та, полученными в данной работе, однако для форсунок с меньшим R и при меньших p_0 имеется значительное различие, которое, по-видимому, можно объяснить влиянием вязкости.

Величина s, определяемая формулой (14), равная по ПМР единице, меняется при изменении A от $A = 0$ до $A \to \infty$ от $s \to \infty$ до $s = 2$, т. е. поток сверхкритический, что и приводит к указанному выше различию для φ, несмотря на близость значений коэффициентов расхода при больших A.

Таким образом, главное утверждение ПМР, что поток в сопле должен быть точно критическим, не согласуется с точным решением. Это обстоятельство дает основание для сомнения в надежности результатов, получаемых с его помощью.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абрамович Г. Н.** Теория форсунки с центробежным распылом жидкости.— М.: ЦАГИ, 1943.
2. **Абрамович Г. Н.** Теория центробежной форсунки // Пром. аэродинамика.— М.: ЦАГИ, 1944.
3. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости.— М.: Мир, 1973.
4. **Taylor G.** The mechanism of swirl atomizers // Proc. 7th Intern. Congr. for Appl. Mech.— L., 1948.— V. 2.
5. **Новиков И. И.** Об одном случае движения несжимаемой жидкости в цилиндрическом канале // Тр. Военно-Морской Академии им. К. Е. Ворошилова.— Л., 1945.
6. **Гольдштик М. А.** Вихревые потоки.— Новосибирск: Наука, 1981.
7. **Хавкин Ю. И.** Центробежные форсунки.— Л.: Машиностроение, 1976.

Поступила 8/VIII 1988 г.

УДК 532.526; 551.465

ДИНАМИКА ОДНОРОДНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО СЛОЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В. Ю. Ляпидевский

(Новосибирск)

При больших числах Рейнольдса течение несжимаемой стратифицированной по плотности жидкости разбивается на области турбулентного движения, перемежающиеся с областями ламинарного течения [1]. Турбулентное течение возникает под воздействием сдвиговой неустойчивости или в результате воздействия граничных условий. Одна из проблем описания таких течений состоит в параметризации процесса вовлечения окружающей жидкости в турбулентный слой [2, 3]. Принципиальный момент здесь — влияние стратификации на скорость вовлечения. В зависимости от соотношения сил плавучести и инерции преобладает тот или иной механизм развития неустойчивости, приводящий к перемешиванию [2]. При этом скорость вовлечения может меняться в десятки раз. Так как заранее неизвестно, в какой области течения реализуется данный тип неустойчивости, то представляет интерес построение модели стратифицированного течения, единообразно описывающей процесс вовлечения.

Один из возможных подходов к решению этой проблемы демонстрируется ниже на примере задачи об эволюции турбулентного слоя в покоящейся жидкости другой плотности. К классу таких течений относятся затопленные струи, гравитационные течения, заглубление верхнего однородного слоя в океане под действием ветра [1]. В построенной модели должны найти отражение такие экспериментально изученные свойства течений, как возможность управления процессом вовлечения изменением условий вниз по потоку, резкое уменьшение скорости вовлечения при переходе от сверхкритического к докритическому течению, а также явление возбуждения коротких внутренних волн на границе турбулентного слоя в течениях со сдвигом скорости [2].

В данной работе эти явления рассматриваются на основе уравнений движения слоя, представляющих собой вариант уравнений «мелкой воды» с учетом перемешивания. Они выведены из законов сохранения аналогично [4]. Скорость вовлечения жидкости в турбулентный слой полагается пропорциональной скорости «больших вихрей», сравнимых по масштабу с толщиной слоя [2, 5]. Анализ бегущих волн рассматриваемой системы показывает, что решения типа солитон или прыжок-волна описывают наблюдаемую в натурных условиях генерацию короткопериодных внутренних волн на гребне более длинных (приливных) волн [6, 7].

Уравнения «мелкой воды». В приближении Буссинеска уравнения тонкого горизонтального слоя жидкости толщины h, плотности ρ, движущегося со скоростью u в покоящейся жидкости плотности ρ_r, имеют вид

$$h_t + (hu)_x = \sigma q,\ (bh)_t + (bhu)_x = 0,\quad (1)$$
$$(hu)_t + (hu^2 + 0.5bh^2)_x = 0,$$
$$(h(u^2 + e + bh))_t + (hu(u^2 + e + 2bh))_x = 0.$$

Здесь t — время; x — горизонтальная координата; $b = (\rho - \rho_r)g/\rho_r$ — плавучесть; g — вертикальная компонента ускорения силы тяжести; e — энергия пульсационного движения. Скорость вовлечения покоящейся жидкости в однородный слой полагается пропорциональной скорости «больших вихрей» q, характеризующей пульсационные движения в слое, сравнимые по масштабу с основным течением [5]. Система (1) будет замкнута, если положить

$$e = q^2.\quad (2)$$

Постоянная σ определяет отношение масштабов пульсационного и среднего движений в потоке со сдвигом скорости. Ее численное значение $\sigma = 0{,}15$ найдено в [8] при исследовании вовлечения в однородной жидкости и не зависит от стратификации [2].

Из системы (1), (2) следует уравнение

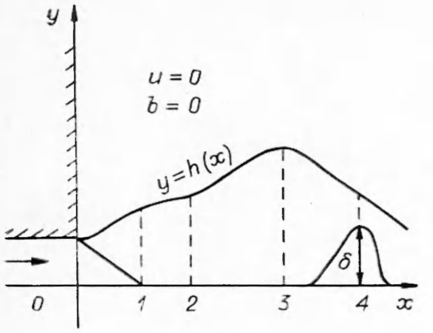
$$(hq)_t + (hqu)_x = 0{,}5\sigma(u^2 + e - bh).\quad (3)$$

Уравнение (3) показывает, что в случае устойчивой стратификации ($b > 0$) система (1), (2), описывает не только процесс вовлечения покоящейся жидкости в однородный слой ($q > 0$), но и волновой процесс на границе слоя, в котором кинетическая энергия переходит в потенциальную за счет вовлечения более легкой жидкости и обратно (скорость q знакопеременна). Это приводит к возбуждению в потоке волн определенной длины. Если же новый выбранный масштаб осреднения сравним с длиной этих волн, то среднее значение скорости $\langle q \rangle$ будет существенно отличаться от мгновенного значения и, значит, $\langle e \rangle > \langle q^2 \rangle$. Поэтому после осреднения по новому масштабу уравнения (1), (3) становятся независимыми (знаки осреднения опускаются) и образуют замкнутую систему. Дифференциальным следствием этой системы является уравнение «диссипации» энергии мелкомасштабного движения $e_0 = e - q^2$: $e_{0t} + ue_{0x} = -\sigma q e_0/h$. Если в начальный момент $e_0 = 0$, то в непрерывном решении (1), (3) $e_0 \equiv 0$ во все моменты времени, т. е. системы (1), (2) и (1), (3) в этом случае эквивалентны.

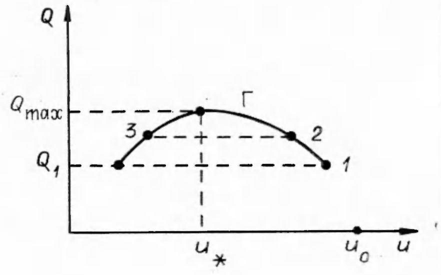
Затопленная струя. Основные свойства стационарных решений системы (1), (3) можно проиллюстрировать на примере задачи о затопленной струе (рис. 1). Начальный участок *0—1* соответствует слою смешения, который описывается уравнениями двухслойной «мелкой воды» [2] и здесь не рассматривается. При достаточно большом начальном числе Фруда $\mathrm{Fr}_0 = u_0/(b_0h_0)^{1/2}$ слой смешения достигает дна и ниже по потоку переходит в затопленную струю. На участке *1—2* течение сверхкритическое ($\mathrm{Fr} = u/(bh)^{1/2} > 1$) и происходит интенсивное вовлечение покоящейся жидкости. Особенность течений смешивающихся жидкостей — возможность управления внутренним гидравлическим прыжком *2—3*, осуществляющим переход к докритическому течению ($\mathrm{Fr} < 1$), при помощи контрольного сечения *4* [9].

С возрастанием высоты препятствия δ количество вовлекаемой в струю жидкости уменьшается, причем как в самом гидравлическом прыжке *2—3*, так и в докритическом течении *3—4* вовлечение по сравнению с участком *1—2* сверхкритического течения весьма незначительно.

Для того чтобы объяснить наблюдаемые особенности течения в струе с точки зрения выведенной выше модели, рассмотрим возможные стационарные решения системы (1), (3) на плоскости (u. Q), где $Q = hu$ — расход жидкости в струе (рис. 2). Если состояние *0* представляет собой равномерный потенциальный поток ($h = h_0$, $u = u_0$, $b = b_0$, $e_0 = 0$, $q_0 = 0$),



Р и с. 1



Р и с. 2

то слой смешения переходит в затопленную струю при $Q > Q_1 = 2Q_0$. Состояния на кривой Г при $u < u_* = (b_0h_0u_0)^{1/3}$ соответствуют докритическому течению, а при $u > u_*$ — сверхкритическому. Максимальный режим вовлечения $Q_{\max}$ реализуется в точке максимума кривой Г, т. е. отвечает критическому течению ($\delta = 0$). Поэтому нет необходимости в использованном в [10] дополнительном условии устойчивости для нахождения $Q_{\max}$. Так, отношения экспериментальных значений h_e, u_e, Q_e, найденных в [10] для режима максимального вовлечения к соответствующим значениям в данной модели, весьма близки к единице ($h_e/h_{\max} = 0{,}96$, $u_e/u_{\max} = 0{,}98$, $Q_e/Q_{\max} = 0{,}93$). С возрастанием высоты препятствия δ формируется гидравлический прыжок *2—3*, соотношения на котором следуют из законов сохранения (1), (3). В частности, $Q_2 = Q_3$. Зависимость Fr за прыжком от высоты препятствия исследована в [9] в предположении, что на участке *3—4* вовлечение отсутствует. Наблюдаемое резкое сокращение скорости вовлечения после гидравлического прыжка объясняется тем, что в отличие от перехода *0—2*, где $q > 0$, скорость q на *3—4* знакопеременна, т. е. средняя скорость $\langle q \rangle$ близка к нулю за счет интенсивного волнового движения внутри слоя. Равновесное или квазистационарное состояние слоя достигается, если

$$\langle q \rangle \equiv 0, \quad bh \equiv u^2 + e. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что условие (4) может быть реализовано только в докритическом течении $bh < u^2$.

Бегущие волны системы (1), (3). Пусть волна распространяется со скоростью D по равновесному фону ($u_0 = 0$, $e_0 = b_0h_0$, $q_0 = 0$), т. е. искомые величины в (1), (3) зависят только от переменной $\xi = x - Dt$ ($D > 0$). При этом система (1), (3) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой может быть найдено в квадратурах. В безразмерных переменных $\eta = h/h_0$, $v = u/D$, $\mathrm{Ri}_D = b_0h_0/D^2$ зависимость ξ от v имеет вид

$$\xi = \int\limits_{v_1}^{v} \frac{dQ}{\sigma r}, \quad r^2 = \frac{1}{2Q^2}\int\limits_{v_1}^{v} g(s)\,dQ^2(s),$$

$$g(v) = v\left(\frac{3\,\mathrm{Ri}_D}{(1-v)^2} - 4\right), \quad Q = (v-1)\,\eta,$$

$$v_1 = \begin{cases} 0, & \mathrm{Ri}_D > 1, \\ 0{,}5\,\mathrm{Ri}_D(\eta_1^2 - 1), & \mathrm{Ri}_D \leqslant 1, \end{cases} \quad \eta_1 = \frac{\sqrt{\mathrm{Ri}_D^2 + 8\,\mathrm{Ri}_D} - \mathrm{Ri}_D}{2\,\mathrm{Ri}_D}.$$

В зависимости от значения параметра Ri_D возможны следующие решения системы (1), (3):

а) $1 \leqslant \mathrm{Ri}_D < 4/3$ (солитон),

б) $1/3 < \mathrm{Ri}_D < 1$ (прыжок-волна),

в) $\mathrm{Ri}_D = 1/3$ (бор).

При $\mathrm{Ri}_D = 4/3$ скорость волны D совпадает со скоростью распространения возмущений в равновесной модели, состоящей из законов сохранения массы, импульса и энергии (последние три уравнения в (1)) и условия (4). При $\mathrm{Ri}_D = 1$ волна движется со скоростью распространения возмущений в системе (1), (3). Поэтому непрерывное решение (солитон) возможно в диапазоне скоростей волны D между равновесной и замороженной скоростями распространения возмущений. Если $D > \sqrt{b_0 h_0}$, то решение состоит из гидравлического прыжка, к которому примыкает периодическое решение (прыжок-волна).

С возрастанием скорости D амплитуда волн за прыжком уменьшается, и при $D = \sqrt{3 b_0 h_0}$ начальное равновесное состояние прыжком переводится в новое равновесное состояние (бор). Максимальная амплитуда волн за прыжком $\sim 0{,}2\, h_0$, характерные длины волн от $40\, h_0$ до $60\, h_0$. Интересная особенность бегущих волн — наличие двух максимумов на гребне волны при $\mathrm{Ri}_D \sim 1$.

Генерация короткопериодных внутренних волн на гребне более длинных (приливных, сейшевых) волн наблюдалась рядом исследователей [6, 7]. В случае, когда термоклин расположен почти на дне, резкому его поднятию сопутствует цуг интенсивных коротких волн, параметры которых (длина, амплитуда) соответствуют бегущим волнам системы (1), (3). Поэтому некоторые наблюдаемые особенности возникновения и распространения короткопериодных внутренних волн в окрестности термоклина (выделенная частота колебаний, перемежаемость цугов волн, связанная с прохождением гребня более длинной волны) могут быть объяснены исходя из свойств решений системы (1), (3).

З а м е ч а н и е. Рассмотренная система (1), (3) содержит единственный параметр σ, численное значение которого не влияет на структуру решений, так как он может быть исключен из системы растяжением независимых переменных. Выбор численного значения $\sigma = 0{,}15$ для однородной и стратифицированной жидкости представляет своего рода гипотезу о «насыщенности» спектра движений подсеточного масштаба в течениях жидкости со сдвигом скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тернер Дж.** Эффекты плавучести в жидкостях.— М.: Мир, 1977.
2. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.— Новосибирск: Наука, 1985.
3. **Филлипс О. М.** Вовлечение // Моделирование и прогноз верхних слоев океана/ Под ред. Э. Б. Крауса.— Л.: Гидрометеоиздат, 1979.
4. **Ляпидевский В. Ю.** Моделирование двухфазных течений на основе законов сохранения // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1986.— Вып. 76.
5. **Ляпидевский В. Ю.** Задача о слое смешения в однородной жидкости // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1986.— Вып. 74.
6. **Сабинин К. Д., Шулепов В. А.** К модели частотного спектра внутренних волн в океане // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.— 1981.— Т. 17, № 1.
7. **Иванов В. А., Коняев К. В., Серебряный А. Н.** Группы интенсивных внутренних волн в шельфовой зоне моря // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.— 1981.— Т. 17, № 12.
8. **Таунсенд А. А.** Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом.— М.: ИЛ, 1959.
9. **Wilkinson D. L., Wood J. R.** A rapidly varied flow phenomenon in a two-layer flow // J. Fluid Mech.— 1971.— V. 47, N 2.
10. **Chu V. H., Baddour R. E.** Turbulent gravity-stratified shear flows // J. Fluid Mech.— 1984.— V. 138.— P. 353.

Поступила 5/VIII 1988 г.