

## ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ПЛАСТОВ С НЕОДНОРОДНЫМ ЛИНЗОВИДНЫМ СТРОЕНИЕМ И ОЦЕНКЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ БУРЕНИИ СКВАЖИН

**А.И. Вересков, Р.Д. Каневская, С.В. Коробкин**

*РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, „Иннепро“, 107082, Москва, Спартаковская пл., 16, корп. 1, Россия*

В настоящее время все больше внимания уделяется проблеме добычи углеводородов, относящихся к категории трудноизвлекаемых. К данному типу относятся запасы, приуроченные к пластам со сложной геологической структурой. В частности, такие пласты могут характеризоваться линзовидным строением, при котором отдельные линзы коллектора распределены внутри непроницаемой матрицы. Для описания подобных залежей естественным представляется использование аппарата стохастического моделирования.

В данной работе вероятностное описание системы линз базируется на наборе характеристик, описывающих форму залежи или ее участка, плотность распределения линз, их форму и характерные размеры, а также общее количество линз в пределах рассматриваемой области.

Разработан математический аппарат для описания взаимосвязей в системе линзы—скважины. Выведены формулы для вероятностей событий, порожденных структурой рассматриваемой системы. Затем методом максимального правдоподобия с помощью полученных формул и имеющихся данных бурения решалась обратная задача, и оценивались числовые значения характеристик системы линз.

Найденные зависимости позволили решить различные прикладные задачи. Предложенный подход использовался для анализа неопределенностей и рисков, возникающих при размещении скважин, а также для оценки эффективности горизонтального бурения и гидравлического разрыва пласта в линзовидных резервуарах.

Описанный метод применялся для оценки параметров одного из нефтяных месторождений Западной Сибири.

*Геологическое моделирование, песчаные линзы, вероятностный подход, система линзы—скважины, оценка рисков.*

## PROBABILISTIC DESCRIPTION OF LENTICULAR RESERVOIRS AND UNCERTAINTY ASSESSMENT ON DRILLING

**A.I. Vereskov, R.D. Kanevskaya, and S.V. Korobkin**

Increasingly more attention is paid to the problem of hydrocarbon production from reservoirs with a complex geologic structure. In particular, these beds can be of lenticular structure, with separate sandstone lenses distributed in a shale matrix. A stochastic approach seems to be quite natural to describe such deposits.

The probabilistic description of a system of lenses involves the following parameters: shape and size of deposit, shape and size of lens, probability density of distribution of lenses, and number of lenses in the study area.

Mathematical tools have been devised to describe relationships between a system of lenses and a system of wells. Formulae for the probabilities of the relevant events have been derived and used to solve an inverse problem. The parameters of the system of lenses are numerically estimated by the method of maximum likelihood using data of exploratory drilling.

Some results of practical significance have been obtained. The proposed approach has been used to analyze the uncertainty and risk of well location and to estimate the horizontal drilling efficiency and hydraulic fracturing in lenticular reservoirs. The described approach is illustrated by its application to the estimation of oil field parameters. An example was a field in West Siberia.

*Geological simulation, sand lens, probabilistic approach, system of lenses and wells, risk assessment*

### ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются нефтяные и газовые пласты, характеризующиеся неоднородным линзовидным строением, при котором песчаные линзы распределены внутри глинистой матрицы. Представления о геологическом строении таких резервуаров всегда содержат элемент неопределенности, связанный с учетом геометрии песчаных линз и их распределения в межскважинном пространстве. Задача оценки рисков при бурении скважин на такие пласты должна решаться с применением методов теории вероятности и математической статистики. Подходы к решению этой проблемы связаны либо с исследованием вероятностных характеристик пласта и различных событий, обусловленных взаимным расположением песчаных линз и забоев скважин [1, 2], либо с прямым моделированием линзовидного пласта с использованием методов Монте-Карло [3—5]. Первый подход подразумевает изучение геометрических вероятностей для описания пласта и оценки запасов углеводородов [6—8]. При втором подходе, наиболее

© А.И. Вересков, Р.Д. Каневская, С.В. Коробкин, 2005

распространенном в настоящее время, прямое моделирование внутренней неоднородности пласта осуществляется на основе геостатистического анализа с применением различных методов: распределений Гаусса [3, 9], нейронных сетей [10], Марковских моделей [3], индикаторных функций [11], Булевых множеств [1] и т. п.

Проблема оценки характерных размеров, формы и ориентации песчаных тел при моделировании линзовидного пласта решается либо в результате корреляции по скважинам, если они расположены достаточно близко одна к другой; либо по известным соотношениям между продольным размером и толщиной линз, определенным по аналогии с другими месторождениями; либо с привлечением данных сейсмоки; либо на основе генетических моделей, которые учитывают историю осадконакопления при формировании залежи [12, 13].

В данной работе предлагается вероятностное описание взаимосвязей систем линз и скважин. Рассматриваются различные события, порожденные структурой связей в системе линзы—скважины, и оцениваются вероятности этих событий. Предполагается, что песчаные линзы заданной формы распределены случайным образом внутри рассматриваемой области, границы которой известны. Вероятностное описание системы линз базируется на наборе характеристик, описывающих плотность распределения линз в пределах рассматриваемой области (месторождения, участка), законе распределения линз по размерам, общему количеству линз.

Основные этапы исследования соответствуют методологии теории вероятностей и математической статистики. На первом этапе разрабатываются математические модели и выводятся формулы для вероятностей различных событий, связанных с системой линзы—скважины (прямая задача). Эти формулы содержат характеристики системы линз, числовые значения которых могут быть неизвестны. На втором этапе с использованием полученных формул и имеющейся информации по скважинам неизвестные характеристики оцениваются методом максимального правдоподобия (обратная задача). Наконец, на третьем этапе найденные числовые значения подставляются в формулы, полученные на первом этапе, и вычисляются вероятности рассматриваемых событий.

В соответствии с этим подходом найдено выражение для вероятности события, состоящего в том, что каждая скважина вскрывает ту или иную линзу. Этот результат используется для решения обратной задачи — уточнения количества линз и параметров плотностей распределения линз по размерам и по площади участка.

Из полученных формул выводятся практически важные результаты. Оценивается вероятность бурения „сухой“ скважины, а также пропуска песчаной линзы рядом скважин. Для трещин гидравлического разрыва и горизонтальных скважин оценивается вероятность вскрытия новой линзы в зависимости от длины трещины или горизонтального ствола.

### СХЕМАТИЗАЦИЯ ПЛАСТА И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Все рассматриваемые задачи относятся к одному пласту. Если имеется несколько пластов, задачи решаются независимо для каждого пласта. Предполагается, что пласт представляет собой совокупность песчаных линз заданной формы, распределенных случайным образом внутри глинистой матрицы. Границы рассматриваемой области пласта заданы. Линзы независимы одна от другой. Распределение линз по размерам носит случайный характер. Характеристики распределения линз в пространстве и по размерам могут различаться по осям координат.

Рассматривается псевдотрехмерная модель линзовидного пласта, характеризующаяся двумерным дискретным случайным полем, которое в каждой точке с некоторой вероятностью принимает значение, равное количеству линз, находящихся под данной точкой поверхности [14] (рис. 1). В дальнейшем для определения объемных характеристик резервуара предлагается задавать толщину линз на основе корреляционных зависимостей между толщиной и продольным размером. Таким образом, вероятностное описание системы линз включает форму и размеры области пласта, форму линз, плотности вероятностей распределения линз в пространстве и по размерам, общее количество линз в пределах рассматриваемой области.

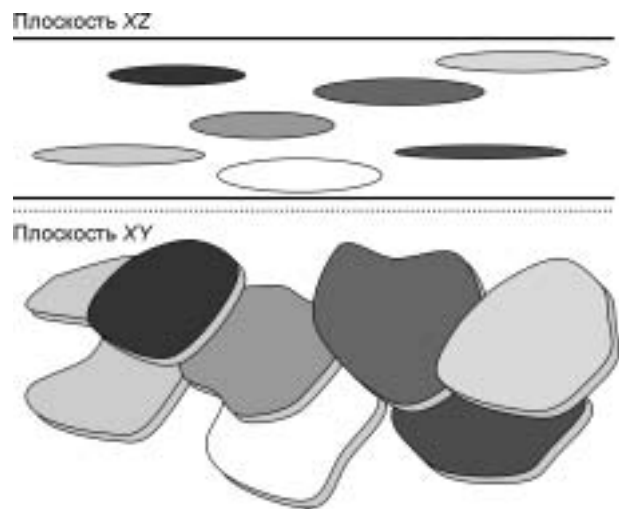


Рис. 1. Схема линзовидного пласта.

Для каждой линзы рассматривается прямоугольник минимального размера, содержащий линзу, со сторонами, параллельными осям координат  $X$  и  $Y$ . Форма линз характеризуется коэффициентом  $\beta$ , равным отношению площади линзы к площади прямоугольника. Например, для линз эллиптической формы  $\beta = \pi/4$ . Прямоугольники характеризуются случайными координатами центров  $(\xi, \eta)$  и случайными длинами сторон  $2l$  и  $2s$ . Все четыре случайные величины независимы в совокупности и имеют распределения известного вида, зависящие от характеристик, числовые значения которых могут быть неизвестны. Пусть  $n$  — количество линз. Тогда система линз задается набором  $4n$  случайных величин, независимых в совокупности.

Например, случайные величины могут иметь нормальные распределения со следующими характеристиками:

$$\xi \sim N(o, \sigma_\xi^2), \eta \sim N(0, \sigma_\eta^2), l \sim N(m_l, \sigma_l^2), s \sim N(m_s, \sigma_s^2). \quad (1)$$

Здесь  $N(m, \sigma^2)$  — нормальное распределение со средним значением  $m$  и стандартным отклонением  $\sigma$ . В данном примере используется система координат с центром в точке, соответствующей наибольшей плотности расположения линз. Характеристики  $\sigma_\xi, \sigma_\eta$  должны быть согласованы с размерами рассматриваемого месторождения или участка. Предполагается, что  $m_l > 2\sigma_l, m_s > 2\sigma_s$ , т. е. величины  $l$  и  $s$  можно считать положительными. Это означает также, что линзы с размерами, близкими к нулю, с большой вероятностью исключаются из рассмотрения.

Допустим, что в пределах рассматриваемого участка имеется  $m$  скважин, расположенных в точках  $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_m(x_m, y_m)$ . Тогда каждой линзе  $\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ) может быть поставлена в соответствие числовая последовательность  $(\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m})$ , которая определяется следующим образом:  $\pi_{\alpha i} = 1$ , если  $i$ -я скважина встретила линзу, и  $\pi_{\alpha i} = 0$  в противоположном случае. Событие  $(\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m})$  состоит в том, что только скважины, находящиеся в точках  $M_i$  встретили линзу, если соответствующие значения  $\pi_{\alpha i}$  равны единице, а остальные — нулю. Вероятность события  $(\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m})$  обозначим  $P(\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m})$ .

Структуру связей в системе линзы—скважины можно определить при помощи структурной матрицы  $\pi = (\pi_{\alpha i})$ . Матрица  $\pi = (\pi_{\alpha i})$  размера  $n \times m$  содержит элементы, которые могут принимать значения 0 или 1. Строки матрицы соответствуют линзам, а столбцы — скважинам. Каждая структурная матрица  $\pi$  порождает событие в рассматриваемом вероятностном пространстве. Пусть  $P(\pi)$  — вероятность события  $\pi$ . Наличие нулевых строк в матрице  $\pi$  означает, что соответствующие линзы не встречены ни одной скважиной. Запись  $\pi = 0$  означает, что матрица  $\pi$  состоит из одних нулей. На практике число линз  $n$  может быть неизвестно. Ниже будет описан способ оценки величины  $n$  наряду с остальными неизвестными характеристиками системы линз.

### ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЙ В СИСТЕМЕ ЛИНЗЫ—СКВАЖИНЫ

Допустим, что имеется ряд скважин ( $m$ ), расположенных в точках  $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_m(x_m, y_m)$ , и задана структурная матрица  $\pi$ . Оценим вероятность  $P(\pi)$  события  $\pi$ .

Для произвольно распределенных случайных величин  $\xi, \eta, l, s$  соотношения для плотностей совместного распределения величин  $\xi + l, \xi - l$  и  $\eta + s, \eta - s$ , характеризующих границы линз, представляются следующим образом [15]:

$$\begin{aligned} f_{\xi+l, \xi-l}(u, v) &= 0,5 f_\xi\left(\frac{u+v}{2}\right) f_l\left(\frac{u-v}{2}\right), \\ g_{\eta+s, \eta-s}(u, v) &= 0,5 g_\eta\left(\frac{u+v}{2}\right) g_s\left(\frac{u-v}{2}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $f_l, g_s, f_\xi, g_\eta$  — плотности распределения величин  $l, s, \xi$  и  $\eta$  соответственно.

В частности, для нормально распределенных случайных величин (1) выражения (2) принимают вид

$$\begin{aligned} f_{\xi+l, \xi-l}(u, v) &= (4\pi\sigma_\xi\sigma_l)^{-1} \exp\left[-\frac{\sigma_\xi^{-2}(u+v)^2 + \sigma_l^{-2}(u-v-2m_l)^2}{8}\right], \\ g_{\eta+s, \eta-s}(u, v) &= (4\pi\sigma_\eta\sigma_s)^{-1} \exp\left[-\frac{\sigma_\eta^{-2}(u+v)^2 + \sigma_s^{-2}(u-v-2m_s)^2}{8}\right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Если координаты центров линз  $\xi$  и  $\eta$  равномерно распределены в пределах прямоугольного участка  $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$ , из соотношений (2) следует:

$$\begin{aligned} f_{\xi+l, \xi-l}(u, v) &= \frac{0,5}{\xi_2 - \xi_1} I_{[\xi_1, \xi_2]} \left( \frac{u+v}{2} \right) f_l \left( \frac{u-v}{2} \right), \\ f_{\eta+s, \eta-s}(u, v) &= \frac{0,5}{\eta_2 - \eta_1} I_{[\eta_1, \eta_2]} \left( \frac{u+v}{2} \right) g_s \left( \frac{u-v}{2} \right), \\ I_{[a, b]}(w) &= \begin{cases} 1, & w \in [a, b] \\ 0, & w \notin [a, b] \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Функции совместного распределения вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} F_{\xi+l, \xi-l}(u, v) &= \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^v f_{\xi+l, \xi-l}(\lambda, \nu) d\lambda d\nu, \\ G_{\eta+s, \eta-s}(u, v) &= \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^v g_{\eta+s, \eta-s}(\lambda, \nu) d\lambda d\nu. \end{aligned} \quad (5)$$

Допустим сначала, что сетка скважин регулярная. Составим вариационные ряды абсцисс и ординат точек  $M_1, \dots, M_m$  и дополним их крайними членами  $x_{(0)} = -\infty, x_{(m+1)} = +\infty, y_{(0)} = -\infty, y_{(m+1)} = +\infty$ . Получим расширенные вариационные ряды  $x_{(0)}, x_{(1)}, \dots, x_{(m)}, x_{(m+1)}$  и  $y_{(0)}, y_{(1)}, \dots, y_{(m)}, y_{(m+1)}$ .

Рассмотрим какую-либо одну линзу  $\alpha$  и получим формулу для вероятности  $P(\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m})$  события  $(\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m})$ . Пусть вначале  $(\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ , т. е. хотя бы одна скважина встретила линзу.

Обозначим  $R_\alpha$  прямоугольник минимального размера со сторонами, параллельными осям координат, который содержит все скважины, встретившие линзу (рис. 2). Этот прямоугольник представляет собой прямое произведение отрезков, концы которых совпадают с некоторыми членами соответствующего вариационного ряда:  $R_\alpha = [x_\alpha^-, x_\alpha^+] \times [y_\alpha^-, y_\alpha^+]$ . Для рассматриваемого события  $R_\alpha$  — непустое множество, хотя, может быть, и вырожденное, если один или оба отрезка вырождены:  $x_\alpha^- = x_\alpha^+$  или(и)  $y_\alpha^- = y_\alpha^+$ .

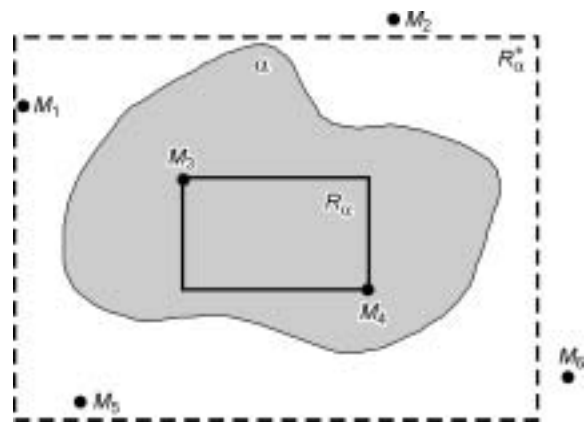
Пусть  $R_\alpha^* = [x_\alpha^-, x_\alpha^{++}] \times [y_\alpha^-, y_\alpha^{++}]$  — прямоугольник минимального размера со сторонами, параллельными осям координат, который с заданной вероятностью, близкой к единице, содержит линзу. Если  $\beta = 1$ , то прямоугольник  $R_\alpha^*$  определяется с учетом следующего дополнительного условия: область  $R_\alpha^* - R_\alpha$  не содержит ни одной скважины. В этом случае  $x_\alpha^-, x_\alpha^{++}, y_\alpha^-, y_\alpha^{++}$  совпадают с некоторыми членами соответствующего расширенного вариационного ряда. Прямоугольник  $R_\alpha^*$  может быть неограничен в одном или нескольких направлениях.

Таким образом, определено однозначное отображение множества событий рассматриваемого вида во множество пар прямоугольников:  $(\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m}) \rightarrow (R_\alpha, R_\alpha^*)$ . Причем, поскольку  $R_\alpha \subset R_\alpha^*$ , выполняются следующие неравенства:

$$x_\alpha^- < x_\alpha^- \leq x_\alpha^+ < x_\alpha^{++}, \quad y_\alpha^- < y_\alpha^- \leq y_\alpha^+ < y_\alpha^{++}.$$

Каждое событие  $(\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m})$  эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{aligned} x_\alpha^- < \xi_\alpha - l_\alpha \leq x_\alpha^-, \quad x_\alpha^+ \leq \xi_\alpha + l_\alpha < x_\alpha^{++}, \\ y_\alpha^- < \eta_\alpha - s_\alpha \leq y_\alpha^-, \quad y_\alpha^+ \leq \eta_\alpha + s_\alpha < y_\alpha^{++}. \end{aligned}$$



**Рис. 2.** К определению прямоугольников  $R_\alpha$  и  $R_\alpha^*$ , характеризующих событие  $(0,0,1,1,0,0)$  для линзы  $\alpha$  и скважин  $M_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ).

В силу предположения о независимости в совокупности случайных величин  $\xi, \eta, l, s$ , вероятность события  $(\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m})$  определяется выражением

$$\begin{aligned} P(\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m}) &= \\ &= \beta^k (1 - \beta)^{k - k_1} P(x_{\alpha}^+ \leq \xi_{\alpha} + l_{\alpha} < x_{\alpha}^{++}, x_{\alpha}^- < \xi_{\alpha} - l_{\alpha} \leq x_{\alpha}^-) \times \\ &\times P(y_{\alpha}^+ \leq \eta_{\alpha} + s_{\alpha} < y_{\alpha}^{++}, y_{\alpha}^- < \eta_{\alpha} - s_{\alpha} \leq y_{\alpha}^-). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\beta$  — коэффициент, характеризующий форму линзы,  $k$  — общее число скважин, попавших в прямоугольник  $R_{\alpha}^*$ ,  $k_1 \leq k$  — количество скважин, встретивших линзу. Для вывода формулы (6) применяется схема Бернулли [15], в которой попадание скважины в линзу соответствует успешному исходу с вероятностью  $\beta$ . Подстановка выражений (5) в формулу (6) дает

$$\begin{aligned} P(\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m}) &= \\ &= \beta^{k_1} (1 - \beta)^{k - k_1} \int_{x_{\alpha}^+}^{x_{\alpha}^{++}} \int_{x_{\alpha}^-}^{x_{\alpha}^-} \int_{\xi_{\alpha} + l_{\alpha}}^{\xi_{\alpha} - l_{\alpha}} f_{\xi_{\alpha}}(\lambda, \nu) d\lambda d\nu \int_{y_{\alpha}^+}^{y_{\alpha}^{++}} \int_{y_{\alpha}^-}^{y_{\alpha}^-} g_{\eta_{\alpha}}(\lambda, \nu) d\lambda d\nu. \end{aligned} \quad (7)$$

Соотношение (7) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} P(\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m}) &= \beta^k (1 - \beta)^{k - k_1} \times \\ &\times [F_{\xi_{\alpha} + l_{\alpha}, \xi_{\alpha} - l_{\alpha}}(x_{\alpha}^{++}, x_{\alpha}^-) - F_{\xi_{\alpha} + l_{\alpha}, \xi_{\alpha} - l_{\alpha}}(x_{\alpha}^+, x_{\alpha}^-) - F_{\xi_{\alpha} + l_{\alpha}, \xi_{\alpha} - l_{\alpha}}(x_{\alpha}^+, x_{\alpha}^-) + F_{\xi_{\alpha} + l_{\alpha}, \xi_{\alpha} - l_{\alpha}}(x_{\alpha}^+, x_{\alpha}^-)] \times \\ &\times [G_{\eta_{\alpha} + s_{\alpha}, \eta_{\alpha} - s_{\alpha}}(y_{\alpha}^{++}, y_{\alpha}^-) - G_{\eta_{\alpha} + s_{\alpha}, \eta_{\alpha} - s_{\alpha}}(y_{\alpha}^+, y_{\alpha}^-) - G_{\eta_{\alpha} + s_{\alpha}, \eta_{\alpha} - s_{\alpha}}(y_{\alpha}^+, y_{\alpha}^-) + G_{\eta_{\alpha} + s_{\alpha}, \eta_{\alpha} - s_{\alpha}}(y_{\alpha}^+, y_{\alpha}^-)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Формулы (6)—(8) получены для случая, когда  $(\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ .

Для одной линзы  $\alpha$  вероятность события, состоящего в том, что ни одна скважина не встретила линзу, определяется из уравнения

$$P(0, 0, \dots, 0) = 1 - \sum_{(\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m}) \neq (0, 0, \dots, 0)} P(\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m}). \quad (9)$$

Здесь суммирование производится по множеству всевозможных различных событий, для которых  $(\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ . Выражение (9) может быть использовано для оценки риска пропустить линзу группой скважин.

Пользуясь формулой для полиномиального распределения и учитывая независимость в совокупности всех  $4n$  случайных величин, характеризующих систему линз, получим формулу для вероятности события  $\pi$ :

$$P(\pi) = \frac{n!}{\prod_{\alpha=1}^n (\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m})!} \prod_{\alpha=1}^n P(\pi_{\alpha 1}, \pi_{\alpha 2}, \dots, \pi_{\alpha m}). \quad (10)$$

Здесь  $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$  — произвольная строка из нулей и единиц;  $n(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$  — число вхождений этой строки в матрицу  $\pi$ ; произведение берется по всевозможным различным строкам.

Выражения (9), (10) позволяют определить вероятность события, состоящего в том, что скважины, находящиеся в точках  $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_m(x_m, y_m)$ , не встретят ни одну линзу

$$P(0) = P(0, 0, \dots, 0)^n. \quad (11)$$

Уравнения (6)—(11) получены для регулярной сетки скважин. В случае произвольного расположения скважин решение этих задач носит алгоритмический характер и реализуется с помощью специально разработанной компьютерной программы.

Практический интерес представляет собой оценка вероятности  $P_m(0)$  события, состоящего в том, что скважина, расположенная в точке  $M(x, y)$ , не встретит ни одной линзы

$$P_M(0) = \{1 - \beta[F_{\xi_{\alpha} - l_{\alpha}}(x) - F_{\xi_{\alpha} + l_{\alpha}}(x)][G_{\eta_{\alpha} - s_{\alpha}}(y) - G_{\eta_{\alpha} + s_{\alpha}}(y)]\}^n. \quad (12)$$

Выражение (12) для вероятности „сухой“ скважины получается в результате преобразования уравнения (8) для случая одной скважины с последующим применением формул (9), (11).

**ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ГИДРОРАЗРЫВА И ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКВАЖИН  
ДЛЯ УВЕЛИЧЕНИЯ НЕФТЕОТДАЧИ ЛИНЗОВИДНОГО ПЛАСТА**

Вероятностный подход позволяет оценить возможность прироста коэффициента нефтеотдачи при увеличении длины трещин гидроразрыва или горизонтальных стволов в линзовидных пластах. Вначале рассматривается симметричная вертикальная трещина гидроразрыва с полудлиной  $\rho$ , исходящая из точки  $M(x_0, y_0)$ , соответствующей скважине. Предполагается, что трещина вскрывает пласт по всей толщине. Направление трещины задается углом  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$ , который она составляет с осью  $x$ . Таким образом, трещина представляется отрезком в плоскости  $(x, y)$  с центром в точке  $M(x_0, y_0)$ :

$$x_{\pm} = x_0 \pm \rho t \cos \alpha, \quad y_{\pm} = y_0 \pm \rho t \sin \alpha, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (13)$$

Здесь знак „плюс“ соответствует крылу трещины, вдоль которого  $x > x_0$ , а знак „минус“ — противоположному. Найдем вероятность  $P_0(M, \rho, \alpha)$  события, состоящего в том, что трещина не встретит ни одной новой линзы в ходе роста от точки  $M(x_0, y_0)$  в оба направления.

Предположим вначале, что имеется всего одна линза, и рассмотрим случай достаточно малого  $\rho$ . Вероятность  $P_1(M, \rho, \alpha)$  события, состоящего в том, что трещина в ходе роста пересечет границу ровно одной линзы при входе в нее, с точностью до величин, бесконечно малых относительно  $\rho$ , определяется следующим образом:

$$P_1(M, \rho, \alpha) = \beta \times \\ \times [P(x_0 < \xi - l < x_0 + \rho \cos \alpha, \eta - s < y_0 < \eta + s) + P(y_0 < \eta - s < y_0 + \rho \sin \alpha, \xi - l < x_0 < \xi + l) + \\ + P(x_0 - \rho \cos \alpha < \xi + l < x_0, \eta - s < y_0 < \eta + s) + P(y_0 - \rho \sin \alpha < \eta + s < y_0, \xi - l < x_0 < \xi + l)].$$

В правой части этого выражения в квадратных скобках содержатся вероятности несовместных событий, поэтому результирующая вероятность  $P_1(M, \rho, \alpha)$  вычисляется путем их суммирования. В силу предположения о независимости в совокупности случайных величин  $\xi, \eta, l, s$  (с точностью до бесконечно малых относительно  $\rho$ ) выражение для  $P_1(M, \rho, \alpha)$  может быть представлено в виде

$$P_1(M, \rho, \alpha) = \beta \mu \rho, \quad \mu = \mu(x_0, y_0, \alpha); \quad (14)$$

$$\mu(x_{\pm}, y_{\pm}, \alpha) = \{f_{\xi-l}^+(x_+) [G_{\eta-s}(y_+) - G_{\eta+s}(y_+)] + f_{\xi+l}^-(x_-) [G_{\eta-s}(y_-) - G_{\eta+s}(y_-)]\} |\cos \alpha| + \\ + \{g_{\eta-s}(y_+) [F_{\xi-l}^-(x_+) - F_{\xi+l}^+(x_+)] + g_{\eta+s}(y_-) [F_{\xi-l}^-(x_-) - F_{\xi+l}^-(x_-)]\} |\sin \alpha|. \quad (15)$$

Здесь  $\mu$  — среднее значение на отрезке, соответствующем трещине, функции  $\mu(x_{\pm}, y_{\pm}, \alpha)$ , которая полностью определяется характеристиками распределений  $\xi, \eta, l, s$ .

Формула (14) получена в предположении, что имеется всего одна линза. Для  $n$  линз с учетом малости  $\rho$  имеем

$$P_1(M, \rho, \alpha) = n \beta \mu \rho (1 - \beta \mu \rho)^{n-1} \approx n \beta \mu \rho. \quad (16)$$

Для того чтобы освободиться от предположения о бесконечной малости  $\rho$ , рассмотрим дискретный неубывающий случайный процесс  $\zeta(t)$ , принимающий целочисленные значения, равные числу новых линз, пересекаемых трещиной в ходе распространения, или, что то же самое, при увеличении параметра  $t$  в выражении (13) от 0 до 1. Согласно (16), при бесконечно малом  $\rho$  вероятность прохождения трещины через новую линзу пропорциональна  $\rho$ . Нетрудно показать, что вероятность прохождения трещиной в ходе роста более чем через одну линзу бесконечно мала относительно  $\rho$ . Таким образом,  $\zeta(t)$  — пуассоновский процесс [15]. Поэтому формула для вероятности события  $\zeta(t) = 0$ , состоящего в том, что трещина в ходе роста не пересечет границу ни одной новой линзы, имеет вид

$$P(\zeta(t) = 0) = e^{-n \beta \mu \rho t}. \quad (17)$$

Полагая в (17)  $t = 1$ , получим

$$P_1(M, \rho, \alpha) = e^{-n \beta \mu \rho}. \quad (18)$$

Вероятность  $P_M(0)$  того, что скважина, расположенная в точке  $M$ , «сухая», определяется выражением (12). Это событие и событие, состоящее в том, что трещина в процессе роста не встретит ни одной новой линзы,

независимы. Из соотношений (12) и (18) следует формула для оценки вероятности создания трещины, которая не вскрывает ни одну линзу:

$$P_{f=0}(M, \rho, \alpha) = P_M(0)e^{-n\beta\mu\rho}. \quad (19)$$

Выражения (18), (19) справедливы для трещин небольшой длины, когда изменением функции  $\mu(x_{\pm}, y_{\pm}, \alpha)$  при  $0 \leq t \leq 1$  можно пренебречь. В противном случае в качестве  $\mu$  следует взять среднее значение

$$\mu = \int_0^1 \mu(x_{\pm}, y_{\pm}, \alpha) dt.$$

Согласно (19), вероятность того, что трещина не пересечет ни одной линзы, экспоненциально убывает с увеличением длины трещины и общего количества и размеров линз. Вероятность события, состоящего в том, что трещина вскроет не менее одной линзы, определяется выражением

$$P_{f>0}(M, \rho, \alpha) = 1 - P_M(0)e^{-n\beta\mu\rho}.$$

Формула для вероятности попадания трещины в ходе роста в новую линзу, имеет вид

$$P_{>0}(M, \rho, \alpha) = 1 - e^{-n\beta\mu\rho}. \quad (20)$$

Аналогично оценивается вероятность того, что профиль горизонтальной скважины при заданной длине проекции ствола на плоскость  $(x, y)$  может быть спроектирован таким образом, что скважина вскроет новую линзу. В этом случае  $\rho$  — длина проекции ствола скважины на плоскость  $(x, y)$ ,  $M(x_0, y_0)$  — проекция точки входа в пласт. Направление горизонтального ствола задается углом  $\alpha$ , который он составляет с осью  $x$ . Тогда проекция горизонтального ствола представляется отрезком в плоскости  $(x, y)$ :

$$x = x_0 + \rho t \cos \alpha, \quad y = y_0 + \rho t \sin \alpha, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Подобно (20) можно показать, что вероятность того, что горизонтальная скважина вскроет новую линзу, не превышает величины

$$P_{>0}(M, \rho, \alpha) = 1 - e^{-n\beta\mu\rho}, \quad \mu = \int_0^1 \mu(x, y, \alpha) dt,$$

$$\mu(x, y, \alpha) = f_{\xi-l}(x) [G_{\eta-s}(y) - G_{\eta+s}(y)] |\cos \alpha| + g_{\eta-s}(y) [F_{\xi-l}(x) - F_{\xi+l}(x)] |\sin \alpha|.$$

#### МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ ЛИНЗ

Вероятностное описание системы линз базируется на таких характеристиках, как форма и размеры пласта, форма линз, плотность распределения линз в пространстве и по размерам, общее количество линз в пределах рассматриваемой области. Некоторые из этих параметров могут быть неизвестны. Предлагается оценивать их значения по результату эксперимента, состоящего в реализации события  $\pi$ , определенного структурной матрицей  $\pi$  конкретного вида, построенной для  $m$  разведочных скважин, расположенных в точках  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ , ...,  $M_m(x_m, y_m)$ . Эта обратная задача может быть решена методом максимального правдоподобия [16].

Так, например, если неизвестно общее количество линз  $n$  в системе, а все остальные характеристики известны, то оценка количества линз на участке определяется в результате максимизации по  $n$  выражения (10) для вероятности  $P(\pi)$  события  $\pi$ :

$$n = \left[ \frac{n_1}{1 - P(0, 0, \dots, 0)} \right]. \quad (21)$$

Здесь  $n_1$  — количество фактически встреченных скважинами линз; вероятность  $P(0, 0, \dots, 0)$  определяется формулой (9); квадратные скобки обозначают целую часть числа.

#### ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассматривается участок одного месторождения Западной Сибири, характеризующегося сложным неоднородным линзовидным строением и очень низкими коллекторскими свойствами. В настоящее время южная часть месторождения изучена недостаточно: имеются лишь данные двумерных сейсмических

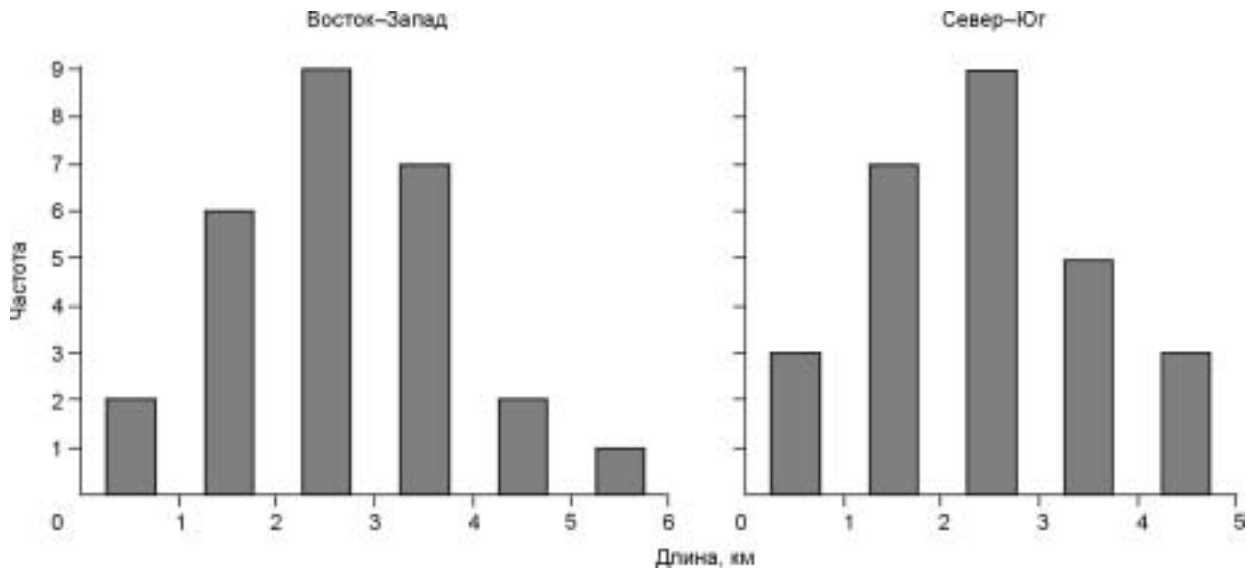


Рис. 3. Гистограммы распределений линз по размерам на эксплуатационном участке.

исследований, а расстояние между разведочными скважинами составляет не менее 2—3 км. Однако в центральной части месторождения расположен эксплуатационный участок, на котором расстояние между скважинами не превышает 500 м. Предлагается использовать результаты геостатистического анализа данных по скважинам эксплуатационного участка для оценки рисков при бурении скважин в южной части месторождения [17].

На основе детальной корреляции разрезов скважин эксплуатационного участка были выделены отдельные песчаные тела внутри пласта и определены их характерные размеры: длины в направлении с севера на юг и с запада на восток и средние толщины. Распределение длин линз в различных направлениях показано на рис. 3. В предположении нормального характера распределения были определены средние значения и стандартные отклонения:  $m_l = 1,3$  км,  $m_s = 1,2$  км,  $\sigma_l = 0,6$ ,  $\sigma_s = 0,65$ . Средняя толщина песчаных тел составила около 3 м.

Допущение о сходных условиях осадконакопления на эксплуатационном участке и в южной части пласта позволяет использовать найденные характеристики распределения для моделирования пласта на южном участке.

Для анализа был выбран участок в южной части пласта размером  $2 \times 10$  км, на котором находятся 4 разведочные скважины, вскрывшие 11 линз (рис. 4). Предполагается, что центры линз равномерно распределены по площади, и все характеристики системы линз, за исключением их общего количества  $n$ , известны. В качестве оценки этого параметра определяется такое его значение, при котором функция правдоподобия достигает максимума:  $n = 24$ .

При заданных характеристиках системы линз вероятность бурения „сухой“ скважины составляет 0,202. Вероятность того, что какое-либо песчаное тело пропущено четырьмя существующими разведочными скважинами, составляет 0,556. На рис. 5 показана вероятность пропуска линзы группой скважин, равномерно распределенных по площади, в зависимости от плотности сетки скважин. Для рассматриваемого примера вероятность события, состоящего в том, что трещина гидроразрыва при распространении встретит новую линзу, в зависимости от полудлины трещины и формы линз представлена на рис. 6. Вероятность этого события увеличивается с ростом длины трещины и при  $\rho = 150$  м составляет 0,14. Полученные оценки целесообразно учитывать при проектировании систем разработки.

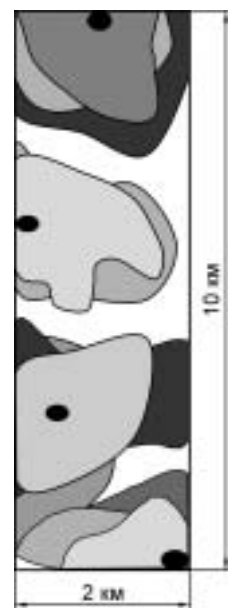
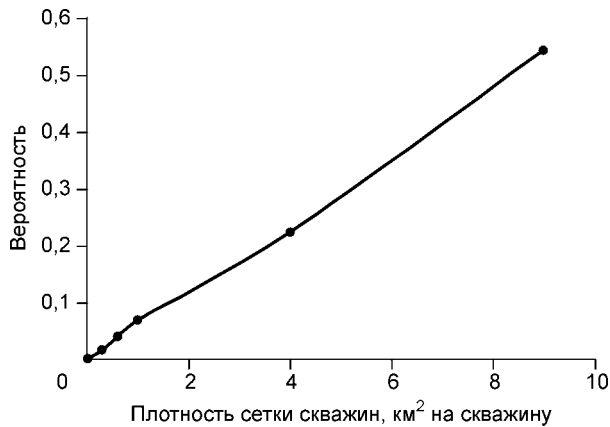
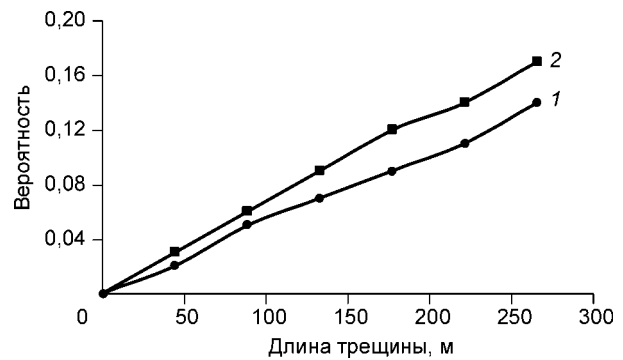


Рис. 4. Схема расположения разведочных скважин на оцениваемом участке.





**Рис. 5. Вероятность пропуска линзы рядом скважин в зависимости от плотности сетки скважин.**



**Рис. 6. Вероятность вскрытия новой линзы трещиной гидроразрыва при распространении.**

Линзы: 1 — эллиптические, 2 — прямоугольные.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе решены некоторые прямые и обратные задачи, описывающие взаимосвязи продуктивных линз и скважин, вскрывающих линзовидный пласт. В частности, определены вероятности таких событий, как бурение „сухой“ скважины или пропуск песчаного тела рядом разведочных скважин. Получена формула для оценки вероятности случая, когда трещина гидравлического разрыва или горизонтальная скважина заданной длины и направления вскроют новую линзу. Вероятность того, что трещина в ходе распространения не встретит новой линзы, экспоненциально убывает при увеличении длины трещины, а также количества и размеров линз.

Оценки максимального правдоподобия неизвестных характеристик системы линз могут использоваться при моделировании линзовидного пласта методом Монте-Карло с целью прогнозирования коэффициента извлечения нефти и темпов выработки запасов.

Полученные результаты могут быть положены в основу алгоритмов последовательной оптимизации расположения разведочных скважин и оптимального размещения сетки эксплуатационных скважин. При последовательной оптимизации расположения разведочных скважин в соответствии с методами планирования эксперимента координаты очередной скважины следует выбирать таким образом, чтобы информационное количество, связанное с оценками вероятностных характеристик системы линз, было максимальным. Выбор сетки эксплуатационных скважин целесообразно осуществлять с учетом минимизации риска пропустить линзу, определяемого выражением (9). Особую актуальность предложенный подход имеет на ранней стадии изученности пласта.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Матерон Ж. Случайные множества и интегральная геометрия. М., Мир, 1978, 320 с.
2. Кендал М., Моран П.А.П. Геометрические вероятности. М., Наука, 1972, 196 с.
3. Deutsch C., Journel G. GSLIB — Geostatistical software library. Oxford University Press, 1997, 188 p.
4. Dubrule O. A review of stochastic models for petroleum reservoirs // Geostatistics, 1989, v. 2.
5. Haldorsen H., Damsleth E. Stochastic modeling // Paper SPE 16751, 1987, p. 575—589.
6. Stoyan D., Kendall W.S., Mecke J. Stochastic geometry and its applications. Chichester, John Wiley & Sons, 1987, 440 p.
7. Скворцов В.В. Математический эксперимент в теории разработки нефтяных месторождений. М., Наука, 1970, 224 с.
8. Egeland T., Georgsen F., Skare O., Alabert F. Analytical calculations related to facies simulation // J. Mathem. Geol., 1995, v. 27, № 3.
9. Matheron G., Beucher H., Fouquet C. et al. Conditional simulation of the geometry of fluvio-deltaic reservoirs // Paper SPE 16753, 1987, p. 591—597.
10. Caers J., Journel G. Stochastic reservoir simulation using neural networks trained on outcrop data // Paper SPE 49026, 1998, p. 321—336.
11. Journel A., Alabert F. New method for reservoir mapping // JPT, 1990, v. 42, February, p. 212—218.

12. **Lorenz J.** Predictions of size and orientations of lenticular reservoirs in the Mesaverde Group, Northwestern Colorado // Paper SPE/DOE 13851, 1985, p. 23—31.
13. **Lin Ying Hu, Joseph P., Dubrule O.** Random genetic simulation of the internal geometry of deltaic sandstone bodies // Paper SPE 24714, 1992, p. 535—544.
14. **Kanevskaya R.D., Vereskov A.I., Korobkin S.V.** Stochastic approach to optimization of well spacing in lenticular reservoir (Proc. of 8th ECMOR, Freiberg, Germany, September 3—6, 2002). Freiberg, 2002.
15. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Т. 1. М., Мир, 1984, 528 с.
16. **Крамер.** Математические методы статистики. М., Мир, 1975, 648 с.
17. **Zakrevsky K., Zorkina V., Kanevskaya R. et al.** Complex reservoir simulation by using of geological analogy statistical analysis. Proc. of 64th EAGE Conference, Florence, Italy, May 27—30, 2002.

*Рекомендована к печати 29 мая 2003 г.  
А.Э. Конторовичем*

*Поступила в редакцию  
18 марта 2003 г.*