

УДК 51.72; 539.3

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ЯНСЕНА МЕТОДОМ
ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ**

С. В. Клишин, А. Ф. Ревуженко

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

На основе метода дискретных элементов численно исследована задача о давлении сыпучего материала на дно и стенки цилиндрической емкости в трехмерной постановке. Учитывались сухое трение между частицами, составляющими гранулированный материал, и трение со стенками емкости. Форма частиц — сферическая с заданным распределением по радиусам. Исследовано влияние способа засыпки на напряженное состояние среды. Дана оценка точности гипотез Янсена в инженерной постановке задачи.

Давление, напряженное состояние, гранулированный материал, численный анализ, метод дискретных элементов, задача Янсена

Одной из классических в механике сыпучих сред является задача определения давления материала на дно и стенки цилиндрической емкости. Первое решение этой задачи для вертикальных стенок получено Янсенем [1] и базируется на двух гипотезах. Считается, что коэффициент бокового распора сыпучей среды известен, постоянен и не зависит от характера распределения напряжений по горизонтальному сечению (аналог закона Паскаля в гидростатике). Кроме того, предполагается, что касательные напряжения на стенках емкости полностью развиты и пропорциональны нормальным напряжениям.

Действующие в настоящее время строительные нормы и правила базируются на решении Янсена, в которое вводится ряд поправочных эмпирических коэффициентов. Для использования решения Янсена необходимы конкретные данные о величине бокового распора, причем его рекомендуемые значения варьируются в весьма широких пределах. Таким образом, в инженерной схеме вопрос о значении коэффициента бокового распора остается открытым. Причем экспериментальная оценка точности определения значений коэффициента наталкивается на ряд трудностей, связанных с зависимостью давления от податливости датчиков, стенок емкости и других факторов. В работе [2] приведены лабораторные эксперименты по исследованию задачи Янсена и дано сравнение с результатами численного моделирования с применением континуального подхода, основанного на методе конечных разностей. При этом предложенный континуальный подход не учитывает способа засыпки материала, который оказывает существенное влияние на распределение давления на стенки емкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-05-00432).

Дальнейшие исследования в этой области связаны, с одной стороны, с расширением круга рассматриваемых задач, с другой — с более точными постановками, в которых учитывается неупругое поведение среды, ее возможная разгрузка и т. д. [3–5].

Напомним основные положения схемы Янсена. Пусть (r, θ, z) — цилиндрические координаты, $p(z)$ — среднее давление в горизонтальном сечении S :

$$p(z) = -\frac{1}{S} \int_S \sigma_{zz} dS, \quad (1)$$

где $S = \pi R^2$ — площадь сечения; R — радиус цилиндрической емкости (рис. 1).

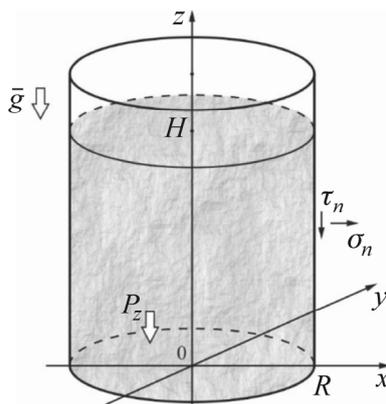


Рис. 1. Схема эксперимента

Первое предположение Янсена состоит в том, что радиальное напряжение пропорционально среднему давлению:

$$\sigma_{rr}(z) = -\xi p(z), \quad \xi = \text{const}. \quad (2)$$

Второе предположение связано с характером трения на боковой поверхности цилиндра. Полагается, что трение полностью развито и направлено вверх:

$$\sigma_{rz}(z) = -\mu \sigma_{rr}(z), \quad \mu = \text{const}, \quad (3)$$

где μ — коэффициент внешнего трения между материалом и стенкой ($\mu = \text{tg} \varphi$, φ — угол контактного трения).

Пусть H — высота засыпки (рис. 1), тогда поверхность $z = H$ свободна от напряжений: $p(H) = 0$. Из уравнений равновесия после необходимых выкладок можно получить, что

$$p(z) = \frac{\rho g R}{2\mu\xi} \left(1 - e^{-\frac{2\mu\xi}{R}(H-z)} \right), \quad (4)$$

где ρg — удельный вес материала. Давление на дно равно

$$p(0) = \frac{\rho g R}{2\mu\xi} \left(1 - e^{-\frac{2\mu\xi}{R}H} \right). \quad (5)$$

Видно, что решение отличается от гидростатического качественно. С увеличением высоты засыпки от нуля давление на дно сначала возрастает, а затем быстро стабилизируется (практически при высоте порядка 3–4 диаметра емкости). При этом, если $H \rightarrow \infty$, то $p(z) \rightarrow \rho g R / 2\mu\xi$, т. е. давление сыпучего материала на дно остается ограниченным.

Возвращаясь к анализу рассматриваемой задачи, можно сказать, что в континуальных постановках отпадает необходимость в гипотезах инженерной схемы. Однако при этом возникает необходимость в формулировке замкнутых систем уравнений. В настоящее время общепризнанные уравнения в этой области еще не построены.

В такой ситуации наиболее адекватным способом решения данной задачи представляется подход, основанный на методе дискретных элементов [6–8]. Здесь не требуется ни введения гипотез инженерной схемы, ни постулирования тех или иных континуальных уравнений.

В основе метода лежит представление о материале как об области трехмерного пространства, заполненной конечным числом N отдельных сферических частиц — дискретных элементов с заданным распределением радиусов r_i ($i = 1, \dots, N$) и известным набором физических свойств (плотность ρ_i , упругие и вязкие модули, трение, сцепление и т. д.). Напряженно-деформированное состояние такой системы в каждый момент времени зависит от положения каждой частицы и сил, возникающих на контактах между частицами, а также от приложенных к системе внешних сил или заданных граничных смещений.

В реальной ситуации взаимодействие между упругими частицами приводит к их деформации и искажению формы. В модели дискретных элементов форма частиц на протяжении всего времени контакта предполагается неизменной, а степень их деформации описывается величиной перекрытия между контактирующими элементами. При этом также предполагается, что размер такого перекрытия намного меньше размеров самих частиц. Функция, описывающая силовое взаимодействие на контакте между частицами, представляет собой скалярную функцию расстояния. Сила, действующая в точке контакта между сферическими частицами с номерами i и j , определяется в векторной форме следующим образом:

$$\mathbf{F}_{ij} = F_{n,ij} \cdot \mathbf{n}_{ij} + F_{t,ij} \cdot \mathbf{t}_{ij},$$

где \mathbf{n}_{ij} — единичный вектор, определяющий плоскость контакта между двумя сферами (вектор нормали к плоскости пересечения сфер); \mathbf{t}_{ij} — единичный вектор, принадлежащий плоскости контакта. Нормальная $F_{n,ij}$ и касательная $F_{t,ij}$ компоненты контактной силы зависят от упругих и вязких модулей модели, а также от угла внешнего трения φ_{ij} между частицами.

Таким образом, располагая данными о законе контактного взаимодействия между частицами, а также начальными и краевыми условиями, можно численно строить решения уравнений и определять эволюцию напряженно-деформированного состояния среды. При этом наибольший интерес представляет стационарное состояние, на которое выходит среда с течением времени.

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана область — круговой цилиндр радиусом $R = 0.1$ м, ось которого ориентирована вдоль оси Oz (см. рис. 1), дно емкости ограничено плоскостью $z = 0$. Сыпучий материал представлен совокупностью из $N = 130\,000$ дискретных элементов, плотность которых $\rho_i = 2500$ кг/м³, модуль упругости $E_i = 10$ ГПа ($i = 1, \dots, N$). Радиусы частиц принимаются либо равными друг другу ($r_i = 0.003$ м), либо выбираются из равномерного распределения на отрезке от 0.0025 до 0.0035 м.

Заполнение емкости осуществлялось двумя способами. Первый состоял в засыпке материала равными порциями под действием силы тяжести (ускорение свободного падения $g = 9.82$ м/с²). Каждая последующая порция материала создавалась на высоте 1.5 м от плоскости Oxy после

того, как предыдущие приходили в состояние равновесия. После осаждения всех порций материал приходил в равновесное состояние, образуя случайную упаковку, ограниченную сверху свободной поверхностью $z = H$ (рис. 1).

На основе данного способа проведен ряд численных экспериментов при различных углах внешнего трения скольжения $\varphi_{ij} = \varphi$ между частицами. Значение предельного угла внешнего трения частиц с внешней границей совпадает с φ .

Такой способ засыпки позволяет вычислить изменение значений вертикального давления P_z , действующего со стороны материала на дно емкости в процессе ее наполнения. На рис. 2 представлено отношение давления на дно емкости к удельному весу сыпучего материала γ при значениях φ_{ij} , равных 15° , 30° и 45° для различных распределений размеров дискретных элементов. При $\varphi_{ij} = 0$ давление P_z на каждом этапе засыпки равно удельному весу засыпанного материала, с увеличением трения между частицами и границей давление материала на дно уменьшается. Из графиков видно, что давление монотонно растет при увеличении высоты засыпки от нуля до значений, равных $2-2.5$ диаметра цилиндра, а затем стабилизируется. Данный факт, полученный в численном эксперименте, подтверждает гипотезу Янсена. В качестве сравнения на диаграммах штриховыми линиями показано давление $p(z)$, вычисленное по формуле (4) при следующих значениях параметров: $\mu = 0.5774$ ($\varphi = 30^\circ$), $\xi = 0.4$.

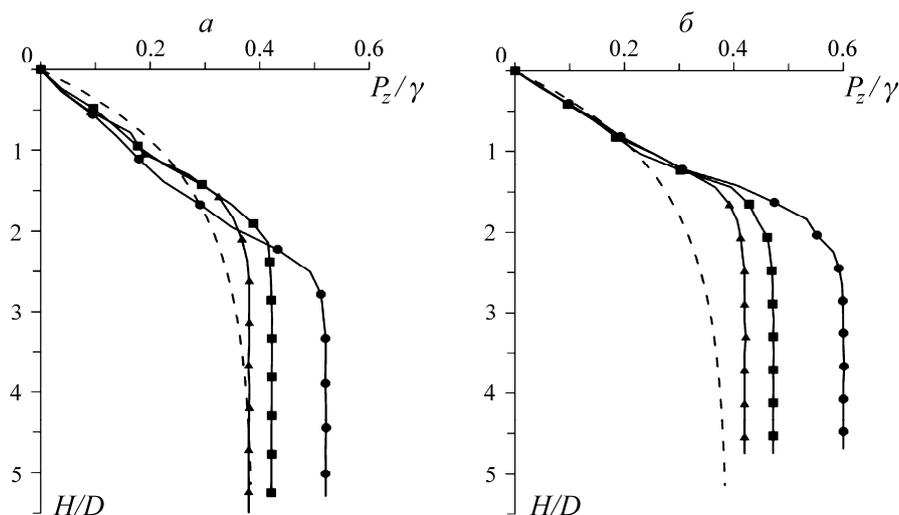


Рис. 2. Отношение давления P_z на дно емкости к удельному весу материала в зависимости от высоты засыпки: a — радиусы частиц равны между собой ($r_i = 0.003$ м); b — радиусы частиц выбраны из равномерного распределения на отрезке от 0.0025 до 0.0035 м. Углы внешнего трения между частицами: $\varphi_{ij} = 15^\circ$ (●); $\varphi_{ij} = 30^\circ$ (■); $\varphi_{ij} = 45^\circ$ (▲)

Второй способ засыпки состоял в создании начального распределения всего набора из N первоначально не контактирующих между собой частиц на высоте $0.5-3.0$ м и последующей их усадке с учетом контактного взаимодействия. При таком способе создания упаковки в отличие от предыдущего можно определить только конечное значение давления на дно емкости. На рис. 3 представлены отношения P_z / γ для разных коэффициентов трения между частицами по окончанию процесса засыпки. Значение $\varphi_{ij} = 0$ (отсутствие трения) соответствует гидростатическому давлению на дно. Так же как и в предыдущем случае, видно, что давление уменьшается с увеличением трения между частицами и границей.

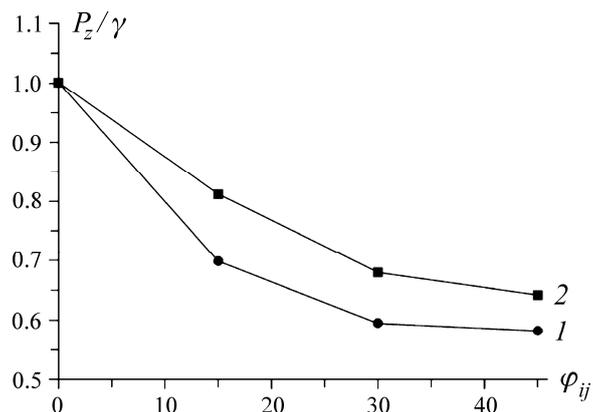


Рис. 3. Отношение давления P_z на дно емкости к удельному весу материала в зависимости от угла трения между частицами: 1 — радиусы частиц равны между собой ($r_i=0.003$ м); 2 — радиусы частиц выбраны из равномерного распределения от 0.0025 до 0.0035 м

Рассмотрим теперь напряжения, действующие на вертикальные стенки цилиндра со стороны сыпучего материала. Пусть σ_n — нормальное, а τ_n — касательное напряжения, действующие на стенках. Положительные направления их действия показаны на рис. 1. На рис. 4а, б приведены нормальное и касательное напряжения, а на рис. 4в — значения коэффициента внешнего трения для разных углов внутреннего трения материала при засыпке материала порциями.

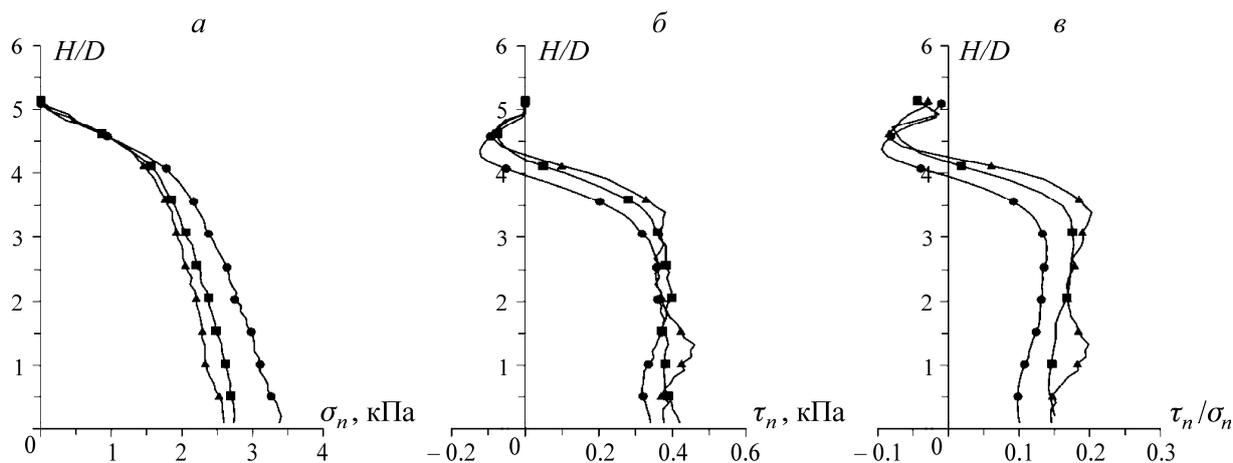


Рис. 4. Напряжения, действующие на вертикальных стенках цилиндрической емкости: нормальное σ_n (а); касательное τ_n (б); коэффициент бокового распора (в). Углы внешнего трения между частицами: $\varphi_{ij} = 15^\circ$ (●); $\varphi_{ij} = 30^\circ$ (■); $\varphi_{ij} = 45^\circ$ (▲); радиусы частиц равны между собой

Необходимо отметить, что инженерная постановка Янсена, а также континуальное описание предполагают состояние предельного равновесия материала, в то время как в представленном численном эксперименте на основе метода дискретных элементов среда по окончании засыпки находится в допредельном состоянии. Равенство (3) соответствует ситуации, когда в процессе засыпки материал хотя бы незначительно проседает вниз, поэтому трение на боковой поверхности развивается полностью. В действительности ситуация сложнее. Во время засыпки происходят удары частиц о дно емкости или о частицы, которые находятся на свободной поверхности. Это вызывает сжатие материала, а при определенном сочетании упругих модулей может привести к смене знака трения на стенках цилиндра, что и подтверждается диаграммой на

рис. 4б, в. После столкновения частицы движутся в обратном направлении, в результате чего возникает расклинивание потока и зависание материала на стенках емкости. Этот эффект хорошо заметен на рис. 4б, где показано распределение касательного напряжения по высоте. Видно, что касательное напряжение развито начиная от 0 до 3 диаметров емкости, после чего оно уменьшается и на верхнем участке границы может приобретать отрицательные значения.

Данный участок вырождается, если сдвигать дно вниз с постоянной малой скоростью. При этом касательные напряжения на боковой поверхности цилиндра становятся полностью развитыми по всей высоте. Распределение напряжений при таком способе нагружения представлено на рис. 5. Из графиков видно, что коэффициент бокового распора принимает постоянное значение, т. е. сыпучая среда находится в предельном состоянии, и гипотеза Янсена выполняется довольно точно.

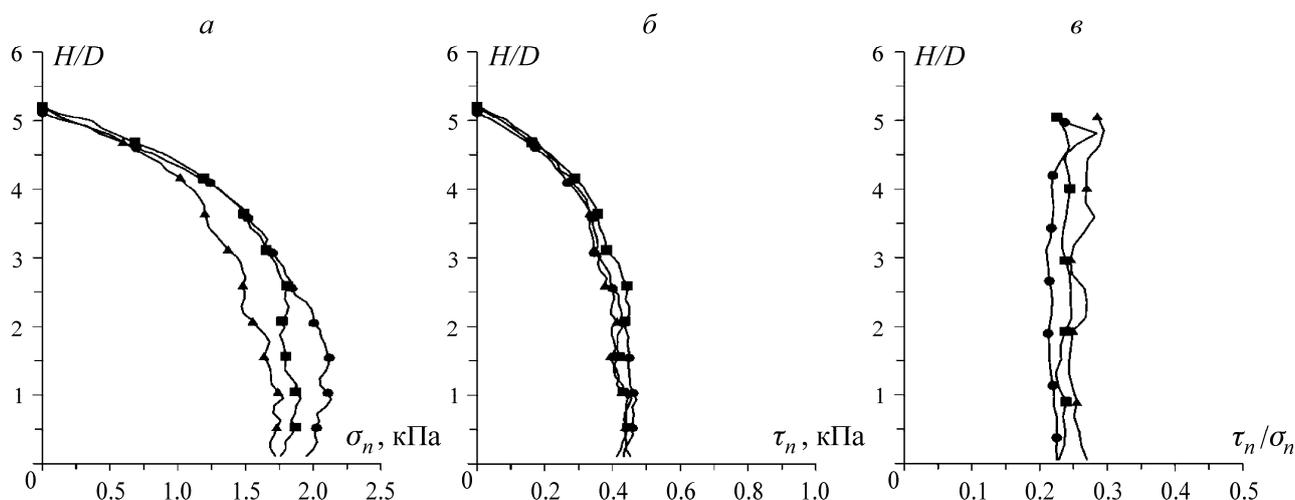


Рис. 5. Напряжения, действующие на вертикальных стенках цилиндрической емкости при сдвиге нижней границы: нормальное σ_n (а); касательное τ_n (б); коэффициент бокового распора (в). Углы внешнего трения между частицами: $\varphi_{ij} = 15^\circ$ (●); $\varphi_{ij} = 30^\circ$ (■); $\varphi_{ij} = 45^\circ$ (▲); радиусы частиц равны между собой

При рассмотренных способах засыпки сыпучий материал представляет собой определенную упаковку частиц, находящуюся в равновесном состоянии. Основными параметрами для описания плотных упаковок являются: плотность, равная отношению суммарного объема всех частиц к объему, занятому материалом, и координационное число χ , равное осредненному количеству контактов χ_i всех частиц друг с другом (контакты между частицами и границами в данной работе не учитываются). В численном эксперименте, как и в реальной ситуации, плотность упаковки зависит от трения между частицами, уменьшаясь с увеличением φ_{ij} .

Если частица с номером i находится в контакте с χ_i соседними частицами, то среднее координационное число вычисляется как

$$\chi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_i.$$

В численных экспериментах значения средних координационных чисел χ изменялись в пределах от 8.28 ($\varphi_{ij} = 45^\circ$) до 9.48 ($\varphi_{ij} = 0^\circ$), т. е. χ уменьшалось с увеличением трения между частицами. В качестве примера на рис. 6 приведена плотность распределения f координаци-

онных чисел χ_i частиц равных размеров (рис. 6а) и частиц с равномерным распределением размеров (рис. 6б) при засыпке порциями. Как упоминалось выше, контакты частиц с дном и стенками в формуле не учитывались, поэтому на диаграммах присутствуют значения χ_i , равные 2 и 3.

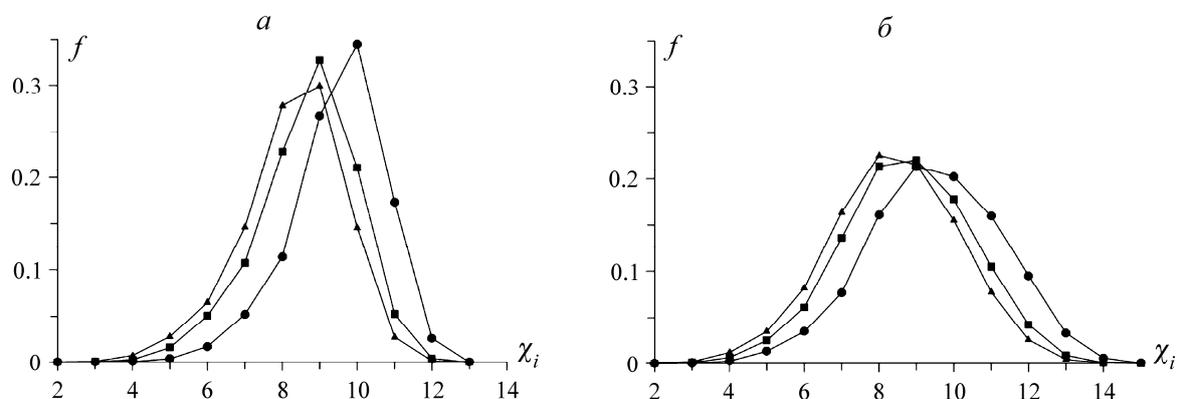


Рис. 6. Плотность распределения координационных чисел χ_i для $\varphi_{ij} = 0^\circ$ (●), 15° (■) и 45° (▲): а — радиусы частиц равны между собой; б — радиусы частиц выбраны из равномерного распределения

ВЫВОДЫ

Для исследования задач типа задачи Янсена метод дискретных элементов представляется наиболее адекватным. Распределение давления сыпучего материала на дно и стенки емкости зависит не только от удельного веса материала и коэффициентов его внешнего и внутреннего трения, но и от способа засыпки емкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Janssen H. A. Versuch über Getreidedruck in Silozellen, Zeitschrift des vereins Deutscher Ingenieure, 1895, Vol. 39, No. 35.
2. Widinghe S., Sivakugan N. Vertical stresses within granular materials in silos, Ground Engineering in a Changing World: 11th Australia — New Zealand Conference on Geomechanics, 2012, Melbourne, Australia.
3. Ревуженко А. Ф., Бушманова О. П. Исследование задачи Янсена // ФТПРПИ. — 1981. — № 3.
4. Revuzhenko A. F. Mechanics of Granular Media, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006.
5. Лавриков С. В. К расчету течения геоматериалов в сходящихся каналах с учетом внутреннего трения и дилатансии // ФТПРПИ. — 2010. — № 5.
6. Rapaport D. C. The Art of Molecular Dynamics Simulation. Cambridge University Press, 2004, 2nd edition.
7. Головнев И. Ф., Головнева Е. И., Фомин В. М. Молекулярно-динамическое исследование давления Лапласа в твердотельных наноструктурах // Физическая мезомеханика. — 2012. — Т.15. — №1.
8. Teufelsbauer H., Wang Y., Pudasaini S. P., Borja R. I., and Wu W. DEM simulation of impact force exerted by granular flow on rigid structures, Acta Geotechnica, 2011, Vol. 6, Issue 3.

Поступила в редакцию 17/IV 2014