ЛИТЕРАТУРА

1. **Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю.** Турбулентные отрывные течения.— М.: Наука, 1979.
2. **Боровой В. Я.** Течение газа и теплообмен в зонах взаимодействия ударных волн с пограничным слоем.— М.: Машиностроение, 1983.
3. **Желтоводов А. А., Яковлев В. Н.** Этапы развития, структура и характеристики турбулентности сжимаемых отрывных течений в окрестности двумерных препятствий.— Новосибирск, 1986.— (Препр./АН СССР, Сиб. отд-ние, ИТПМ; № 27—86).
4. **Hung F. T., Barnett D. O.** Shock wave-boundary layer interference heating analysis.— N. Y., 1973.— (Pap./AIAA; N 237).
5. **Holden M. S.** Shock wave-turbulent boundary layer interaction in hypersonic flow.— N. Y., 1977.— (Pap./AIAA; N 45).
6. **Шкирин Н. Н.** Расчетное исследование местных тепловых потоков при переходе через течение разрежения // Тр. ЦАГИ.— 1985.— Вып. 2274.
7. **Зауличный Е. Г., Трофимов В. М.** Исследование теплообмена в отрывных областях, обтекаемых сверхзвуковым потоком в сопле Лаваля // ПМТФ.— 1986.— № 1.
8. **Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И.** Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа.— Новосибирск: Наука, 1962.
9. **Желтоводов А. А., Зауличный Е. Г., Трофимов В. М., Яковлев В. Н.** Исследование теплообмена и турбулентности в сжимаемых отрывных течениях.— Новосибирск, 1987.— (Препр./АН СССР, Сиб. отд-ние, ИТПМ; № 22—87).
10. **Желтоводов А. А., Меклер Л. Ч.-Ю., Шилейн Э. Х.** Особенности развития отрывных течений в углах сжатия за волнами разрежения.— Новосибирск, 1987.— (Препр./АН СССР, Сиб. отд-ние, ИТПМ; № 10—87).
11. **Желтоводов А. А., Шилейн Э. Х., Яковлев В. Н.** Развитие турбулентного пограничного слоя в условиях смешанного взаимодействия со скачками уплотнения и волнами разрежения.— Новосибирск, 1983.— (Препр./АН СССР, Сиб. отд-ние, ИТПМ; № 28—83).
12. **Зайковский В. Н., Зауличный Е. Г., Меламед Б. М., Сенов Ю. М.** Экспериментальное исследование локальных коэффициентов тепломассообмена на стенках клапанного устройства // ПМТФ.— 1982.— № 2.
13. **Желтоводов А. А.** Анализ свойств двумерных отрывных течений при сверхзвуковых скоростях // Исследования пристенных течений вязкого газа: Сб. науч. тр.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1979.
14. **Zheltovodov A. A., Pavlov A. A., Shilein E. H., Yakovlev V. N.** Interconnectionship between the flow separation and the direct and inverse transition at supersonic speeds conditions // IInd IUTAM Symp. on laminar-turbulent transition, Novosibirsk, 1984.— Berlin; Heidelberg: Springer, 1985.
15. **Дейч М. Е.** Техническая газодинамика.— М.: Наука, 1974.
16. **Леонтьев А. И., Зауличный Е. Г.** Определение относительных коэффициентов тепло- и массообмена и критических параметров отрыва для турбулентного пограничного слоя при неоднородном вдуве в условиях неизотермичности // ИФЖ.— 1970.— Т. 19, № 4.
17. **Хаякава К., Смитс А. Дж., Богдонов С. М.** Экспериментальное исследование характеристик турбулентности в присоединяющемся сдвиговом слое в сжимаемом газе // Аэрокосмич. техника.— 1984.— Т. 2, № 12.
18. **Dussauge J. P., Gaviglio J.** Bulk dilatation effects on Reynolds stresses in the rapid expansion of a turbulent boundary layer at supersonic speeds // Proc. IIIrd Symp. on turbulent shear flows, California, 1981.
19. **Settles G. S., Baca B. K., Williams D. R., Bogdonoff S. M.** A study of reattachment of a free shear layer in compressible turbulent flow — N. Y., 1980.— (Pap./AIAA; N 1408).

г. Новосибирск *Поступила 31/III 1989 г.*

УДК 532.517.2

А. И. Мошинский

ДИСПЕРСИЯ ПРИМЕСИ В НЕОДНОМЕРНЫХ ПОТОКАХ

Теория дисперсии примеси в трубах ведет свое начало от работы Тейлора [1], где получено уравнение диффузии с постоянными коэффициентами для средней по сечению концентрации примеси, заменяющее локальное уравнение диффузии с конвективным слагаемым, зависящим от поперечной потоку координаты. В дальнейшем Арис [2] уточнил значение коэффициента эффективной диффузии (дисперсии), предложил формулы для коэффициента дисперсии в трубе с произвольным поперечным сечением и уточнил область применимости теории Тейлора как асимптотической при достаточно больших временах. В настоящее время по теории дисперсии имеется большое количество работ. Можно выделить некоторые из них, содержащие оригинальные подходы к проблеме [3—5] и уточняющие модель Тейлора — Ариса при меньших значениях времени, и [6, 7], развивающие ее в различных направлениях.

Существенной особенностью упомянутых выше и других работ по теории дисперсии является одномерность движения жидкости и независимость компоненты скорости от продольной координаты, что ограничивает применимость теории, по существу, призматическими трубами. Тогда как в природе и технике часто встречаются неодномерные течения, в определенном смысле схожие с течениями в трубах, для описания распространения примеси в которых было бы желательно получить уравнения эквивалентной диффузии, аналогичные уравнению дисперсии Тейлора. Решению этой задачи для некоторых случаев и посвящена данная работа.

1. Дисперсия примеси в вытянутых зонах при неодномерном течении жидкости. Вытянутость зоны означает, что одно измерение области течения значительно превышает два остальных, и нас интересует распространение примеси именно в этом направлении. Течения такого вида реализуются в застойных областях различных аппаратов, в трубах при наличии перегородок и т. п. Здесь и далее исследование проведем в движущейся со средней скоростью системе координат или в неподвижной, в тех случаях когда нет среднего движения в выделенных нами направлениях. Течение жидкости будем считать ламинарным, а саму жидкость несжимаемой. При этих предположениях уравнение конвективной диффузии в безразмерных координатах имеет вид

$$(1.1)\qquad \varepsilon^2\frac{\partial c}{\partial t}+\varepsilon\,\mathrm{Pe}\left(u\frac{\partial c}{\partial x}+v\frac{\partial c}{\partial y}+w\frac{\partial c}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 c}{\partial z^2},$$

где $x = X/a$; $y = Y/a$; $z = Z/l$; $\varepsilon = a/l$; $\mathrm{Pe} = aw^*/D$; $t = D\tau/l^2$. Здесь X, Y, Z, τ — размерные координаты и время; a — характерный размер области в плоскости X, Y, l — в направлении оси Z; D — коэффициент молекулярной диффузии; w^* — масштаб скорости в Z-направлении, который связан с масштабом v^* в X-, Y-направлениях соотношением $v^*l = w^*a$, следующим из уравнения неразрывности

$$(1.2)\qquad \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0.$$

Полагаем $\varepsilon \ll 1$. Выбор порядков величин в слагаемых уравнения (1.1) может показаться несколько искусственным, однако он соответствует процедуре последовательных приближений Тейлора [1]. Ниже мы убедимся, что, применяя методы теории возмущений [8, 9], придем в частном случае к результатам Тейлора и Ариса. Использование метода возмущений является более гибким инструментом, позволяющим в случае необходимости находить поправки к дисперсионным уравнениям типа уравнения Тейлора — Ариса. По-видимому, результаты, полученные методом возмущения в подобных задачах, имеют более общее значение (не только при малых ε). Это вызвано тем, что теория дисперсии применима при достаточно больших временах, и вероятно, что некоторые масштабы длины, присутствующие в постановке задачи, перестают быть характерными из-за диффузионного «расплывания» первоначально заданных профилей концентрации и т. п. В то же время асимптотический характер теории дисперсии исследован обстоятельно [2, 3 и др.], и получение одних и тех же результатов методом возмущений и методами, не содержащими малых параметров, может служить некоторым обоснованием надежности нашего выбора малого параметра и возможностн распространения результатов в область бóльших ε.

Уравнение (1.1) следует дополнить начальным и граничными условиями, из которых существенны для нас следующие:

$$(1.3)\qquad \partial c/\partial n|_\gamma = 0,\ \gamma = \partial\Omega\cdot R_1;$$

$$(1.4)\qquad c|_{t=0} = F(x, y, z).$$

Разыскиваем решение задачи (1.1)—(1.4) в виде разложения $c = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \ldots$, подставив которое в уравнение (1.1) и граничное условие (1.3), получим последовательность задач

$$\Delta c_0 = 0,\ \partial c_0/\partial n|_\gamma = 0; \tag{1.5}$$

$$\Delta c_1 = \mathrm{Pe}\left[u\frac{\partial c_0}{\partial x} + v\frac{\partial c_0}{\partial y} + w\frac{\partial c_0}{\partial z}\right],\quad \left.\frac{\partial c_1}{\partial n}\right|_\gamma = 0; \tag{1.6}$$

$$\Delta c_i = \mathrm{Pe}[u\partial c_{i-1}/\partial x + v\partial c_{i-1}/\partial y + w\partial c_{i-1}/\partial z] - \partial^2 c_{i-2}/\partial z^2 + \partial c_{i-2}/\partial t,\ \partial c_i/\partial n|_\gamma = 0,\ i = 2, 3, \ldots, \tag{1.7}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — двумерный оператор Лапласа. Заметим, что производные по времени от искомых функций отсутствуют в уравнениях задач (1.5)—(1.7), что говорит о сингулярности возмущения и необходимости для полного анализа привлекать более мелкий масштаб времени — внутреннее время [8, 9].

Решением задачи (1.5) будет пока неизвестная функция z и t, т. е. $c_0 = c_0(z, t)$. Далее, используя функцию Грина G для задачи Неймана (1.6), можно записать ее решение в виде [10]

$$c_1 = \mathrm{Pe}\frac{\partial c_0}{\partial z}\int\limits_\Omega w(\xi, \eta, z)\, G(x, y, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + c_1^*(z, t) \tag{1.8}$$

(c_1^* — неопределенная пока функция z и t). Проинтегрируем теперь по сечению Ω уравнение (1.7) при $i = 2$. Получим, воспользовавшись (1.8), теоремой Грина, уравнением неразрывности (1.2) и условиями непроницаемости u, $v = 0$ на γ-контуре области в плоскости x, y:

$$\partial c_0/\partial t = \partial\{[1 + \mathrm{Pe}^2 D^*(z)]\partial c_0/\partial z\}/\partial z, \tag{1.9}$$

уравнение дисперсии, обобщающее соотношения Тейлора и Ариса. Здесь

$$D^* = -\frac{1}{s}\int\limits_\Omega w(x, y, z)\, dx\, dy \int\limits_\Omega w(\xi, \eta, z)\, G(x, y, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{1.10}$$

— коэффициент эквивалентной диффузии. В частном случае течений, когда w не зависит от z, формулы (1.9), (1.10) совпадают с формулами Тейлора — Ариса (нами не учитывалась возможная зависимость коэффициента диффузии от координат x, y, принятая в [2] и не имеющая принципиального значения для нашего метода), в чем легко убедиться, перейдя к размерным координатам.

Представив функцию Грина в виде суммы

$$G(x, y, \xi, \eta) = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mathcal{V}_i(x, y)\,\mathcal{V}_i(\xi, \eta)}{\lambda_i},$$

где $\mathcal{V}_i$ — нормированные собственные функции задачи Неймана в области Ω, удовлетворяющие уравнению $\Delta\mathcal{V}_i + \lambda_i\mathcal{V}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, а собственные числа λ_i задачи положительны, приходим к выражению

$$D^* = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\left[\int\limits_\Omega w(x, y, z)\,\mathcal{V}_i(x, y)\, dx\, dy\right]^2, \tag{1.11}$$

из которого очевидна положительность D^* и которое можно использовать для расчета или оценки D^* различными методами.

Существенное отличие формул (1.10), (1.11) от обычно используемых в нестационарных уравнениях теории дисперсии — зависимость D^* от координаты z. Это особенно важно при больших значениях числа Pe, что типично в задачах дисперсии, когда коэффициент D много меньше «конвективной» части $a^2 w^{*2} D^*/D$ коэффициента дисперсии почти во всей области течения, за исключением окрестностей тех точек z, где w, а вместе с ней D^* обращаются в нуль. Последнее может быть как на твердых поверхностях, где w имеет нуль второго порядка, а D^* — четвертого, так и на жидких поверхностях раздела циркуляционных зон, где D^* имеет нуль второго порядка. Данные обстоятельства позволяют строить локальные (погранслойные) уравнения, которые при соответствующем обезразмеривании можно записать в виде

$$\partial c_0/\partial t = \partial[(1 + z^4)\partial c_0/\partial z]/\partial z,$$
$$\partial c_0/\partial t = \partial[(1 + z^2)\partial c_0/\partial z]/\partial z.$$

Эти уравнения, описывающие массообмен вблизи точек, где $w = 0$, часто определяют, в известном масштабе времени, течение всего процесса, поскольку в остальной части области z концентрация быстро (при $\mathrm{Pe} \gg 1$) выравнивается. Отметим, что второе уравнение можно использовать для расчета массообмена замкнутых каверн, обтекаемых по схеме Лаврентьева М. А. [11, 12] с внешним потоком.

Начальное условие для уравнения (1.9) получим при помощи процедуры сращивания с внутренним решением [8, 9], описывающим процесс при малых временах. Введем «внутреннее» время $\zeta = t/\varepsilon^2$. Для функции нулевого приближения по ε внутреннего решения получаем после предельного перехода $\varepsilon \to 0$ уравнение

$$\partial c^\circ/\partial\zeta = \Delta c^\circ, \tag{1.12}$$

где градус сверху помечает внутреннее решение. Проинтегрировав по всей области уравнение (1.12), применив теорему Грина, воспользовавшись граничными условиями (1.3) и далее проинтегрировав по ζ с учетом начального условия (1.4), найдем

$$\int\limits_\Omega c^\circ\, dx\, dy = \int\limits_\Omega F(x, y, z)\, dx\, dy. \tag{1.13}$$

Перейдя теперь к пределу $\zeta \to \infty$ в равенстве (1.13) и используя принцип предельного сращивания $c^\circ(x, y, z, \infty) = c_0(z, 0)$, получим

$$c_0|_{t=0} = \langle F\rangle = \frac{1}{s}\int\limits_\Omega F(x, y, z)\, dx\, dy \tag{1.14}$$

— искомое начальное условие для уравнения (1.9); s — безразмерная (отнесенная к a^2) площадь поперечного сечения канала. Продолжив далее описанную процедуру, можно найти уравнение для функции c_1 (точнее, $c_1{}^*$), аналогичное (1.9), но с источниковым слагаемым, а также начальное условие к нему.

2. Дисперсия примеси в тонких пленках жидкости. Рассмотрим общий случай дисперсии в произвольной ортогональной системе координат x_1, x_2, x_3, где протяженность области в x_3-направлении много меньше, чем в x_1- и x_2-направлениях. Уравнение конвективной диффузии в безразмерных переменных запишется в виде

$$\nu^2 H_1H_2H_3\frac{\partial c}{\partial T} + \nu\,\mathrm{Pe}\left[u_1H_2H_3\frac{\partial c}{\partial x_1} + u_2H_1H_3\frac{\partial c}{\partial x_2} + u_3H_1H_2 \times \right.$$
$$\left.\times \frac{\partial c}{\partial x_3}\right] = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial c}{\partial x_3}\right) + \nu^2\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial c}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial c}{\partial x_2}\right)\right], \tag{2.1}$$

где $x_1 = X_1/a$; $x_2 = X_2/a$; $x_3 = X_3/l$; $\nu = l/a$; $\mathrm{Pe} = v^*l/D$; $T = D\tau/a^2$. Компоненты скорости удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\partial(u_1H_2H_3)/\partial x_1 + \partial(u_2H_1H_3)/\partial x_2 + \partial(u_3H_1H_2)/\partial x_3 = 0,$$

которое устанавливает, как и ранее, связь масштаба скорости v^* вдоль осей X_1 и X_2 с масштабом скорости вдоль оси X_3. Здесь H_1, H_2, H_3 — коэффициенты Ламэ, которые считаем такими, чтобы существовали возникающие ниже интегралы, содержащие H_i. Будем полагать толщину пленки равной l, так что $x_3 \in (0, 1)$. Уравнение (2.1) дополним условиями

$$\partial c/\partial x_3 |_{x_3=0;1} = 0; \tag{2.2}$$

$$c|_{T=0} = R(x_1, x_2, x_3). \tag{2.3}$$

Другие условия, необходимые для полной постановки задачи, как и ранее, несущественны для нашего анализа. Полагаем ν малым параметром и ищем решение методом возмущений в виде ряда по степеням ν. Получим цепочку уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial c_0}{\partial x_3}\right) = 0; \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial c_1}{\partial x_3}\right) = \mathrm{Pe}\left[u_1 H_2 H_3 \frac{\partial c_0}{\partial x_1} + u_2 H_1 H_3 \frac{\partial c_0}{\partial x_2} + u_3 H_1 H_2 \frac{\partial c_0}{\partial x_3}\right]; \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial c_i}{\partial x_3}\right) = \mathrm{Pe}\left[u_1 H_2 H_3 \frac{\partial c_{i-1}}{\partial x_1} + u_2 H_1 H_3 \frac{\partial c_{i-1}}{\partial x_2} + u_3 H_1 H_2 \frac{\partial c_{i-1}}{\partial x_3}\right] + H_1 H_2 H_3 \frac{\partial c_{i-2}}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial c_{i-2}}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial c_{i-2}}{\partial x_2}\right), \quad i = 2, 3, \ldots, \tag{2.6}$$

где индекс помечает номер приближения. Каждое из уравнений подчиняется условиям (2.2) с соответствующим индексом при c. Из (2.4) с учетом (2.2) находим $c_0 = c_0(x_1, x_2, T)$. Далее из (2.5) получим после интегрирования

$$c_1 = \mathrm{Pe}\left[\frac{\partial c_0}{\partial x_1}\int_0^{x_3}\frac{H_3\,dz}{H_1 H_2}\int_0^z u_1 H_2 H_3\, d\xi + \frac{\partial c_0}{\partial x_2}\int_0^{x_3}\frac{H_3\,dz}{H_1 H_2}\int_0^z u_2 H_1 H_3\, d\xi\right] + c_1^*(x_1, x_2, T), \tag{2.7}$$

где функцию c_1^* можно определить, продолжая описываемую процедуру. Проинтегрируем уравнение (2.6) при $i = 2$ по x_3 в пределах (0, 1). Используя (2.7), уравнение неразрывности, условие непроницаемости плоскостей $z = 0$ и $z = 1$ для жидкости, найдем уравнение

$$m(x_1, x_2)\frac{\partial c_0}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[D_1(x_1, x_2)\frac{\partial c_0}{\partial x_1}\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[D_2(x_1, x_2)\frac{\partial c_0}{\partial x_2}\right] + \mathrm{Pe}^2\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left[D_{11}(x_1, x_2)\frac{\partial c_0}{\partial x_1} + D_{12}(x_1, x_2)\frac{\partial c_0}{\partial x_2}\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[D_{21}(x_1, x_2)\frac{\partial c_0}{\partial x_1} + D_{22}(x_1, x_2)\frac{\partial c_0}{\partial x_2}\right]\right\}, \tag{2.8}$$

где

$$D_1(x_1, x_2) = \int_0^1 \frac{H_2 H_3}{H_1}\, dx_3, \quad D_2(x_1, x_2) = \int_0^1 \frac{H_1 H_3}{H_2}\, dx_3, \tag{2.9}$$

$$m(x_1, x_2) = \int_0^1 H_1 H_2 H_3\, dx_3, \quad \Phi(x_1, x_2, \alpha) = \int_0^\alpha \frac{H_3\, dx_3}{H_1 H_2},$$

$$D_{11}(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 |\Phi(\alpha) - \Phi(\beta)|\, u_1(\alpha) H_2(\alpha) H_3(\alpha) u_1(\beta) H_2(\beta) H_3(\beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

$$D_{12}(x_1, x_2) = D_{21}(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 |\Phi(\alpha) - \Phi(\beta)|\, u_1(\alpha) H_2(\alpha) H_3(\alpha) u_2(\beta) H_1(\beta) H_3(\beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

$$D_{22}(x_1, x_2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 |\Phi(\alpha) - \Phi(\beta)|\, u_2(\alpha) H_1(\alpha) H_3(\alpha)\, u_2(\beta) H_1(\beta) H_3(\beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

В формулах (2.9) для D_{ij} под знаком интеграла опущены параметры x_1 и x_2, а оставлена только переменная интегрирования. При выводе этих формул существенно использовались условия

$$\int_0^1 u_1 H_2 H_3\, dx_3 = \int_0^1 u_2 H_1 H_3\, dx_3 = 0$$

отсутствия среднего переноса примеси в направлениях осей x_1 и x_2. Если коэффициенты «диффузии» D_1 и D_2 — это просто усредненные комбинации коэффициентов Ламэ, т. е. имеют чисто геометрическое происхождение, то в выражения для D_{ij} входят компоненты скорости и именно эти коэффициенты аналогичны тейлоровскому [1]. Неотрицательность коэффициентов D_{11} и D_{22} следует из другой формы их записи и условий $H_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$:

$$D_{11} = \int_0^1 \frac{H_3\, dx_3}{H_1 H_2}\left[\int_0^{x_3} u_1 H_2 H_3\, dx_3\right]^2 \geqslant 0. \tag{2.10}$$

Аналогичное соотношение имеет место и для D_{22}. Интересно отметить, что коэффициенты D_{ij} наряду с (2.10) удовлетворяют еще неравенству

$$D_{11} D_{22} \geqslant D_{12}^2, \tag{2.11}$$

которое в линейной неравновесной термодинамике следует из условия положительной определенности производства энтропии [13] при выполнении соотношений взаимности $D_{12} = D_{21}$ кинетических коэффициентов. Для доказательства (2.11) достаточно вместо $u_1 H_2 H_3$ под знаком внутреннего интеграла в (2.10) подставить $u_1 H_2 H_3 + p u_2 H_1 H_3$, и поскольку получившееся квадратичное относительно p выражение должно быть неотрицательным при любых p, его дискриминант должен быть неположительным, что и приводит, после некоторых преобразований, к неравенству (2.11).

Как и ранее в п. 1, при больших значениях числа Pe имеют определенное значение линии в плоскости x_1, x_2, где компоненты скорости u_1, u_2 обращаются в нуль. Снова можно строить погранслойные уравнения в зависимости от порядка нулей функций u_1 и u_2. Так же по аналогии с п. 1 доказывается, что начальным условием к уравнению (2.8) будет

$$c_0|_{T=0} = \langle R \rangle = \frac{1}{m}\int_0^1 R(x_1, x_2, x_3) H_1 H_2 H_3\, dx_3.$$

Заметим, что при рассмотрении конкретных координатных систем в некоторых выражениях, содержащих коэффициенты Ламэ, естественным образом возникает введенный параметр ν и можно соответствующие формулы упростить при $\nu \to 0$. Мы этого не делаем, желая сохранить возможность трактовки уравнения (2.8) как асимптотического при $T \to \infty$ и при необязательной малости ν (см. замечание в п. 1). Заметим также, что для коэффициентов D_{ij} можно привести формулы, аналогичные (1.11). Особенно простой вид они имеют в декартовой системе координат

$$D_{11} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j^2}{j^2}, \quad D_{12} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j \beta_j}{j^2}, \quad D_{22} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\beta_j^2}{j^2},$$

где

$$\alpha_j = \int_0^1 u_1(x_1, x_2, x_3)\cos(\pi j x_3)\, dx_3, \quad \beta_j = \int_0^1 u_2(x_1, x_2, x_3)\cos(\pi j x_3)\, dx_3$$

— коэффициенты ряда Фурье по системе ортогональных функций $\sqrt{2}\cos(\pi j x_3)$, $j = 1, 2, \ldots$, для компонент скорости u_1, u_2.

Примерами практической реализации предложенных в этом пункте соотношений могут служить задачи массопереноса в ячеечной структуре Бенара [13] или Тейлора при течении жидкости между коаксиальными цилиндрами.

3. Дисперсия примеси при нестационарных течениях жидкости. Схема построения дисперсионных уравнений и сами уравнения не изменятся, если компоненты скорости будут функциями времени в соответствующем масштабе. Для случая призматической трубы подобная задача рассматривалась в [14], где автор ограничился анализом дисперсии при периодически меняющемся профиле скорости. Применив моментный подход [2] и далее усреднив по периоду моменты концентрации, получили значение коэффициента дисперсии, не зависящее от времени, которое предполагается использовать в уравнении эквивалентной диффузии

$$\partial c/\partial t = D^* \partial^2 c/\partial z^2. \tag{3.1}$$

На наш взгляд, целесообразнее считать D^* функцией времени, как это естественно получается при применении изложенного выше алгоритма. Например, для круглой трубы при одномерном потоке, когда зависимость от времени не обязательно периодическая, имеем

$$D^*(t) = 2\int_0^1 \frac{dr}{r}\left[\int_0^r \xi w(\xi, t)\, d\xi\right]^2, \tag{3.2}$$

где r — радиальная координата цилиндрической системы координат. Представляется, что основное значение теории дисперсии — это замена сложных уравнений конвективной диффузии существенно более простыми с меньшим числом независимых переменных. Уравнения могут быть использованы (при выяснении условий пригодности) для анализа массообменных процессов в природных явлениях и технических устройствах. В этой связи построение эквивалентного уравнения диффузии только на основе исследования асимптотических свойств первых двух моментов

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{+\infty} z^i c(x, y, z, t)\, dz, \quad M_i = \frac{1}{s}\int_\Omega \mu_i(x, y, t)\, dx\, dy, \quad i = 0, 1, 2,$$

как это часто делается в литературе, в частности в [14], не является убедительным, поскольку нет уверенности, что в уравнение дисперсии не войдут какие-нибудь другие (кроме $\partial^2 c/\partial z^2$) слагаемые, которых моментный подход не «замечает». Например, выражение $\partial^3 c/\partial z^3$ при естественных условиях убывания концентрации c и ее производных при $z \to \pm\infty$ дает нуль при вычислении моментов до третьего порядка включительно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^i (\partial^3 c/\partial z^3)\, dz = 0, \quad i = 0, 1, 2,$$

т. е. для обнаружения такого слагаемого следует привлекать моменты более высокого порядка, а обоснованное построение уравнения типа Тейлора в подобных ситуациях может стать весьма сложным.

В случае одномерного течения в трубе зависимость от времени коэффициента D^* не представляет принципиальных затруднений для анализа процессов распространения примеси на основе уравнения (3.1), поскольку, введя «модифицированное время» $t^* = \int_0^t D^*(\tau)\, d\tau$, получаем обычное уравнение диффузии с постоянным коэффициентом диффузии в движущейся системе координат со средней (по r) скоростью, которая в данном случае зависит от времени. Кроме того, расчет D^* по (3.2) или (1.10), где у компоненты скорости w добавлена зависимость от времени $w(x, y, t)$, но нет зависимости от z, может оказаться проще, чем по соответствующим формулам [14], а зависимость от t — достаточно общей. В случае неодномерных течений в вытянутых зонах описанное выше сведение к уравнению с постоянным коэффициентом диффузии невозможно и существенных упрощений не возникает даже в погранслойных уравнениях при больших числах Пекле вблизи линий, где w обращается в нуль.

4. Некоторые замечания и дополнения. В предложенные уравнения эквивалентной диффузии легко вписываются некоторые неучтенные нами эффекты. Так, если задан источник вещества слабой (порядка ε^2) интенсивности в объеме или на поверхностях границы, то в уравнения (1.9) и (2.8) они войдут естественным образом как функции c_0 и, возможно, других переменных. На поверхности может быть и более сложное условие, скажем, $\partial c/\partial x_3|_{x_3=0} = \nu^2 g(c - c_*)$ (c_* — равновесная концентрация, а функция g (порядка единицы) произвольна). Можно перейти также к неподвижным в пространстве координатным системам. Если в случае уравнения (1.9) к нему добавится слагаемое вида $\langle W\rangle \partial c/\partial z$, где средняя скорость $\langle W\rangle$ не зависит от продольной координаты, как это следует из уравнения неразрывности, то в случае уравнения (2.8) компоненты средней скорости в конвективных слагаемых будут зависеть от координат

$$\frac{\partial c_0}{\partial x_1}\int_0^1 H_2H_3U_1\,dx_3 + \frac{\partial c_0}{\partial x_2}\int_0^1 H_1H_3U_2\,dx_3$$

(скорости W, U_1, U_2 относятся к неподвижной системе координат). Для расчета коэффициента дисперсии по (1.10), (2.9) необходимо знать распределение некоторых компонент скорости в области течения. Это отдельная задача, здесь она не рассматривается. Заметим, однако, что нам требуются интегральные характеристики скорости, которые в ряде случаев определяются точнее, чем локальные, при применении приближенных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Taylor G.** Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube // Proc. Roy. Soc. London.— 1953.— V. 219, N 1137.
2. **Aris R.** On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube // Proc. Roy. Soc. London.— 1956.— V. 235, N 1200.
3. **Gill W. N., Sankarasubramanian R.** Exact analysis of unsteady convective diffusion // Proc. Roy. Soc. London.— 1970.— V. 316, N 1526.
4. **Марон В. И.** Перемешивание взаимно растворимых жидкостей в турбулентном потоке в трубе // ПМТФ.— 1971.— № 5.
5. **Дильман В. В., Кронберг А. Е.** О продольной дисперсии при ламинарном движении жидкости в круглой трубе // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1984.— № 1.
6. **Fan L. T., Wang C. B.** Dispersion of matter in non-Newtonian laminar flow through a circular tube // Proc. Roy. Soc. London.— 1966.— V. 292, N 1429.
7. **Марон В. И.** Модель дисперсии с учетом различия вязкостей сред // ИФЖ.— 1974.— Т. 26, № 1.
8. **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972.
9. **Найфэ А.** Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.
10. **Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.** Уравнения в частных производных математической физики.— М.: Высш. шк., 1970.
11. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели.— М.: Наука, 1977.
12. **Гольдштик М. А.** Вихревые потоки.— М.: Наука, 1981.
13. **Гленсдорф П., Пригожин И.** Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций.— М.: Мир, 1973.
14. **Пригожин Л. Б.** Дисперсия примеси в пульсирующем потоке // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1982.— № 5.

г. Ленинград

Поступила 18/VI 1987 г.