

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТРЕЩИНЫ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА ПО ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА УПРУГИХ СРЕД

И. В. Симонов

(Москва)

Изучается движение разреза по линии склейки двух различных упругих полу плоскостей под действием переменных касательных усилий. Аналогично случаю однородной среды [1—3] закон движения края предполагается известным. К особенностям рассматриваемой физической ситуации можно отнести несимметричный характер решения при симметричном распределении нагрузок и зависимость числа возбуждаемых граничных волн Рэлея (две, одна, отсутствуют) от соотношений упругих параметров. В пространстве изображений задача расщепляется на скалярную задачу сопряжения двух функций, отражающую связь скачка смещений на разрезе и касательного напряжения на продолжении разреза, и вопрос последующего обращения формулы для изображения нормального напряжения. Решение построено методом факторизации, распространенным на задачи с подвижной точкой раздела граничных условий в [2, 3]. Проведено дополнительное исследование свойств граничной функции Рэлея для соприкасающихся упругих тел. Показано, что условие непрерывности по Гельдеру входных функций достаточно для выделения асимптотик у края разреза, подобных случаю стационарного движения разреза [4]. При преобразованиях свертки использовались методы контурного интегрирования с применением теории вычетов, что позволило, в частности, несколько упростить результаты [2]. При рассмотрении частных видов нагружения затронут вопрос страгивания трещины. Решение автоматической задачи дано в [5].

1. Постановка и общее решение задачи. На прямолинейной границе раздела составной упругой плоскости имеется полубесконечный разрез (трещина поперечного сдвига). Край разреза начиная с момента времени $t = 0$ движется по закону $x_1 = l(t)$, $l' \geq 0$ ($l' = dl/dt$, $l(0) = L$). Сопротивление сдвигу соприкасающихся берегов разреза отсутствует; при $x_1 > l(t)$, $x_2 = 0$ выполнены условия полного контакта (x_1, x_2 — декартова система координат).

Снимем внешние динамические поля напряжений и смещений, существующие (и известные) как решение соответствующей плоской задачи без трещины. Возникающие в результате дифракции дополнительные поля напряжений $\sigma_{km}(x_1, x_2, t)$ и смещений $u_k(x_1, x_2, t)$ должны удовлетворять динамическим уравнениям линейной теории упругости ($x_2 \neq 0$) и следующим граничным условиям ($x_2 = 0$, $x \equiv x_1$):

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{12} &= \tau_-(x, t), \quad [\sigma_{12}] = [\sigma_{22}] = [u_2] = 0, \quad x < l, \\ [\sigma_{12}] &= [\sigma_{22}] = [u_1] = [u_2] = 0, \quad x > l, \\ 0 \leq W < \infty &\Rightarrow |\sigma_{km}| < C_0 \{(x-l)^2 + x_2^2\}^{-1/4}, \quad x \rightarrow l, \quad x_2 \rightarrow 0 \\ &(k, m = 1, 2). \end{aligned}$$

Здесь квадратные скобки означают скачок величины при переходе через границу раздела; W — поток энергии в край разреза; $C_0 > 0$ — постоянная.

Начальные условия нулевые. Предполагается, что непрерывность перемещения u_2 при $x < l$, $x_2 = 0$ (т. е. условие неотрицательности контактного давления) можно обеспечить, добавляя к решению в целом статическое однородное напряженное состояние.

Поставленная начально-краевая задача для линейных уравнений гиперболического типа может рассматриваться в различных классах входных функций вплоть до распределений (фундаментальные решения). Единственность решения для гладких функций τ_-, l' можно показать аналогично [6, 7]. При этом требование неотрицательности потока энергии W существенно.

Будем обозначать большими буквами преобразования Фурье по x и Лапласа по t с параметрами q и s . Из соотношений между изображениями перемещений и напряжений на границе упругой полуплоскости [3],

принимая во внимание условия (1.1), исключим $U(q, s)$ и $\Sigma(q, s)$ (изображения функций $\sigma(x, t) = \sigma_{22}(x, 0, t)$ и $u(x, t) = u_2(x, 0, t)$) и получим задачу сопряжения функций $F_-(q, s)$ и $T_+(q, s)$ — изображений скачка смещений $f_- = [u_1]$ на разрезе и касательных напряжений на продолжении разреза $\tau_+ = \sigma_{12}(x, 0, t)H(x - l)$:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} F_- &= G(T_+ + T_-), \\ qG &= S/P, \quad P(i\xi) = 2\mu_1[\beta_{11}(1 - \beta_1)R_2 + \mu\beta_{12}(1 - \beta_2)R_1], \\ S(i\xi) &= (\mu - 1)^2\beta_{11}\beta_{12}\beta_{21}\beta_{22} + (\mu\beta_1 - \beta_2)^2 - \beta_{11}\beta_{21}(\mu - \beta_2)^2 - \\ &\quad - \beta_{12}\beta_{22}(1 - \mu\beta_1)^2 - \mu(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)(\beta_{11}\beta_{22} + \beta_{12}\beta_{21}), \\ R_j(i\xi) &= \beta_{1j}\beta_{2j} - \beta_j^2, \quad \beta_{kj} = \sqrt{1 + (c_{kj}\xi)^{-2}}, \quad 2\beta_j = 1 + \beta_{2j}^2, \\ \xi &= q/s, \quad \mu = \mu_1/\mu_2 \quad (\tau_-(x, t) = 0, \quad x > l). \end{aligned}$$

Здесь $H(x)$ — функция Хевисайда; μ_j — модули сдвига; c_{1j}, c_{2j} — скорости волн расширения и сдвига; индекс $j = 1, 2$ отмечает среды 1 и 2, заполняющие полуплоскости $x_2 > 0$ и $x_2 < 0$.

После решения задачи (1.2) напряжение σ и смещение u определяются в результате обращения формул (1.3):

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \Sigma &= iqDF_-/S, \quad U = iEF_-/S, \\ D(i\xi) &= 2\mu_1[(\beta_{11}\beta_{21} - \beta_1)R_2 - (\beta_{12}\beta_{22} - \beta_2)R_1], \\ E(i\xi) &= \mu(\beta_{12}(1 - \beta_2)(\beta_{11}\beta_{21} - \beta_1) + \beta_{11}(1 - \beta_1)(\beta_{12}\beta_{22} - \beta_2)]. \end{aligned}$$

Радикалы $\beta_{kj} = \xi^{-1} \sqrt{\xi^2 + c_{kj}^{-2}}$ униформизуем, проводя разрезы $]-\infty, -ic_{kj}^{-1}] \cup [ic_{kj}^{-1}, \infty[$ в ξ -плоскости и полагая $\sqrt{\xi^2 + c_{kj}^{-2}} = c_{kj}^{-1}$ при $\xi = 0$.

Ограничимся поиском (и анализом) функций τ_+, f_-, σ и u , изображения которых удовлетворяют равенствам (1.2), (1.3), эквивалентным, когда преобразования допустимы, всем условиям (1.1), за исключением энергетического. Последняя оценка в (1.1) принимается во внимание в процессе построения решения [1—3].

Попытаемся найти представление коэффициента задачи (1.2) в виде

$$(1.4) \quad G = G_+G_-, \quad P_{\pm} = 1/G_{\pm}$$

при условии, что оригиналы функций G_{\pm}, P_{\pm} обращаются в нуль при $x < < v_1t$, а функций G_-, P_- — при $x > v_2t$ ($v_2 < l \cdot(t) < v_1$) [2]. Предварительно изучим характер и расположение особых точек функций G и G^{-1} . Введем обозначения

$$a = \min c_{1j}^{-1}, \quad b = \max c_{2j}^{-1}, \quad c_R = \min c_{Rj}, \quad c_R^* = \max c_{Rj}, \quad j = 1, 2,$$

где c_{Rj} — единственные положительные корни уравнений Рэлея $R_j(v^{-1}) = 0$.

В [8] доказаны утверждения: 1) при малых действительных значениях $v = (i\xi)^{-1}$ функция $S(v^{-1}) < 0$, и если $S(b) \geq 0$, то существуют простые (единственные в плоскости ξ) нули этой функции $v = \pm c_S$, $0 < c_S \leq \leq b^{-1}$ — скорости граничных волн Стоунли, распространяющихся вдоль линии склейки разнородных упругих тел; 2) если $S(b) < 0$, то нули у функции $S(i\xi)$ в комплексной (разрезанной) плоскости ξ отсутствуют.

Наличие действительных нулей у функции $P(i\xi)$ указывает на существование граничных волн Рэлея, распространяющихся вдоль линии контакта различных упругих тел с проскальзыванием [9]. В дополнение к [8, 9], используя принцип аргумента [10], можно доказать следующие утверждения: 3) при малых действительных значениях v функция $P(v^{-1}) > > 0$, и если $P(b) \leq 0$, то имеются простые (и единственные) нули $v = = \pm c_P$ этой функции, где величина c_P заключена в интервале $c_R < c_P < < c_R^*$, если $c_R^* \leq b^{-1}$, и в полуинтервале $c_R < c_P \leq \leq b^{-1}$, если $c_R^* > b^{-1}$;

4) при условии $P(b) > 0$ нулей этой функции в плоскости ξ нет; 5) при $c_{11} = c_{12}$ она в пределе обращается в нуль (порядка $1/2$) в точках ветвления $v = \pm c_{11}$; 6) если существует нуль $c_S (S(b) \geq 0)$, то существует нуль c_P , причем $c_P < c_S \leq b^{-1}$ (случай 1). Если $S(b) < 0$, т. е. отсутствует граничная волна Стоунли, то существует область в пространстве допустимых упругих параметров сред 1 и 2, где $P(b) \leq 0$ (случай 2). Наконец, в области упругих параметров, где выполнено неравенство $P(b) > 0$, имеет место $S(b) < 0$, т. е. одновременно отсутствуют оба типа граничных волн (случай 3).

Заметим, что, если $c_R^* \leq b^{-1}$ (близкие по скоростям поперечных волн среды), нуль c_P всегда существует. Он может отсутствовать лишь при $b^{-1} < c_R^*$, т. е. для достаточно различающихся по свойствам материалов, например, когда одна среда жесткая [9].

Выделим нули, полюсы и точку ветвления $\xi = \infty$ функции G , представляя ее в виде произведения

$$(1.5) \quad G = AG_0G_1, \quad G_1 = G/(AG_0),$$

$$A = -\frac{1}{4\nu_1} (3 - 4\nu_1 + \mu) (3\mu + 1 - 4\mu\nu_2) / (1 - \nu_1 + \mu - \mu\nu_2)$$

(ν_j — коэффициенты Пуассона).

В случаях 1—3 выберем согласно утверждению 6

$$(1.6) \quad G_0 = \frac{h^2 + \xi^2}{d^2 + \xi^2} \frac{s^{-1}}{\sqrt{b^2 + \xi^2}}, \quad G_0 = s^{-1} \frac{\sqrt{h^2 + \xi^2}}{d^2 + \xi^2}, \quad G_0 = \frac{s^{-1}}{\sqrt{b^2 + \xi^2}},$$

$$h = c_S^{-1}, \quad d = c_P^{-1}.$$

Каждый последующий случай в (1.6) получается из предыдущего предельными переходами: $h \rightarrow b$ ($1 \rightarrow 2$), $d \rightarrow b$ ($2 \rightarrow 3$). Это утверждение остается в силе и по отношению к решению задачи (непосредственная проверка). Поэтому все рассуждения проводятся ниже для наиболее общего случая 1, когда существуют обе упомянутые граничные волны Рэля. Математически переход $1 \rightarrow 3$ сопровождается уменьшением числа полюсов функции G_0 или G_0^{-1} .

Остающаяся после выделения особенностей функция $G_1(i\xi)$ регулярна в плоскости ξ с разрезами $[\pm ia, \pm ib]$ вдоль мнимой оси $G_1 = 1 + O(\xi^{-2})$ при $\xi \rightarrow \infty$, следовательно, факторизацию функции G_1 можно осуществить по правилу [3]

$$(1.7) \quad G_1 = \kappa_+(i\xi) \kappa_-(i\xi), \quad \kappa_{\pm} = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(\alpha) d\alpha}{\alpha \mp i\xi} \right\},$$

$$\varphi(\alpha) = -\arg G_1(-\alpha + i0), \quad a \leq \alpha \leq b,$$

$$G_1 = \frac{d^2 + \xi^2 \beta_{21} S(i\xi)}{h^2 + \xi^2 AP(i\xi)} \rightarrow \frac{b^2 (\xi^2 + c_{R1}^{-2})}{4(1-\nu) R_1 \xi^4} \quad (\text{однородная среда}),$$

$$G_1 = \frac{4(1-\nu_1)}{3-4\nu_1} \left(\frac{\xi^2}{b^2} + 1 \right) (1 - \beta_{11}^{-1} \beta_{21}^{-1}) \quad (\text{среда 2 жесткая}).$$

Функция $\kappa_+(i\xi) \equiv \kappa(i\xi) = \kappa_-(-i\xi)$ аналитична в плоскости ξ с разрезом $[-ib, -ia]$, носители оригиналов функций κ_{\pm} сосредоточены в областях $t/b \leq x \leq t/a$ и $-t/a \leq x \leq -t/b$, $\kappa_+ \rightarrow 1$ при $\xi \rightarrow \infty$.

Функция $\varphi(\alpha)$ определяется различными выражениями в зависимости от относительного расположения скоростей c_{kj} , совпадает с аналогичной функцией для однородной среды [2, 3],

$$\varphi(\alpha) = \arctg \sqrt{\frac{\alpha^4}{(b^2 - \alpha^2)(\alpha^2 - c_{11}^{-2})}} \rightarrow \arcsin(\alpha/b), \quad \nu_1 \rightarrow 1/2$$

для жесткой среды 2, вообще говоря, имеет разрывы производной ($a < \alpha < b$). Она ответственна за рефракцию продольных и поперечных волн на границе раздела, порождает в решении многочисленные поверхности разрыва решения — фронты волн от точечного источника, однако, будучи свернута с гладкой нагрузкой, дает гладкое решение. На анализе волновой картины здесь останавливаться не будем (он весьма сложен). Для облегчения вывода конкретных выражений для $\varphi(\alpha)$ укажем только, что величины $\alpha\beta_{hj} > 0$, $i\beta_h i\beta_{mn} > 0$ на правой (левой) стороне своих разрезов в верхней (нижней) полуплоскостях $\xi = \xi' + i\alpha$; на противоположных сторонах разрезов они принимают значения с обратным знаком.

Функция $\kappa(i\xi)$ может иметь корневые особенности. Это связано с тем, что отношение S/P в общем случае не содержит радикала в качестве множителя (или делителя) и при выделении ветвления в (1.6) взят произвольный радикал (он не порождает особенностей у функций κ , κ^{-1} лишь для однородной среды). Используя другой радикал, например $\sqrt{a^2 + \xi^2}$, получим в результате другую функцию

$$(1.8) \quad \kappa_0(\alpha) = \sqrt{\left| \frac{a-\alpha}{b-\alpha} \right|} \kappa(\alpha) \quad (\text{Im } \alpha = 0).$$

На процесс построения решения произвол в способе устранения ветвления не влияет, но при анализе будем учитывать (1.8), (1.9). Исследование функции $\varphi(\alpha)$ и интеграла типа Коши в (1.7) приводит к таким результатам:

однородная плоскость

$$\varphi(\alpha) = 0, \quad \kappa(\alpha), \quad \kappa^{-1}(\alpha) \neq 0 \quad (\alpha = a, b),$$

жесткая среда 2 в смысле $c_{21}^2 \mu_1 / (c_{22}^2 \mu_2) \rightarrow 0$ или $c_{11} = c_{12}$

$$(1.9) \quad \varphi(\alpha) = \pi/2, \quad \kappa_0(\alpha), \quad \kappa_0^{-1}(\alpha) \neq 0 \quad (\alpha = a, b),$$

в остальных вариантах ($\kappa_1 = |b - \alpha|^{-1/2} \kappa$)

$$\varphi(\alpha) = 0, \quad \pi/2, \quad \kappa_1(\alpha), \quad \kappa_1^{-1}(\alpha) \neq 0 \quad (\alpha = a, b).$$

Ограничимся решением задачи в диапазоне скоростей $0 \leq l < c_p$ (случай 1, 2), $0 \leq l < b^{-1}$ (случай 3). Имея в виду (1.5)–(1.7), функции G_{\pm} определим равенством

$$(1.10) \quad G_{\pm} = s^{-1/2} \frac{h \mp i\xi}{d + i\xi} \frac{\kappa_{\pm}(i\xi)}{\sqrt{b \mp i\xi}}.$$

Из формул для оригиналов, предъявленных ниже, следует, что (1.10) есть решение вопроса факторизации (1.4).

По формулам обращения изображений вида $f_1(s)f_2(q/s)$ [3] при использовании правила дифференцирования сверток обобщенных функций [11] приведем оригинал $g_+(x, t)$ к виду

$$(1.11) \quad g_+ = \frac{H(x)}{\pi \sqrt{\pi x}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_a^{t/x} Q(v) H(b-v) dv + H\left(\frac{t}{x} - b\right) \int_b^{t/x} Q(v) dv \right] =$$

$$= \frac{H(x)}{\sqrt{\pi x}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[1 - \frac{(d-h)\kappa(d)H(dx-t)}{\sqrt{(d-b)(d-t/x)}} \right] H\left(\frac{t}{x} - b\right) + \frac{1}{\pi} H\left(b - \frac{t}{x}\right) \int_a^{t/x} Q(v) dv \right\},$$

$$Q(v) = Q\left(v; \frac{t}{x}\right) = \frac{h-v}{d-v} \frac{\kappa(v) \sin \varphi(v) H(v-a)}{\sqrt{|(b-v)(t/x-v)|}} \quad \left(\varphi(v) = \frac{\pi}{2}, \quad v > b \right).$$

Все операции рассматриваются как операции над обобщенными функциями, совпадающие с обычными операциями, если функции совпадают с обычными функциями; в частности, значения особого интеграла совпадают с его главным значением, если плотность непрерывна по Гельдеру [11]; под интегрированием в пределах от α_1 до α_2 понимается интегрирование от $\alpha_1 - 0$ до $\alpha_2 + 0$.

Равенство (1.11) выводится при помощи теории вычетов. Поскольку этот прием выделения особенностей подынтегральной функции и вычисления интегралов будет использован неоднократно, покажем его применение подробнее. Найдем предельное значение интеграла по контуру $C = C_R + C_v$ в плоскости $Z = t/z$, $z = x + iy$ (рис. 1) при $R \rightarrow \infty$ (C_R — окружность большого радиуса R с фиксированным центром) от вспомогательной функции

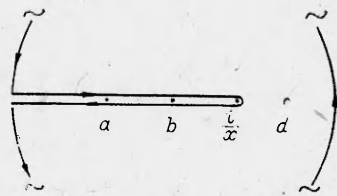


Рис. 1

$$Q_0(Z) = \frac{h-Z}{d-Z} \frac{\kappa(Z)}{\sqrt{(Z-b)(Z-t/x)}} \sim \frac{1}{Z} \text{ при } Z \rightarrow \infty \text{ (униформизация).}$$

Имеем

$$\kappa(Z^\pm) = e^{\pm i\varphi(v)} \kappa(v), \quad a < v < b, \quad \kappa(Z^\pm) = \kappa(v), \quad v \notin [a, b],$$

$$\sqrt{(Z^\pm - b)(Z^\pm - t/x)} = \pm i \sqrt{(v-b)(t/x - v)},$$

$$b < v < t/x, \quad Z^\pm = v \pm i0, \quad Q_0(Z^+) - Q_0(Z^-) = 2iQ(v; t/x),$$

$$\int_C = \int_{C_R} + \int_{C_v} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 2\pi i + 2i \int_a^{t/x} Q(v) dv = 2\pi i \frac{(d-h)\kappa(d)}{\sqrt{(d-b)(d-t/x)}} H\left(d - \frac{t}{x}\right).$$

Последнее равенство использовано при выводе (1.11). Аналогичным путем получим формулу для оригинала

$$p_+ = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{1}{c_P} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{H(x)}{\sqrt{\pi x}} \left[\int_a^x \left[1 - \sqrt{\frac{h-b}{h-t/x} \frac{H(hx-t)}{\kappa(h)}} \right] H(t-bx) - \right. \\ \left. - \frac{1}{b} \int_a^{t/x} \frac{\sin \varphi(v)}{\kappa(v)(h-v)} \sqrt{\frac{b-v}{t/x-v}} dv H\left(b - \frac{t}{x}\right) \right].$$

Формулы для оригиналов g_- и p_- получаются из выражений для g_+ и p_+ заменой x на $-x$. Раскроем свертку:

$$(1.12) \quad \psi(x, t) = g_{+**} \tau_- = J_1 + J_2 + J_3, \\ J_1 = \int_{x-t/b}^x \frac{\tau_-(\xi, t-bx+b\xi)}{\sqrt{\pi(x-\xi)}} d\xi, \\ J_2 = -A_0 \int_{x-t/b}^x \int_{\xi d}^{t_0} \frac{\tau'_-(\xi, \tau-xd+t)}{\sqrt{\tau-\xi d}} d\tau d\xi = \\ = -A_0 \int_{td}^{t/b} (\xi d - t)^{-1/2} \int_0^{t_1} \tau'_-(x-\xi + \tau/d, \tau) d\tau d\xi, \\ A_0 = \frac{(d-h)\kappa(d)}{\sqrt{\pi(d-b)}}, \quad t_0 = (d-b)x + b\xi, \quad t_1 = \frac{t-b\xi}{1-b/d}, \\ J_3 = \int_a^b \frac{F_0(v)}{v \sqrt{\pi v}} \int_0^t \sqrt{\tau} \tau'_-\left(x - \frac{\tau}{v}, t - \tau\right) d\tau dv, \\ F_0 = \frac{1}{\pi} \int_a^v Q(y; v) dy H(b-v) H(v-a), \quad \tau'_-(f, g) = \frac{\partial \tau_-}{\partial g}(f, g)$$

(символ * * означает свертку по переменным t, x).

Поскольку реализована факторизация (1.4), решение задачи принимает вид [2, 3]

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \tau_+ &= -p_+ ** [\psi H(x-l)], \quad f_- = Ag_- * * [\psi H(l-x)], \\ \sigma &= \sigma^0 ** [\psi H(l-x)], \quad u = u^0 ** [\psi H(l-x)], \\ \sigma^0 &= -A \frac{\partial w^0}{\partial x}, \quad W^0 = \frac{DG_-}{S}, \quad U^0 = \frac{iAEG_-}{S}. \end{aligned}$$

Перед обращением функции W^0 заметим, что $D \equiv 0$, $\sigma = 0$ для однородной плоскости. По формулам обращения [3] имеем

$$w^0 = \lim_{y \rightarrow +0} [W_1(z, t) - W_1(\bar{z}, t)], \quad W_1 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{iD_0(Z)}{2\pi z} \frac{h+Z}{d+Z} \frac{\kappa_-(Z)}{\sqrt{b+Z}} * \frac{t_+^{-1/2}}{\sqrt{\pi}},$$

где символ * означает свертку по переменной t ; t_+^{λ} — обобщенная функция [11]. Радикалы $\beta_{h, \pm}$ входят в отношение $D/S = D_0$ лишь в виде произведений $\beta_{h, \pm} \beta_{m, \pm}$, т. е.

$$\begin{aligned} D_0 &\rightarrow \Psi_0(v) \pm i\Psi(v), \quad Z \rightarrow Z^{\pm} = x \pm i0, \quad a < v = t/x < b, \\ D_0 &\rightarrow \Psi_0(v) \mp i\Psi(v), \quad Z \rightarrow Z^{\pm}, \quad -b < v < -a. \end{aligned}$$

Здесь $\Psi(v) = \bar{\Psi}(-v)$ и $\Psi_0(v)$ — действительные функции, вычисляемые исходя из определений (1.2), (1.3), и функция $D_0(Z)$ непрерывна при переходе через действительную ось в плоскости Z в остальных точках. Функция $G(Z)$ рвется на разрезе $-b \leq v \leq -a$ (за счет $\kappa(Z)$) и на разрезе $v < -b$ (за счет $\sqrt{b+Z}$). В результате вычислений получим

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= A \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{t/x} \frac{F_2(v) dv}{\sqrt{|t/x-v|}} + F_3\left(\frac{t}{x}\right) \right] \equiv A \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} [w_1 H(x) + w_2 H(-x)], \\ F_2(v) &= \frac{h+v}{d+v} \left[\frac{\Psi(v)}{\sqrt{b+v}} H(v-a) H(b-v) + \frac{\Phi(v)}{\sqrt{b+v}} H(-a-v) H(b+v) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{D(v)}{S(v)} \frac{H(-b-v)}{\sqrt{-b-v}} \right] \kappa_-(v), \\ F_3(v) &= \frac{2h\kappa_-(h)D(h)H(v-h)}{\sqrt{b+h}(d+h)S^*(h)\sqrt{v-h}}, \quad \Phi = \Psi_0(v) \sin \varphi(v) - \Psi(v) \cos \varphi(v). \end{aligned}$$

Напряжение σ можно представить в виде суммы

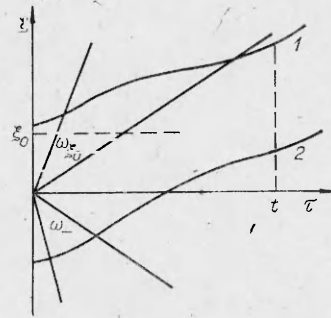
$$(1.14) \quad \begin{aligned} \sigma &= \sigma^+ H(x-l) + \sigma^- H(l-x), \\ \sigma^+ &= A \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \int_0^{t/a} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} w_1(\tau, \xi) \psi(x-\xi, t-\tau) d\tau d\xi, \\ \sigma^- &= \sigma^+ + A \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \int_0^t \int_{\lambda_2}^0 w_2(\tau, \xi) \psi(x-\xi, t-\tau) d\xi d\tau, \\ \lambda_1 &= [x - l(t-\tau)] H[x - l(t-\tau)], \\ \lambda_2 &= -(\tau/a) H[\xi + l(t-\tau) - x] + [x - l(t-\tau)] H[\xi + \tau/a]. \end{aligned}$$

Вклад в нормальное напряжение на продолжении разреза дает интегрирование по области, лежащей выше кривой $1: \xi = x - l(t-\tau)$, $x > l(t)$, а на разрезе — по многоугольной области в четвертьплоскости $\xi > 0$, $\tau > 0$ и по криволинейному треугольнику в четвертьплоскости $\xi < 0$, $\tau > 0$, ограниченному снизу кривой $2: \xi = x - l(t-\tau)$, $x < l(t)$ и линией $\xi = -\tau/a$ (рис. 2).

2. Асимптотики функций вблизи края трещины. Исследуем поведение решения при $x \rightarrow l(t)$ в момент времени t , когда величины $\psi(x, t)$, $l(t)$ — непрерывные по Гельдеру функции t и x . Для непрерывности по

Гельдеру функции $\psi(x, t)$ достаточно потребовать, чтобы этим свойством обладала функция $\tau_-(x, t)$ во всей области определения.

Области интегрирования в первых двух формулах (1.13) представляют собой треугольники, локализованные вблизи точки $\xi = \tau = 0$ и исчезающие при $x \rightarrow l$. Поэтому функция $\psi(x - \xi, t - \tau)$ выносится из-под знака интеграла [2] и можно провести интегрирование (и дифференцирование) оставшейся под знаком интеграла функции с использованием теории вычетов. Приведем окончательные результаты:



Р и с. 2

$$(2.1) \quad \tau_+ \sim N_2(x-l)^{-1/2}, \quad x \rightarrow l+0; \quad f_- \sim M(l-x)^{1/2}, \quad x \rightarrow l-0,$$

$$N_2 = \frac{(dl-1)\sqrt{1-bl}}{\sqrt{\pi}(1-hl)\kappa(m)} \psi(l, t), \quad M = -\frac{2S(m)N_2}{P(m)},$$

$$l = l(t), \quad l' = l'(t), \quad m = 1/l'.$$

Методом контурного интегрирования с использованием теории вычетов берутся интегралы, входящие в решение [2]. Выражения для постоянных $A, B, k(l'), D$ упрощаются:

$$(2.2) \quad A = \kappa^{-1}(a), \quad B = \kappa(c), \quad k = \kappa^{-1}(1/l'), \quad D = \kappa(0).$$

В (2.2) использованы обозначения [2]. С учетом (2.2), предельных переходов $c_P \rightarrow c_R, c_S \rightarrow b^{-1}$ при непрерывном сближении параметров сред 1 и 2 и замены $a \rightarrow b$ при переходе от трещины нормального разрыва к трещине касательного разрыва [3] результаты п. 1, 2 согласуются с результатами [2, 3].

Более сложен процесс выделения асимптотики у функции $\sigma(x, t)$ (область интегрирования не локализуется при $x \rightarrow l-0$). Можно показать, что $\sigma^+ = O(1)$ при $x \rightarrow l+0$. Асимптотику функции σ^- получим, исходя из представления (1.14), но проще — из

$$(2.3) \quad \sigma = -\frac{\partial}{\partial x} d_0 * * f_-;$$

$$(2.4) \quad d_0 = \lim_{y \rightarrow +0} \left\{ \frac{i}{2\pi z} [D_0(Z) - D_0(\bar{Z})] \right\} = -\frac{1}{\pi x} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \psi\left(\frac{t}{x}\right) \left[H\left(b - \frac{t}{x}\right) H\left(\frac{t}{x} - a\right) - H\left(b + \frac{t}{x}\right) H\left(-a - \frac{t}{x}\right) \right] \right\} + D_\infty \delta(t) \delta(x),$$

$$D_\infty = \lim_{Z \rightarrow \infty} D_0(Z) \neq 0, \quad \infty, \quad \sigma^- = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega_+ + \omega_-} d_0(\xi, \tau) f_-(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau,$$

$$\omega_+ = \left\{ \xi, \tau: \frac{\tau}{b} \leq \xi \leq \frac{\tau}{a}, \quad 0 \leq \tau \leq t \right\}, \quad \omega_- = \left\{ \xi, \tau: -\frac{\tau}{a} \leq \xi \leq -\frac{\tau}{b}, \right.$$

$$\left. \xi \geq x - l(t - \tau), \quad 0 \leq \tau \leq t \right\}$$

($\delta(t)$ — дельта-функция Дирака).

Мера области интегрирования ω_- стремится к нулю при $\varepsilon = |x-l| \rightarrow 0$, однако при этом $\text{mes } \omega_+ = O(1)$. Поступим так, как это обычно делается при анализе асимптотики решений эллиптических уравнений в точках раздела краевых условий и угловых точках. А именно, устроим срезку сектора ω_+ прямой $\xi = \xi_0 > 0$, где ξ_0 достаточно малое (не зависящее от ε) число, чтобы в области $\omega_{\xi_0} = \omega_+ \cap \{\xi \leq \xi_0\}$ можно было заменить функцию $f_-(x - \xi, t - \tau)$ на ее асимптотическое выражение $f_0 = M\sqrt{\varepsilon}$ (в силу непрерывности). Интегрирование по области, расположенной выше прямой $\xi = \xi_0$, вклада в старший член асимптотики не дает, а вклад I_1 от инте-

гирования по ω_{ξ_0} , как будет показано ниже, от выбора ξ_0 не зависит

$$I_1 = \frac{M}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \int_0^{\xi_0} \frac{\Psi(v) dv d\xi}{\sqrt{\xi - x + l(t - v\xi)}} = -\frac{M}{4\pi} \int_a^b \int_0^{\xi_0} \frac{\Psi(v) l \cdot (t - v\xi) dv d\xi}{[\xi - x + l(t - v\xi)]^{3/2}}.$$

Для функций $l(t)$, непрерывных по Гельдеру, имеем ($\gamma > 0$)

$$l(t - v\xi) = l(t) + o(\xi^\gamma), \quad l(t - \xi v) = l(t) - l(t)v\xi + o(\xi^{\gamma+1}), \quad \xi \rightarrow +0.$$

При замене $\xi = \varepsilon\eta$ и $\xi_0/\varepsilon \rightarrow \infty$ несложно показать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon} I_1 = -\frac{Ml}{2\pi} \int_a^b \frac{\Psi(v) dv}{1 - lv}.$$

Вычислим вклад I_2 от интегрирования по области ω_- и величину I_3 — результат свертки с первым слагаемым (2.4):

$$I_2 = \frac{Ml}{2\pi \sqrt{\varepsilon}} \int_{-b}^{-a} \frac{\Psi(v) dv}{1 - lv}, \quad I_3 = -\frac{1}{2} \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} D_\infty.$$

Сумму $I_1 + I_2$ можно преобразовать при помощи теории вычетов, выбирая $Q_0 = W_0(Z)(Z - m)^{-1}$ и контур интегрирования $C = C_R + C_v$ с обходом отрезков $[-b, -a]$ и $[a, b]$ на действительной оси. В результате получим

$$(2.5) \quad I_1 + I_2 = -\frac{M}{2\sqrt{\varepsilon}} (D_0(m) - D_\infty),$$

$$\sigma \sim \frac{N_1}{\sqrt{l-x}}, \quad x \rightarrow l-0, \quad N_1 = -\frac{D(m)}{P(m)} N_2 = \frac{1}{2} \frac{D(m)}{S(m)} M.$$

Приведем также асимптотику деформации

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim E(m) N_2 (x - l)^{-1/2} / P(m), \quad x \rightarrow l+0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = O(1), \quad x \rightarrow l-0.$$

При изменении знака нагрузки меняется знак у коэффициентов N, M . При $N_1 > 0$ нарушается предположение о безотрывности (сингулярные растягивающие напряжения снять конечными статическими напряжениями нельзя) — непременно образуются зоны отрыва. Однако при значительных внешних сжимающих усилиях, по-видимому, такая зона будет одна, мала и локализована вблизи края разреза. Тогда возможно приближенное рассмотрение задачи методом сращиваемых асимптотических разложений. При этом внутренняя задача сведется к задаче о стационарном движении разреза с нагруженной конечной зоной отрыва, участком контакта с проскальзыванием около края разреза и заданной асимптотикой на бесконечности (близкой к [12]). Из результатов [12] и априорной оценки мощности сил, действующих на берега трещины в зоне отрыва, следует важное утверждение. Поток энергии извне, передаваемый в край трещины, асимптотически мало меняется за счет указанной выше мощности сил. Коэффициенты интенсивности из решений внешней и внутренней задач будут в главном равны по модулю, но противоположны по знаку — зона отрыва играет роль переключателя знаков напряжений.

3. Частные случаи нагружения. Страгивание и развитие трещины.

Интегралы (1.12) берутся (с привлечением контурного интегрирования) для динамических нагрузок простейшего вида. Пусть сначала $\tau_- = H(t - \tau_0)H(l - x)$ — задача о дифракции ступенчатой поперечной вол-

ны на подвижном разрезе (нормальное падение). Найдем

$$\psi(x, t) = \psi^0(t - \tau_0)_+^{1/2}, \quad N_2 = N^0(t - \tau_0)_+^{1/2},$$

$$\psi^0 = \frac{2h\kappa(0)}{d\sqrt{\pi b}}, \quad N^0 = \frac{2}{\pi} \frac{l' - c_P}{c_S - l' \kappa(m)} \sqrt{b^{-1} - l'}$$

Отсюда суперпозицией просто получить другие результаты, например, для линейно-нарастающей нагрузки $\tau_- = (t - \tau_0)_+ H(l - x)$ $\psi = \frac{2}{3} \psi^0 \times$
 $\times (t - \tau_0)_+^{3/2}$, $N_2 = \frac{2}{3} N^0 (t - \tau_0)_+^{3/2}$ и для треугольного импульса $\tau_- =$
 $= [a_1 t_+ - a_2(t - \tau_1)_+ + (a_2 - a_1)(t - \tau_2)_+]$ с временем нарастания $\tau_1 >$
 > 0 и полным временем действия τ_2

$$N_2 = \frac{2}{3} N^0 [a_1 t_+^{3/2} - a_2 (t - \tau_1)_+^{3/2} + (a_2 - a_1) (t - \tau_2)_+^{3/2}],$$

$$0 < a_1 < a_2, \quad \tau_2 = a_2 \tau_1 (a_2 - a_1)^{-1}.$$

Максимум последнего выражения приходится на момент времени $t_m = \tau_1 / [1 - (a_1/a_2)^2]$ ($\tau_1 < t_m < \tau_2$), и вопрос страгивания трещины можно решить, сравнивая значение $N_m = N_2(t_m)$ с предельным динамическим коэффициентом интенсивности при страгивании N_{2g} .

Рассмотрим нагрузку вида $\tau_- = H(x - L + vt)H(l - x)$, движущуюся со скоростью $v > 0$ по разрезу от края. При $v > a^{-1}$ это моделирует падение плоской волны под углом к линии контакта со сверхзвуковым движением следа. Проведем вычисления:

$$\psi = 2C \sqrt{\frac{x - L + vt}{\pi(1 + bv)}} H(x - L + vt),$$

$$N_2(v) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{(l - L + vt)(1 - al')}{1 + bv}} \frac{dl' - 1}{1 - hl' \kappa_0(m)} \rightarrow N_2(\infty), \quad v \rightarrow \infty,$$

$$C = 1 + \frac{(h/d - 1)\kappa(d)}{\sqrt{1 + c_P/v}} + \frac{\sqrt{1 + bv}}{\pi} \int_a^b Q(y; 0) \arcsin \sqrt{\frac{1 - y/b}{1 + vy}} dy.$$

Анализ показывает, что $N_2(v) < N_2(\infty)$. Напомним, что во всех выражениях следует положить $h = b$, $h = d = b$ (случаи 2, 3), $h = b$, $c_P = c_R$ (однородная плоскость).

Примем простейший силовой критерий разрушения $N_2 \leq N_{2g} = \text{const}$ (какие-либо данные о функции $N_{2g}(l')$ автору неизвестны). Можно, исходя из приведенных выше зависимостей для $N_2(l')$, составить и решить уравнения для l' [13] и сделать следующие качественные выводы (для неубывающих нагрузок). До некоторого времени трещина стоит, затем разгоняется ($l' > 0$), причем $l' \rightarrow c_P$, $t \rightarrow \infty$ (случаи 1, 2). Для анализа движения в случае 3 целесообразно совершить замену $\kappa(m)$ согласно (1.8), (1.9). Тогда обнаружим, что скорость l' достигает значения b^{-1} за конечное время (скорость волны сдвига не является критической для развития трещины в случае 3). С другой стороны, $N_2 \rightarrow 0$, $N_1 = O(1)$ при $l' \rightarrow c_P$, $t = \text{const}$ (случаи 1, 2), $N_2 = O(1)$, $N_1 = O(1)$ при $0 \leq l' \rightarrow b$, $t = \text{const}$ (случай 3) для приведенных выше динамических нагрузок, что существенно отличает нестационарное движение от стационарного.

Выход на стационарный режим проанализируем на примере $\tau_- = \delta(x - ct)H(t)$ ($0 \leq c \leq l' < c_P$). Тогда ($x' = x - ct$)

$$(3.1) \quad \psi = \frac{H(x')}{\sqrt{\pi x' (1 - bc)}} \left[\frac{1 - hc}{1 - dc} \approx \left(\frac{1}{c} \right) - H \left(b - \frac{t}{x} \right) \right] \frac{A_0 H(dx - t)}{(1 - dc)\sqrt{dx - t}} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\frac{x'}{x}} H(x') \int_{t/x}^b \frac{F_0(y) H(y - a) dy}{\sqrt{\pi(1 - cy)^{3/2}}}.$$

При $t \rightarrow \infty$, $x < \text{const} + vt$, $v < c_P$ в (3.1) остается только первое слагае-

мое. Полагая $l(t) \rightarrow L + ct$, $t \rightarrow \infty$, подстановкой $x' = L$ в (3.1) получим $\psi(l, t)$ — множитель в выражениях для коэффициентов N_2 , M (2.1), определяющий стационарное значение $N_2 = -(\pi \sqrt{L})^{-1}$. Для закона движения $l = L + ct$ выход асимптотик на стационарный режим осуществляется после прохождения края разреза сдвиговой и граничной волн от подвижного точечного источника.

Итак, полученное формальным путем решение (1.13) удовлетворяет нулевым начальным условиям, ограничению на поток энергии [4]

$$0 \leq W = -\frac{\pi l \cdot N_2^2 S(m)}{2P(m)} < \infty$$

и остальным условиям (1.1); σ , τ_+ , f_- , u — достаточно гладкие функции, если такими же будут входные функции i , τ_- (исключая точку $x = l$); связь между коэффициентами N , M (2.5), извлеченная непосредственно из решения, аналогична этой же связи для стационарных движений разреза [4] (там же см. анализ углового распределения функций); решение в предельной ситуации $c_{k1} \rightarrow c_{k2}$, $\mu_1 \rightarrow \mu_2$ ($k = 1, 2$) совпадает с решением [2].

Влияние сопротивления подвижке берегов разреза (оно может быть весьма разнообразным по своей физической природе) реально учесть в виде поправки к решению (1.13), например, полагая добавочное к τ_- касательное напряжение равным $\tau^0 = \tau^0(x, t; f_-, \sigma)$.

Следует отметить, что в [14] получен критерий существования граничной волны Рэлея для контактирующих с проскальзыванием упругих тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Костров Б. В. Распространение трещин с переменной скоростью.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
2. Сарайкин В. А., Слепян Л. И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 4.
3. Слепян Л. И. Механика трещин.— Л.: Судостроение, 1981.
4. Симонов И. В. О дозвуковом движении края сдвиговой подвижки с трением вдоль границы раздела упругих материалов.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 3.
5. Зайцев Л. П., Флитман Л. М. Упругие волны, порожденные трещиной касательного разрыва на границе раздела упругих сред.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1965, № 11.
6. Freund L. B., Clifton R. J. On the uniqueness of plane elastodynamic solution for running cracks.— J. Elast., 1974, v. 4, N 4.
7. Костров Б. В. Некоторые динамические задачи математической теории упругости. Автореф. канд. дис.— М.: МГУ, 1964.
8. Гоголадзе В. Г. Отражение и преломление упругих волн. Общая теория граничных волн Рэлея.— Тр. Сейсмологического ин-та, 1947, № 125.
9. Гольдштейн Р. В. О поверхностных волнах в соединенных упругих материалах и их связи с распространением трещин по линии соединения.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
10. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1965.
11. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними.— М.: Физматгиз, 1959.
12. Симонов И. В. О движении трещины с конечной зоной отрыва по линии соединения двух упругих материалов.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 6.
13. Молчанов А. Е., Никитин Л. В. Динамика трещин продольного сдвига после потери устойчивости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 2.
14. Берберян Л. Г. К вопросу о распространении поверхностных волн на границе двух различных сред, скользящих одна по другой.— Сообщ. АН СССР, 1941, т. 2, № 4.

Поступила 28/X 1985 г.