

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ КУЭТТОВСКОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

С. В. Маклаков, К. В. Прибыткова, А. М. Столин,
С. И. Худяев
(Черноголовка)

В [1, 2] исследовалось течение жидкости в условиях конкурентного взаимодействия диссипативного тепловыделения и фазового перехода. При этом применялось квазистационарное приближение по скорости и температуре, позволившее определить области характерных режимов течения — полного фазового превращения, режима стационарного течения с промежуточным положением границы фаз и режима гидродинамического теплового взрыва (ГТВ) [3].

Такой подход, предполагающий достаточно большие теплоты фазового перехода и принадлежность начальных распределений температуры и скорости области притяжения стационарных профилей, имеет ограниченное применение. Выяснение области его применения — задача нестационарного анализа — обсуждается в данной работе.

1. Постановка задачи. Рассмотрим куэттовское течение вязкой несжимаемой жидкости, находящейся между двумя соосными бесконечными цилиндрами; внутренний (с радиусом r_0) вращается, а внешний (с радиусом r_1) неподвижен. Внешний цилиндр охлаждается ниже температуры фазового перехода T_* , в результате чего образуется слой твердого вещества толщиной $\Delta = r_* - r_0$, где r_* — координата границы раздела фаз. Принимается аррениусовская зависимость вязкости от температуры $\eta = \eta_0 \exp(E/RT)$, где E — энергия активации вязкого течения, R — универсальная газовая постоянная, η_0 — предэкспоненциальный множитель, T — температура.

Систему уравнений теплопроводности и движения, а также реологическое уравнение можно записать в виде

$$(1.1) \quad r < r_*: c_1 \rho_1 \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \sigma r \frac{\partial \Omega}{\partial r};$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{1}{\rho_1 r^3} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma r^2), \quad \sigma = \eta r \frac{\partial \Omega}{\partial r};$$

$$(1.3) \quad r > r_*: c_2 \rho_2 \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

Здесь Ω — угловая скорость жидкости; t — время; r — текущий радиус; $c_1, c_2, \rho_1, \rho_2, \lambda_1, \lambda_2$ — соответственно теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности жидкой и твердой фаз.

Считается, что в начальный момент времени жидкость покоится при постоянной температуре T_n :

$$t = 0: \Omega = 0, \quad T = T_n.$$

На поверхности внешнего цилиндра ($r = r_1$) принимается закон охлаждения

$$(1.4) \quad \begin{aligned} T > T_*: \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial r} &= -\alpha_1 (T - T_0), \\ T < T_*: \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial r} &= -\alpha_1 (T - T_0), \\ T_0 &= T_\infty + (T_n - T_\infty) \exp(-wt), \end{aligned}$$

где α_1 — коэффициент теплопроводности внешнего цилиндра; T_∞ — температура окружающей среды; T_0 — температура внешнего цилиндра; w — скорость охлаждения. Такой режим охлаждения нетрудно реализовать в изотермическом ротационном вискозиметре.

На внутреннем цилиндре $r = r_0$ задается теплообмен по закону Ньютона

$$(1.5) \quad \lambda_1 = \partial T / \partial r = \alpha_2 (T - T_s),$$

где α_2 , T_s — коэффициент теплоотдачи и температура внутреннего цилиндра.

Вискозиметрический эксперимент обычно проводится либо на вискозиметре постоянной скорости, когда поддерживается скорость вращения внутреннего цилиндра, либо на вискозиметре постоянного момента, когда на внутреннем цилиндре поддерживается постоянное напряжение деформирования. Поэтому уравнение движения (1.2) рассматривается либо при заданной скорости

$$(1.6) \quad r = r_0 : \Omega = \Omega_0,$$

либо при заданном напряжении

$$(1.7) \quad r = r_0 : \sigma = \sigma_0.$$

Условия на подвижной границе раздела фаз имеют вид

$$(1.8) \quad r = r_* : \Omega = 0, \quad T = T_*, \quad \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_*-0} = \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_*+0} - Q \rho_1 \frac{\partial r_*}{\partial t},$$

где Q — теплота фазового перехода.

Введем безразмерные переменные:

$$\theta = \frac{E}{RT_*^2} (T - T_*), \quad \xi = \frac{r}{r_0}, \quad \xi_* = \frac{r_*}{r_0}, \quad \tau = \frac{ta_1}{r_0^2},$$

$\omega = \Omega / \Omega_0$ при заданной скорости, $\omega = \Omega \eta(T_*) / \sigma_0$ при заданном напряжении.

В безразмерных переменных уравнения (1.1)–(1.3) с краевыми условиями (1.4)–(1.8) запишем в форме

$$(1.9) \quad \xi < \xi_* : \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \delta \left(\xi \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right)^2 \exp \left(- \frac{\theta}{1 + \beta \theta} \right);$$

$$(1.10) \quad \frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \text{Pr} \frac{1}{\xi^3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi^3 \exp \left(- \frac{\theta}{1 + \beta \theta} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right];$$

$$(1.11) \quad \xi > \xi_* : \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi};$$

$$(1.12) \quad \xi = \xi_* : \theta = 0, \quad \omega = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_*-0} = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_*+0} - \Lambda \frac{\partial \xi_*}{\partial \tau};$$

$$(1.13) \quad \xi = 1 : \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \text{Bi}_2 (\theta - \theta_s);$$

$$(1.14) \quad \omega = 1 \quad \text{либо} \quad \exp \left(- \frac{\theta}{1 + \beta \theta} \right) \xi \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 1;$$

$$(1.15) \quad \xi = d : \begin{cases} \theta > 0, & \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = -\text{Bi}_1 [\theta - \theta_\infty - (\theta_n - \theta_\infty) \exp(-\bar{w}\tau)], \\ \theta < 0, & \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = -\text{Bi}_1 [\theta - \theta_\infty - (\theta_n - \theta_\infty) \exp(-\bar{w}\tau)]. \end{cases}$$

$$\text{Здесь} \quad \lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}; \quad a = \frac{a_2}{a_1}; \quad d = \frac{r_1}{r_0}; \quad \beta = \frac{RT_*}{E};$$

$$\theta_\infty = \frac{E}{RT_*^2} (T_\infty - T_*); \quad \theta_s = \frac{E}{RT_*^2} (T_s - T_*); \quad \theta_n = \frac{E}{RT_*^2} (T_n - T_*);$$

$$\bar{w} = \frac{r_0^2}{a_1} w; \quad \text{Bi}_1 = \frac{\alpha_1 r_0}{\lambda_1}; \quad \text{Bi}_2 = \frac{\alpha_2 r_0}{\lambda_1};$$

$$\Lambda = \frac{QF}{RT_*^2 \nu_1}; \quad \text{Pr} = \frac{c_1 \eta(T_*)}{\lambda_1} \text{ — безразмерные параметры. Параметр } \delta \text{ имеет}$$

вид

$$\delta = \frac{E}{RT_*^2} \frac{r_0^2 \Omega_0^2 \eta(T_*)}{\lambda_1}$$

при заданной скорости и

$$\delta = \frac{E}{RT_*^2} \frac{r_0^2 \sigma_0^2}{\lambda_1 \eta(T_*)}$$

при заданном напряжении.

2. Стационарные состояния системы. В [1,2] найдены аналитические решения стационарных задач о течении жидкости между двумя плоскопараллельными пластинами и напорном течении в трубе в условиях фазового перехода. Результаты решения этих задач качественно совпадают с результатами решения стационарной задачи о куэттовском течении между двумя коаксиальными цилиндрами, однако специфическая геометрия такого течения вносит некоторые особенности. В частности, здесь появляется параметр d , характеризующий кривизну.

Рассмотрим стационарные состояния системы, когда внутренний цилиндр теплоизолирован, а на внешнем задан теплообмен по закону Ньютона $w \rightarrow \infty$. Преобразуя экспоненту по Франк-Каменецкому ($\beta\theta \ll 1$, $\beta\theta^2 \ll 1$) [4], стационарную систему уравнений получим в виде

$$(2.1) \quad \xi < \xi_*: \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \delta \exp(-\theta) \left(\xi \frac{d\omega}{d\xi} \right)^2 = 0;$$

$$(2.2) \quad \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \frac{d\omega}{d\xi} \exp(-\theta) \right] = 0;$$

$$(2.3) \quad \xi > \xi_*: \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} = 0;$$

$$(2.4) \quad \xi = \xi_*: \theta = 0, \omega = 0, \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_*-0} = \lambda \left. \frac{d\omega}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_*+0};$$

$$(2.5) \quad \xi = 1: \frac{d\theta}{d\xi} = 0, \omega = 1 \quad \text{либо} \quad \xi \frac{d\omega}{d\xi} \exp(-\theta) = 1;$$

$$(2.6) \quad \xi = d: \frac{d\theta}{d\xi} = -\text{Bi}_1 (\theta - \theta_\infty).$$

После исключения градиента скорости с помощью (2.2) уравнение (2.1) сведем к уравнению, известному из теории теплового взрыва [4], после чего найдем решение системы (2.1)–(2.3) с граничными условиями (2.4)–(2.6):

$$(2.7) \quad \xi < \xi_*: \theta = \ln(b_1 \xi^2) - \ln \{ \text{ch}^2 [b_2 - \sqrt{b_1 b_3 \delta / 2} \ln(\sqrt{\xi_* / \xi})] \},$$

$$\omega = 1 - \sqrt{2b_1 / \delta} \{ \text{th} [b_2 - \sqrt{b_1 b_3 \delta / 2} \ln \sqrt{\xi_*}] - \text{th} [b_2 - \sqrt{b_1 b_3 \delta / 2} \ln(\sqrt{\xi_* / \xi})] \};$$

$$(2.8) \quad \xi > \xi_*: \theta = \frac{\text{Bi}_1 \theta_\infty \ln(\xi / \xi_*)}{1/d + \text{Bi}_1 \ln(d / \xi_*)}.$$

Константы интегрирования b_1 , b_2 и координата фазового фронта ξ_* определяются из системы уравнений

$$(2.9) \quad \text{ch} [b_2 + \sqrt{b_1 b_3 \delta / 2} \ln \sqrt{\xi_*}] = \sqrt{b_1} \xi_*;$$

$$(2.10) \quad \text{th} \left[b_2 + \sqrt{\frac{b_1 b_3 \delta}{2}} \ln \sqrt{\xi_*} \right] = \sqrt{\frac{2}{b_1 b_3 \delta}} \left\{ 1 - \frac{\lambda \text{Bi}_1 \theta_\infty}{2 [1/d + \text{Bi}_1 \ln(d / \xi_*)]} \right\};$$

$$(2.11) \quad \text{th} [b_2 - \sqrt{b_1 b_3 \delta / 2} \ln \sqrt{\xi_*}] = \sqrt{2 / (b_1 b_3 \delta)}.$$

Константа интегрирования b_3 имеет смысл безразмерного напряжения на внутреннем цилиндре. При заданном напряжении $b_3 = 1$, а при заданной скорости

$$b_3 = \frac{1}{\delta} \frac{\lambda \text{Bi}_1 \theta_\infty}{1/d + \text{Bi}_1 \ln(d/\xi_*)}.$$

Система уравнений (2.9)–(2.11) решалась численно. Рассматривался предельный случай $\text{Bi}_1 \rightarrow \infty$, т. е. на внешнем цилиндре задавалась постоянная температура T_∞ . Влияние параметра Bi_1 на стационарные состояния системы при куэттовском течении изучалось в [2].

Оказалось (ср. [2]), что если при заданной скорости зависимость $\delta(\xi_*)$ монотонно возрастающая, то при заданном напряжении в некотором диапазоне изменения параметра $s = -\lambda\theta_\infty/2$ эта зависимость оказывается немонотонной (рис. 1, $s = 0,05$, $d = 1,1$). Границы области немонотонности $\delta_+(s)$ и $\delta_-(s)$, определяющие критические условия ГТВ и полного фазового превращения, изображены на рис. 2 (сплошные линии соответствуют $d = 1,1$). При $s = s_*$ кривые $\delta_+(s)$ и $\delta_-(s)$ сливаются, а при $s > s_*$ зависимость $\delta(\xi_*)$ становится монотонно возрастающей. Эти результаты качественно совпадают с результатами для случая плоскопараллельной полосы. Можно показать и их количественное совпадение, если зазор между цилиндрами мал, т. е. $d - 1 \ll 1$; тогда связь между значениями $\delta_\pm$ для коаксиальных цилиндров и $\delta_\pm^{\parallel}$ для плоскопараллельной полосы [2] имеет вид

$$(2.12) \quad \delta_\pm = \delta_\pm^{\parallel} d^2 / (1 - d)^2.$$

Численное исследование уравнений (2.9)–(2.11) показало, что формула (2.12) дает погрешность не более 15% при $d < 1,5$. Из (2.12) и решения (2.9)–(2.11) видно, что с увеличением слоя между цилиндрами критические значения δ резко уменьшаются. На рис. 2 штрихпунктирные линии — $\delta_\pm(s)$ при $d = 1,5$.

Уменьшение $\delta_\pm$ с ростом d объясняется тем, что при увеличении толщины жидкого слоя (и кривизны) условия теплоотвода из жидкости ухудшаются, что облегчает развитие ГТВ.

Воспользуемся результатами анализа [2] в квазистационарном приближении, когда выполняются условия

$$(2.13) \quad \Lambda \gg 1, \text{Pr} \Lambda \gg 1.$$

В [2] отмечено, что только возрастающая ветвь зависимости $\delta(\xi_*)$ (см. рис. 1) может быть устойчивой. Анализ уравнения движения фазового фронта в квазистационарном приближении с начальными условиями $\xi_* = 1$ при $\tau = 0$ позволил определить на плоскости параметров δ и s области характерных состояний системы. Уравнение границы $\delta_0(s)$, разделяющей область течения с промежуточным положением фазового фронта от области ГТВ при $s < s_0$ и область полного фазового превращения от области ГТВ при $s > s_0$, имеет вид (см. рис. 2)

$$(2.14) \quad \delta_0 = 0,878d^2(1 + s)^2 / (1 - d)^2.$$

Границей, разделяющей область полного фазового превращения и тече-

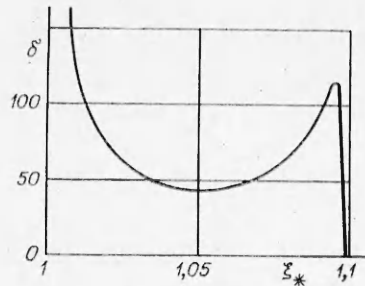


Рис. 1

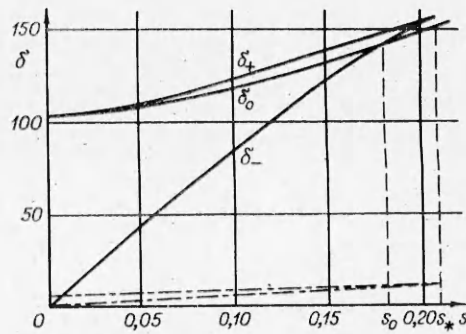
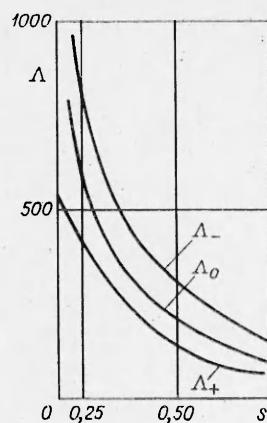
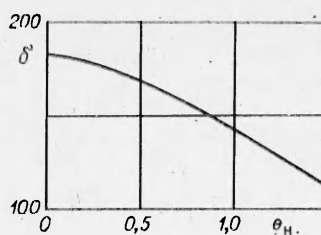


Рис. 2



Р и с. 4



Р и с. 3

ния с промежуточным положением фазового фронта при $s < s_0$, является кривая $\delta_-(s)$ (см. рис. 2).

3. Область применения квазистационарного приближения. Численное решение задачи (1.9)—(1.15) показывает, что квазистационарное приближение выполняется при промежуточных значениях теплот фазового перехода $\Lambda = \Lambda_0$ (рис. 3), не слишком больших, но и не слишком малых. Это можно объяснить следующим. При малых теплотах фазового перехода Q (когда не выполняется условие (2.13)) квазистационарные профили температур и скоростей не будут успевать подстраиваться под быстрое движение фазового фронта. При больших теплотах Q в системе даже при докритических δ ($\delta < \delta_0$) из-за наличия дополнительного источника тепла, обусловленного фазовым превращением, могут развиваться взрывные разогревы, соответствующие правой неустойчивой ветви зависимости $\delta(\xi_*)$. Критические условия развития нестационарных процессов зависят от теплоты фазового перехода, и поэтому соотношение (2.14) выполняется не в каком-то интервале изменений Λ , а при $\Lambda = \Lambda_0$. На рис. 4 приведена зависимость Λ_0 от параметра s , характеризующего интенсивность охлаждения.

Во многих случаях может оказаться необходимым вести расчет критических условий при произвольном Λ . В связи с этим вызывает интерес вопрос о применении формулы (2.14) в широком диапазоне значений Λ . Проведен расчет области, в которой формула (2.14) выполняется с точностью 10%. Границы этой области — кривые $\Lambda_+(s)$ и $\Lambda_-(s)$ (см. рис. 3), вдоль которых справедливы критические значения δ (соответственно $\delta_0 \pm 0,1\delta_0$). Оказалось, что эта область достаточно широка, особенно при небольших s ($\Lambda_+(s)/\Lambda_0(s) = 0,7$, $\Lambda_-(s)/\Lambda_0(s) = 2,4$ при $s = 0,2$). При увеличении s область, ограниченная кривыми $\Lambda_+(s)$ и $\Lambda_-(s)$, несколько сужается, оставаясь тем не менее достаточно широкой ($\Lambda_+(s)/\Lambda_0(s) = 0,7$ и $\Lambda_-(s)/\Lambda_0(s) = 1,2$ при $s = 0,75$). Следовательно, формулу (2.14), полученную из квазистационарного приближения, можно использовать с небольшой погрешностью в широком диапазоне изменения параметра Λ (от Λ_+ до Λ_- , см. рис. 3).

4. Влияние начальной температуры на развитие нестационарных процессов. Исследование задачи о фазовом переходе в условиях диссипативного тепловыделения в стационарной и квазистационарной постановке не позволяет рассмотреть влияние начальной температуры на развитие нестационарных процессов. Между тем в [2] указано на то, что начальные разогревы могут сильно изменить критические условия развития ГТВ и полного фазового превращения, полученные из стационарной и квазистационарной теории. Из теории теплового взрыва [5] известно, что при начальных разогревах, больших, чем 1, резко уменьшается критическое значение δ , при котором развивается тепловой взрыв. Критическое значение δ , полученное из стационарной теории теплового взрыва [4], реализуется лишь при разогревах $\theta < 1$. Можно ожидать, что влияние началь-

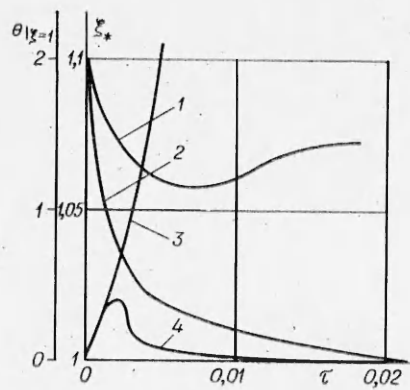


Рис. 5

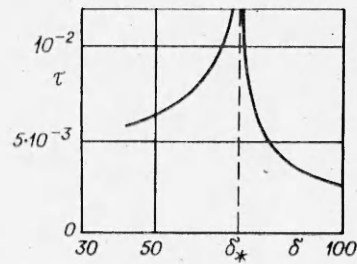


Рис. 6

ных разогревов на развитие ГТВ будет аналогичным. Ясно также, что начальные разогревы могут влиять и на процесс полного фазового превращения. Горячая жидкость должна затвердевать медленнее, т. е. при меньших δ , и поэтому область на рис. 2, соответствующая полному фазовому превращению, должна сужаться.

Действительно, расчет показывает, что увеличение начальной температуры приводит к уменьшению критического значения δ_0 , полученного из квазистационарной теории (см. рис. 4, где $s = 0,3$, $\Lambda = 400$). Однако этот эффект проявляется меньше, чем в теории теплового взрыва. Видно, что δ_0 существенно не меняется в интервале начальных разогревов от 0 до 0,5. Даже при $\theta_n = 1$ критическое значение δ_0 падает лишь на 20% ($\delta_0(1) = 140$). Существенное влияние начальных разогревов сказывается лишь при $\theta_n > 1,5$.

Таким образом, квазистационарная теория применима в широком диапазоне начальных температур.

5. Нестационарные особенности развития ГТВ и полного фазового превращения. Рассмотрим нестационарные особенности развития процессов при неизотермическом течении жидкости в условиях фазового перехода.

Расчет показывает, что в развитии ГТВ можно выделить две стадии, различающиеся направлением движения фазовой границы (рис. 5, кривая 1). На рис. 5 кривые 1 и 3 соответствуют $s = 0,75$, $\delta = 319$, $\Lambda = 115$, кривые 2 и 4 — $s = 0,75$, $\delta = 319$, $\Lambda = 10$. На первой стадии ($\tau < \tau_*$) на холодной стенке образуется слой твердого вещества (ξ_* уменьшается). В дальнейшем разогревы в жидкости растут и на второй стадии образовавшийся слой начинает таять (ξ_* увеличивается, т. е. $\partial \xi_*/\partial \tau$ меняет знак). Толщина образовавшегося на первой стадии слоя может достигать примерно половины зазора. На обеих стадиях развития ГТВ температура адиабатической стенки $\theta|_{\xi=1}$ монотонно увеличивается.

В процессе полного фазового превращения также можно выделить две стадии: на первой стадии температура адиабатической стенки растет, на второй — падает.

Изменение знака $\partial \theta / \partial \tau|_{\xi=1}$ при полном фазовом превращении и $\partial \xi_*/\partial \tau$ при ГТВ — характерная особенность этих процессов, что позволяет различить их на ранних стадиях развития. Кривые 1 и 2 показывают зависимости положения фазового фронта от времени при развитии ГТВ и полном фазовом превращении, кривые 3 и 4 — изменение температуры внутреннего цилиндра при развитии ГТВ и полном фазовом превращении. Время развития нестационарных процессов зависит от интенсивности тепловыделения и охлаждения, а также от начальных условий. На рис. 6 представлена зависимость периода индукции ГТВ и времени полного фазового превращения от параметра δ , характеризующего интенсивность тепловыделения при $\theta_n = 3$, $s = 0,05$. При малых δ за малое время про-

исходит полное фазовое превращение. С увеличением δ время полного фазового превращения растет и обращается в бесконечность при $\delta \rightarrow \delta_*$. При дальнейшем увеличении δ развивается гидродинамический тепловой взрыв, при этом период индукции ГТВ уменьшается. Аналогично зависят времена нестационарных процессов и от начальной температуры.

В настоящей работе лишь вскользь упоминается о режиме заданной скорости вращения, в котором всегда устанавливается единственное стационарное состояние с промежуточным положением фазовой границы (ср. [2]), и поэтому с точки зрения нестационарных особенностей течения он не представляет большого интереса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маклаков С. В., Столин А. М., Худяев С. И. Напорное течение жидкости, застывающей с поверхности трубы, с учетом диссипативного тепловыделения. Препринт ОИХФ АН СССР. Черноголовка, 1984.
2. Маклаков С. В., Столин А. М., Худяев С. И. Фазовый переход в условиях неизотермического куэттовского течения жидкости. — ПМТФ, 1984, № 4.
3. Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И. О гидродинамическом тепловом «взрыве». — ДАН СССР, 1965, т. 163, № 1.
4. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.
5. Абрамов В. Г., Гонтковская В. Т., Мержанов А. Г. К теории теплового воспламенения. — Изв. АН СССР. Сер. химическая, 1966, № 3.

Поступила 16/XI 1984 г.

УДК 532.529.6

ДВИЖЕНИЕ ТОРОИДАЛЬНОЙ ГАЗОВОЙ ПОЛОСТИ В БЕЗГРАНИЧНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Дорфман, Г. И. Яговдик

(Ленинград)

Исследование движения тороидальной газовой полости представляет интерес главным образом в связи с тем, что при определенных условиях первоначально сферической газовой полости в результате образования центральной кумулятивной струи приобретает тороидальную форму.

В [1] изучено расширение тороидальной газовой полости в рамках модели сжимаемой жидкости. Результаты этой работы дают возможность определить максимальный радиус полости, однако в [1] предполагается, что кольцевая ось полости неподвижна. Между тем в ряде случаев расширение тороидальной полости сопровождается движением ее в вертикальном и горизонтальном направлениях.

Рассмотрим динамику тороидальной полости с учетом перемещений ее кольцевой оси. Пусть в начальный момент времени в безграничной несжимаемой жидкости плотностью ρ в горизонтальной плоскости расположена тороидальная газовая полость, радиус кольцевой оси которой a , радиус поперечного сечения R_0 . Давление газа внутри полости p_0 , давление в жидкости на глубине расположения полости p_∞ , полость обладает вертикальной скоростью V . Динамика полости включает две основные составляющие: пульсационное движение вблизи кольцевой оси, вызванное перепадом давления $p_0 - p_\infty$, и движение в вертикальном направлении, обусловленное наличием вертикальной скорости и поддерживаемое силой плавучести.

Для составления уравнений движения полости определим потенциал скорости, обусловленной пульсирующим и всплывающим тором, т. е. найдем гармоническую функцию во внешности тора, большой и малый радиусы которого соответственно a и R .

Будем исходить из мультипольного разложения потенциала

$$(1) \quad \Phi = D_0 \Phi_0 + \sum_{i=1}^2 D_i \frac{\partial \Phi_0}{\partial z_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 D_{ij} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z_i \partial z_j} + \dots,$$