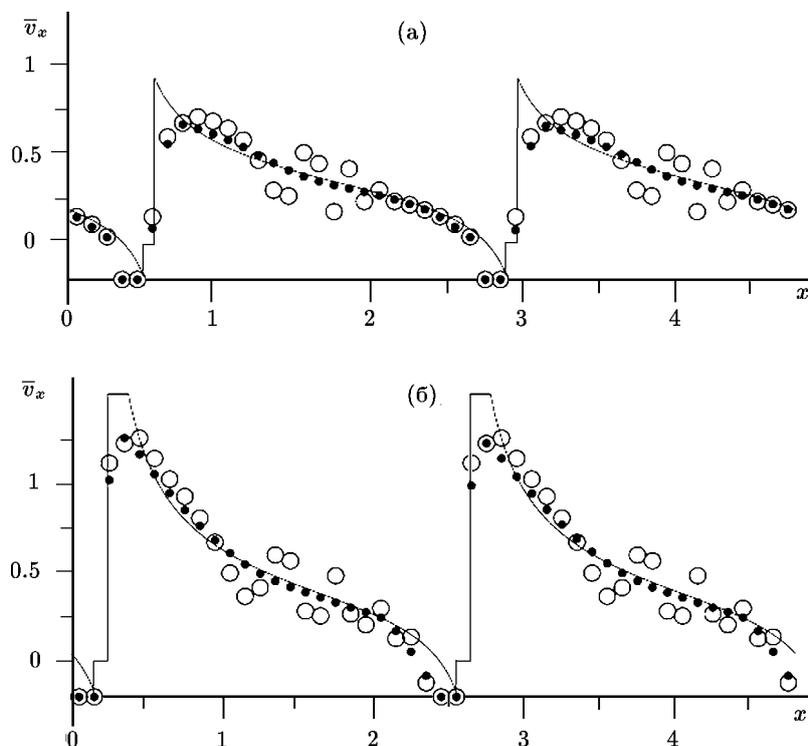
где  $X = 2.4$ , моделирующими бесконечную последовательность стекающих капель жидкости. Разностная сетка (1.1), (4.1) задавалась на отрезке  $[0, X]$  оси  $x$ , где  $X = 7.2$ , что соответствует  $M = X/h = 72$  пространственным ячейкам сетки. Поскольку расчеты проводились на отрезке длины периода, то на границах расчетной области ставилось условие периодичности разностного решения  $u_0^n = u_M^n$ . На рис. 3 штриховой линией изображена функция начальных данных (4.4), а сплошной линией — точное решение, которое моделируется численным расчетом по G-монотонной схеме CABARET на мелкой сетке с пространственным шагом  $h = 0.01$ .



**Рис. 3.** Расчет по стандартной (а) и модифицированной (б) схемам CABARET задачи Коши (1.1), (4.1), (4.4) с сеточными начальными данными (2.2) при параметрах  $\beta = 1$  (линия 1) и  $\beta = -1$  (линия 2) в момент времени  $t = 0.4$ . Штриховая линия — начальные данные, сплошная линия — точное решение, кружочки — численный расчет

Расчеты, приведенные на рис. 3, проводились при сеточных начальных данных (2.2), адаптированных к стандартной схеме CABARET. Несмотря на это, из рис. 3 видно, что стандартная схема, в отличие от модифицированной, допускает небольшие отклонения от точного решения в области волны повышения уровня жидкости, приводящие к

тому, что в разностном решении не сохраняется выпуклость вверх профиля волны повышения. Причем данная ситуация не меняется при измельчении сетки (в том числе, при расчетах с числами Куранта  $r < 0.5$ ), а при использовании сеточных начальных данных, задаваемых по формуле (4.2), такое искажение профиля волны повышения становится более заметным. Объяснение этого эффекта следует из рис. 4, на котором показаны точные (сплошная линия) и численные значения пространственной производной  $v_x(x, t)$  при  $\beta = 1$  (рис. 4а) и  $\beta = -1$  (рис. 4б). Численные значения, изображенные кружочками для стандартной схемы, и точками для модифицированной схемы, определялись по формуле  $(\Delta U)_j^n = (U_{j+1/2}^n - U_{j-1/2}^n)/h$ . Для наглядности на рис. 4 приведены значения  $\bar{v}_x = F(v_x, w, W)$  производной  $v_x$ , ограниченной сверху и снизу, и значения  $\Delta \bar{U} = F_2(\Delta U, w)$  численных производных  $\Delta U$ , ограниченных снизу, где  $W = 1.5$  и  $w = -0.2$ . Как видно на рис. 4, разностные производные, получаемые по стандартной схеме, имеют осцилляции на волне повышения уровня, которые отсутствуют в модифицированной схеме.

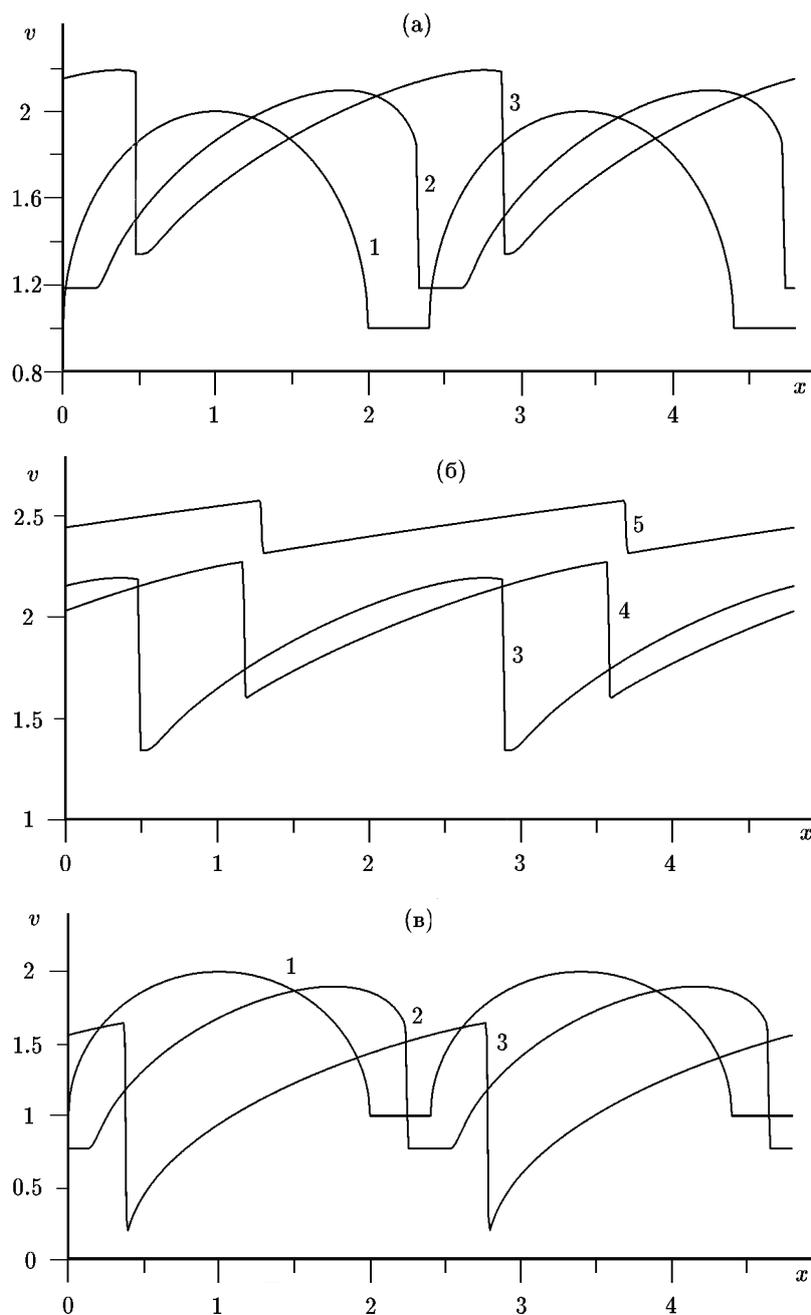


**Рис. 4.** Сравнение точной и численной пространственных производных решения задачи (1.1), (4.1), (4.4) при параметрах  $\beta = 1$  (а) и  $\beta = -1$  (б) в момент времени  $t = 0.4$ . Сплошная линия — пространственная производная точного решения, кружочки — расчет по стандартной схеме CABARET, точки — по модифицированной схеме CABARET

Численные расчеты показали, что если в стандартную схему CABARET на последнем этапе добавить коррекцию потоков (3.3), (3.4), то при расчете задачи Коши (1.1), (4.1), (4.4) с сеточными начальными данными (2.2) осцилляции разностных производных в ее численном решении полностью исчезают, и это решение становится очень близким к разностному решению, получаемому по модифицированной схеме CABARET. Интересно отметить, что положительный эффект введения двойной коррекции для увеличения

точности расчетов стандартной схемы SABARET отмечался ранее в работе [27], где был предложен другой, более сложный способ повторной коррекции переменных SABARET, отличный от предложенного в настоящей работе.

Эволюция численного решения задачи Коши (1.1), (4.1), (4.4) показана на рис. 5, где приведен расчет по модифицированной схеме SABARET с пространственным шагом  $h = 0.01$ .



**Рис. 5.** Расчет по модифицированной схеме SABARET задачи Коши (1.1), (4.1), (4.4) с сеточными начальными данными (4.2) при параметрах  $\beta = 1$  (а, б) и  $\beta = -1$  (в) в моменты времени  $t = 0, t = 0.2, t = 0.4$  (а, б) и  $t = 0.4, t = 0.6, t = 1.6$  (в)

Решение этой задачи в случае конденсации ( $\beta = 1$ ) приведено на рис. 5а и 5б, а в случае испарения ( $\beta = -1$ ) — на рис. 5в. На начальном этапе решения данной задачи на переднем фронте каждой капли от ее основания начинает формироваться сильный разрыв. Верхняя граница этого разрыва постепенно “поглощает” непрерывную волну понижения на поверхности капли, и к моменту времени  $t = 0.4$  (линия 3 на рис. 5а и 5в) волна понижения полностью исчезает. С этого момента сильный разрыв на фронте капли начинает распространяться по волне повышения на задней поверхности следующей капли.

## 5. Заключение

В отличие от стандартной схемы CABARET (1.4)–(1.10), предложенная в данной работе модифицированная схема, при построении которой использован метод расщепления по физическим процессам (2.3), (2.4), является G-монотонной на первом шаге метода расщепления при аппроксимации однородного уравнения (2.1), что обеспечивает отсутствие в ней нефизических осцилляций и одновременно не препятствует формированию новых локальных экстремумов в разностном решении, если такие экстремумы возникают в точном решении неоднородного уравнения (1.1). Приведенные тестовые расчеты подтверждают преимущество модифицированной схемы CABARET.

## Литература

1. Iserles A. Generalized leapfrog methods // IMA J. of Numerical Analysis. — 1986. — Vol. 6, № 3. — P. 381–392.
2. Головизнин В.М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математическое моделирование. — 1998. — Т. 10, № 1. — С. 86–100.
3. Головизнин В.М., Самарский А.А. Некоторые свойства разностной схемы “Кабаре” // Математическое моделирование. — 1998. — Т. 10, № 1. — С. 101–116.
4. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. — М.: Наука, 1978.
5. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов Ф.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М: Физматлит, 2001.
6. Головизнин В.М. Балансно-характеристический метод численного решения уравнений газовой динамики // Докл. АН. — 2005. — Т. 403, № 4. — С. 1–6.
7. Woodward P., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comp. Phys. — 1984. — Vol. 54, № 1. — P. 115–173.
8. Остапенко В.В. О монотонности балансно-характеристической схемы // Математическое моделирование. — 2009. — Т. 21, № 7. — С. 29–42.
9. Остапенко В.В. О сильной монотонности схемы “КАБАРЕ” // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2012. — Т. 52, № 3. — С. 447–460. — Перевод: Ostapenko V.V. On the strong monotonicity of the CABARET // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2012. — Vol. 52, № 3. — P. 387–399.
10. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. New efficient high-resolution method for nonlinear problems in aeroacoustics // AIAA J. — 2007. — Vol. 45, № 12. — P. 2861–2871.

11. **Karabasov S.A., Berloff P.S., and Goloviznin V.M.** Cabaret in the ocean gyres // *Ocean Modelling*. — 2009. — Vol. 30, № 2. — P. 155–168.
12. **Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А.** Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов — М.: Изд-во Московского университета, 2013.
13. **Ковыркина О.А., Остапенко В.В.** О монотонности двухслойной по времени схемы кабаре // *Математическое моделирование*. — 2012. — Т. 24, № 9. — С. 97–112. — Перевод: Kovyorkina O.A., Ostapenko V.V. On monotonicity of two-layer in time cabaret scheme // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2013. — Vol. 5, № 2. — P. 180–189.
14. **Ковыркина О.А., Остапенко В.В.** О монотонности схемы CABARET, аппроксимирующей гиперболическое уравнение со знакопеременным характеристическим полем // *Журн. вычисл. матем. и мат. физики*. — 2016. — Т. 56, № 5. — С. 796–815. — Перевод: Kovyorkina O.A., Ostapenko V.V. Monotonicity of the CABARET scheme approximating a hyperbolic equation with a sign-changing characteristic field // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2016. — Vol. 56, № 5. — P. 783–801.
15. **Ковыркина О.А., Остапенко В.В.** О монотонности схемы CABARET в многомерном случае // *Докл. АН*. — 2015. — Т. 462, № 4. — С. 385–390. — Перевод: Kovyorkina O.A., Ostapenko V.V. On the monotonicity of the CABARET scheme in the multidimensional case // *Doklady Mathematics*. — 2015. — Vol. 91, № 3. — P. 323–328.
16. **Зюзина Н.А., Остапенко В.В.** О монотонности схемы CABARET, аппроксимирующей скалярный закон сохранения с выпуклым потоком // *Докл. АН*. — 2016. — Т. 466, № 5. — С. 513–517. — Перевод: Zyuzina N.A., Ostapenko V.V. The monotonicity of the CABARET scheme approximating a scalar conservation law with a convex flux // *Doklady Mathematics*. — 2016. — Vol. 93, № 1. — P. 69–73.
17. **Зюзина Н.А., Остапенко В.В.** Монотонная аппроксимация схемой CABARET скалярного закона сохранения в случае знакопеременного характеристического поля // *Докл. АН*. — 2016. — Т. 470, № 4. — С. 375–379.
18. **Годунов С.К.** Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // *Мат. сб.* — 1959. — Т. 47, № 3. — С. 271–306.
19. **Harten A.** High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // *J. Comput. Phys.* — 1983. — Vol. 49. — P. 357–393.
20. **Harten A.** On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes // *SIAM J. Numer. Anal.* — 1984. — Vol. 21, № 1. — P. 1–23.
21. **Nessyahu H., Tadmor E.** Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws // *J. Comput. Phys.* — 1990. — Vol. 87, № 2. — P. 408–463.
22. **Jiang G.S., Shu C.W.** Efficient implementation of weighted ENO schemes // *J. Comput. Phys.* — 1996. — Vol. 126, iss. 1. — P. 202–228.
23. **Марчук Г.И.** Методы расщепления. — М.: Наука, 1988.
24. **Nakoryakov V.E., Ostapenko V.V., and Bartashevich M.V.** Heat and mass transfer in the liquid film on a vertical wall in roll-wave regime // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. — 2012. — Vol. 55, № (23, 24). — P. 6514–6518.
25. **Накоряков В.Е., Остапенко В.В., Барташевич М.В.** Исследование катящихся волн на поверхности стекающей пленки конденсата // *Докл. АН*. — 2014. — Т. 454, № 5. — С. 540–544.

26. **Nakoryakov V.E., Ostapenko V.V., and Bartashevich M.V.** Rolling waves on the surface of a thin layer of viscous liquid at phase transition // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* — 2015. — Vol. 89. — P. 846–855.
27. **Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кобринский И.М.** Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // *Математическое моделирование.* — 2003. — Т. 15, № 9. — С. 29–48.

*Поступила в редакцию 5 мая 2017 г.,  
в окончательном варианте 6 сентября 2017 г.*

### Литература в транслитерации

1. **Iserles A.** Generalized leapfrog methods // *IMA J. of Numerical Analysis.* — 1986. — Vol. 6, № 3. — P. 381–392.
2. **Goloviznin V.M., Samarskii A.A.** Raznostnaya аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // *Математическое моделирование.* — 1998. — Т. 10, № 1. — С. 86–100.
3. **Goloviznin V.M., Samarskii A.A.** Nekotorye svoystva raznostnoj skhemy “Kabare” // *Математическое моделирование.* — 1998. — Т. 10, № 1. — С. 101–116.
4. **Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N.** Sistemy kvazilinejnyh uravnenij. — М.: Nauka, 1978.
5. **Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov F.Yu.** Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravnenij. — М.: Fizmatlit, 2001.
6. **Goloviznin V.M.** Balansno-harakteristicheskij metod chislennogo resheniya uravnenij gazovoj dinamiki // *Dokl. AN.* — 2005. — Т. 403, № 4. — С. 1–6.
7. **Woodward P., Colella P.** The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // *J. Comp. Phys.* — 1984. — Vol. 54, № 1. — P. 115–173.
8. **Ostapenko V.V.** O monotonnosti balansno-harakteristicheskoy skhemy // *Математическое моделирование.* — 2009. — Т. 21, № 7. — С. 29–42.
9. **Ostapenko V.V.** O sil’noj monotonnosti skhemy “KABARE” // *Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki.* — 2012. — Т. 52, № 3. — С. 447–460. — *Perevod: Ostapenko V.V. On the strong monotonicity of the CABARET // Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 2012. — Vol. 52, № 3. — P. 387–399.
10. **Karabasov S.A., Goloviznin V.M.** New efficient high-resolution method for nonlinear problems in aeroacoustics // *AIAA J.* — 2007. — Vol. 45, № 12. — P. 2861–2871.
11. **Karabasov S.A., Berloff P.S., and Goloviznin V.M.** Cabaret in the ocean gyres // *Ocean Modelling.* — 2009. — Vol. 30, № 2. — P. 155–168.
12. **Goloviznin V.M., Zaicev M.A., Karabasov S.A., Korotkin I.A.** Novye algoritmy vychislitel’noj gidrodinamiki dlya mnogoprocessornyh vychislitel’nyh kompleksov — М.: Izd-vo Moskovskogo universiteta, 2013.
13. **Kovyorkina O.A., Ostapenko V.V.** O monotonnosti dvushlojnoj po vremeni skhemy kabare // *Математическое моделирование.* — 2012. — Т. 24, № 9. — С. 97–112. — *Perevod: Kovyorkina O.A., Ostapenko V.V. On monotonicity of two-layer in time cabaret scheme // Mathematical Models and Computer Simulations.* — 2013. — Vol. 5, № 2. — P. 180–189.

14. **Kovyrkina O.A., Ostapenko V.V.** O monotonnosti skhemy CABARET, approksimiruyushchej giperbolicheskoe uravnenie so znakoperemennym harakteristicheskim polem // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2016. — T. 56, № 5. — S. 796–815. — Perevod: Kovyrkina O.A., Ostapenko V.V. Monotonicity of the CABARET scheme approximating a hyperbolic equation with a sign-changing characteristic field // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 56, № 5. — P. 783–801.
15. **Kovyrkina O.A., Ostapenko V.V.** O monotonnosti skhemy CABARET v mnogomernom sluchae // Dokl. AN. — 2015. — T. 462, № 4. — S. 385–390. — Perevod: Kovyrkina O.A., Ostapenko V.V. On the monotonicity of the CABARET scheme in the multidimensional case // Doklady Mathematics. — 2015. — Vol. 91, № 3. — P. 323–328.
16. **Zyuzina N.A., Ostapenko V.V.** O monotonnosti skhemy CABARET, approksimiruyushchej skalyarnyj zakon sohraneniya s vypuklym potokom // Dokl. AN. — 2016. — T. 466, № 5. — С. 513–517. — Perevod: Zyuzina N.A., Ostapenko V.V. The monotonicity of the CABARET scheme approximating a scalar conservation law with a convex flux // Doklady Mathematics. — 2016. — Vol. 93, № 1. — P. 69–73.
17. **Zyuzina N.A., Ostapenko V.V.** Monotonnaya approksimaciya skhemoj CABARET skalyarnogo zakona sohraneniya v sluchae znakoperemennogo harakteristicheskogo polya // Dokl. AN. — 2016. — T. 470, № 4. — S. 375–379.
18. **Godunov S.K.** Raznostnyj metod chislennogo rascheta razryvnyh reshenij uravnenij gidrodinamiki // Mat. sb. — 1959. — T. 47, № 3. — S. 271–306.
19. **Harten A.** High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. — 1983. — Vol. 49. — P. 357–393.
20. **Harten A.** On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes // SIAM J. Numer. Anal. — 1984. — Vol. 21, № 1. — P. 1–23.
21. **Nessyahu H., Tadmor E.** Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. — 1990. — Vol. 87, № 2. — P. 408–463.
22. **Jiang G.S., Shu C.W.** Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. — 1996. — Vol. 126, iss. 1. — P. 202–228.
23. **Marchuk G.I.** Metody rasshchepleniya. — M.: Nauka, 1988.
24. **Nakoryakov V.E., Ostapenko V.V., and Bartashevich M.V.** Heat and mass transfer in the liquid film on a vertical wall in roll-wave regime // Int. J. Heat and Mass Transfer. — 2012. — Vol. 55, № (23, 24). — P. 6514–6518.
25. **Nakoryakov V.E., Ostapenko V.V., Bartashevich M.V.** Issledovanie katyashchihsva voln na poverhnosti stekayushchej plenki kondensata // Dokl. AN. — 2014. — T. 454, № 5. — S. 540–544.
26. **Nakoryakov V.E., Ostapenko V.V., and Bartashevich M.V.** Rolling waves on the surface of a thin layer of viscous liquid at phase transition // Int. J. Heat and Mass Transfer. — 2015. — Vol. 89. — P. 846–855.
27. **Goloviznin V.M., Karabasov S.A., Kobrinskii I.M.** Balansno-harakteristicheskie skhemy s razdelennymi konservativnymi i potokovymi peremennymi // Matematicheskoe modelirovanie. — 2003. — T. 15, № 9. — S. 29–48.