

торые прокачивается флюид, а между трубками, расположенными вблизи их. В этом случае величина $\rho_i = |r_j - r_i|$ будет больше и относительная погрешность в ее определении уменьшится.

Геометрия реальной модели отличается от сферической, которая предполагалась при решении обратной задачи. Однако высота цилиндрической модели примерно равна двум радиусам основания, а скорость течения вблизи угловых точек, как показывают расчеты, стремится к нулю. Поэтому отличие от случая сферической симметрии незначительное, что позволяет решать двумерные прямые задачи вместо трехмерных. Неточность в определении перепадов давления $\Delta p_{i,i+1}$ и расходов Q_i составляла 3%. Эти данные, а также погрешность, связанная со статистическим разбросом величины Γ/Γ_0 , использовались при вычислении доверительных интервалов $k(r)$.

Таким образом, проведенное исследование показало, что в результате проведения камуфлетного взрыва в пористой ($m = 25\%$) насыщенной среде коэффициент проницаемости уменьшается в интервале $1,5a < r < 10a$. Наиболее существенное уменьшение наблюдается после проведения взрыва в газонасыщенной среде — в точке минимума $k(r)$ уменьшается на порядок.

Во влагонасыщенной среде уменьшение проницаемости не столь значительно — менее чем в 2 раза. Кроме того, в случае влагонасыщенной среды $k(r)$ вблизи полости превышает k_f и распределение коэффициента проницаемости оказывается немонотонным.

Поступила 31 VIII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Родионов В. П., Сивак А. А. и др. Изменение проницаемости среды в зоне неупругих деформаций при подземном взрыве. — ФТПРПИ, 1981, № 1.
2. Бовт А. П., Мясников К. В. и др. Камуфлетный взрыв в пористой среде. — ПМТФ, 1981, № 6.
3. Бовт А. П., Мусинов В. И. и др. Изменение фильтрационных свойств насыщенного коллектора при камуфлетном взрыве. — ПМТФ, 1981, № 5.
4. Арсени В. Я. Математическая физика. М.: Наука, 1966.
5. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.
6. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
7. Колобанин В. М., Селяков В. И. Фильтрация флюида в слоистой среде. — Газовая промышленность, 1980, № 6.

УДК 624.131 + 532.215 + 534.22

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСОВ СЖАТИЯ В ЗЕРНИСТЫХ СРЕДАХ

В. Ф. Нестеренко

(Новосибирск)

Изучение механики зернистой среды представляет большой интерес как с научной точки зрения, так и для решения прикладных задач. Такие материалы, например, служат хорошими демпферами при ударных нагрузках. Их исследование важно для разработки процессов импульсного деформирования некоторых порошковых материалов.

Обзор работ по малым деформациям и распространению упругих волн в этих средах на основе дискретных моделей сделан в [1]. В [2] проанализирована структура стационарной ударной волны в зависимости от ее амплитуды.

1. Постановка задачи. В данной работе ставится задача исследовать нестационарные нелинейные возмущения в одномерных зернистых средах на основе известного взаимодействия между соседними гранулами.

В качестве закона взаимодействия был взят закон Герца [3]

$$(1.1) \quad F = \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^{1/2} \{ (R_1 + R_2) - (x_2 - x_1) \}^{3/2},$$

где F — сила сжатия гранул; E — модуль Юнга их материала; R_1, R_2 — радиусы; ν — коэффициент Пуассона; x_1, x_2 — координаты сферических гранул ($x_2 > x_1$).

Необходимо отметить, что зависимость вида $\delta^{3/2}$, где δ — сближение центров частиц, будет справедлива не только для шаров, но и при соприкосновении других конечных тел [3]. Интересно, что только из-за конечных размеров частиц из линейно-упругого материала, составляющих зернистую среду, ее поведение носит нелинейно-упругий характер.

Использование статического закона Герца для решения динамических задач подразумевает следующие ограничения: 1) максимальное напряжение, достигаемое в центре контакта, должно быть меньше предела упругости; 2) размеры поверхности контакта много меньше радиусов кривизны каждой частицы; 3) характерные времена задачи τ много больше периода колебаний основной формы для упругого шара T

$$\tau \gg T \approx 2,5R/c_1,$$

где c_1 — скорость звука в материале шара.

Условия 1—3 ограничивают массовые скорости среды величиной порядка нескольких метров в секунду для металлических частиц с радиусами в интервале 1—5 мм. На данной стадии исследования процессы диссипации в основном не учитываются.

Для численного исследования процессов распространения возмущений в одномерной цепочке сферических частиц с произвольными радиусами R_i уравнения движения второго порядка приводились к системе уравнений первого порядка:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i &= F_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{2N}), \quad i = 1, \dots, 2N, \\ F_i(\mathbf{x}) &= \varphi_i(\mathbf{x}) - \psi_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, N, \\ F_i(\mathbf{x}) &= x_{i-N}, \quad i = N+1, \dots, 2N. \\ \varphi_i(\mathbf{x}) &= \left(\frac{R_i R_{i-1}}{R_i + R_{i-1}} \right)^{1/2} \frac{E}{2\pi\rho_0(1-\nu^2)R_i^3} \delta_{i-1}^{3/2}, \quad \text{если } \delta_{i-1} > 0, \quad i = 2, \dots, N, \\ \varphi_i(\mathbf{x}) &= 0, \quad \text{если } \delta_{i-1} \leq 0, \quad i = 2, \dots, N, \\ \psi_i(\mathbf{x}) &= \left(\frac{R_i R_{i+1}}{R_i + R_{i+1}} \right)^{1/2} \frac{E}{2\pi\rho_0(1-\nu^2)R_i^3} \delta_i^{3/2}, \quad \text{если } \delta_i > 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ \psi_i(\mathbf{x}) &= 0, \quad \text{если } \delta_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ \delta_{i-1} &= R_i + R_{i-1} - (x_{N+i} - x_{N+i-1}), \quad i = 2, \dots, N, \\ x_{N+i}(t=0) &= x_{N+i-1} + R_i + R_{i-1}, \quad i = 2, \dots, N, \quad x_{N+1}(t=0) = 0. \end{aligned}$$

Из вида записи ясно, что величины x_i при $N \geq i \geq 1$ представляют собой значения скоростей i -й частицы, а при $2N \geq i > N$ — значения координат. Начальные условия для скоростей и на φ_1 и ψ_N для каждого отдельного случая оговорены ниже.

2. Анализ ангармонического и длинноволнового приближений. Рассмотрим одномерную цепочку одинаковых сферических гранул. Будем считать, что она нагружена постоянными сжимающими силами F_0 , приложенными к концам цепочки и обеспечивающими начальное сближение δ_0 . Как будет ясно из дальнейшего, δ_0 удобно ввести в уравнение явно. С этой целью введем вместо координат x_i смещение данной частицы из положения равновесия u_i . Уравнение движения частицы с использованием выражения для сил (1.1) имеет вид

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \ddot{u}_i &= A(\delta_0 - u_i + u_{i-1})^{3/2} - A(\delta_0 - u_{i+1} + u_i)^{3/2}, \\ A &= E(2R)^{1/2}/[3(1-\nu^2)m], \quad N-1 \geq i \geq 2, \end{aligned}$$

где m — масса частицы. Здесь предполагается, что расстояние между центрами частиц не превышает величины $2R$.

Приведенное уравнение будет описывать распространение одномерных возмущений в трехмерной простой кубической упаковке шаров, если плоскость фронта параллельна граням куба. Аналогичная форма уравнений движения будет и для других правильных упаковок. Отличия проявятся только в численном коэффициенте в A .

Уравнение (2.1) можно преобразовать к хорошо изученным уравнениям системы нелинейных осцилляторов в предположении малости деформаций в среде по отношению к начальному сближению δ_0 , т. е. полагая

$$|u_{i-1} - u_i|/\delta_0 \ll 1.$$

Тогда в ангармоническом приближении уравнение (2.1) имеет вид

$$(2.2) \quad \ddot{u}_i = \alpha(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \beta(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \times \\ \times (u_{i-1} - u_{i+1}), \\ \alpha = \frac{3}{2} A \delta_0^{1/2}, \quad \beta = \frac{3}{8} A \delta_0^{-1/2}, \quad N-1 \geq i \geq 2.$$

Уравнения типа (2.2) с квадратичной нелинейностью решались численно в ряде работ (см., например, [4, 5]), краткий обзор которых можно найти в [6]. Было показано, что в задаче о поршне, движущемся с постоянной скоростью v_0 , существует осциллирующая нестационарная структура «ударной волны», в голове которой формируется солитон с величиной скорости в максимуме, равной $2v_0$. Даже в отсутствие диссипации осцилляции за фронтом затухают. Аналогичное уравнение может быть получено для малых возмущений и при другом выборе потенциалов взаимодействия. В численных расчетах цепочки Тода и цепочки с взаимодействием частиц, определяемых потенциалом Морзе, наблюдались не затухающие с течением времени осцилляции вблизи поршня при достаточно большой величине его скорости [6, 7]. В [7] показано численно существование солитонов в цепочке с потенциалом Морзе.

Из уравнения (2.2) в длинноволновом приближении ($L \gg a = 2R$, L — характерный пространственный размер возмущения) обычной заменой

$$u_i = u(x), \quad u_{i-1} = e^{-aD} u(x), \quad u_{i+1} = e^{aD} u(x), \\ D = \partial/\partial x$$

может быть получено нелинейное волновое уравнение

$$(2.3) \quad u_{tt} = c_0^2 u_{xx} + 2c_0 \gamma u_{xxxx} - \epsilon u_x u_{xx}, \\ c_0^2 = A \delta_0^{1/2} 6R^2, \quad \gamma = c_0 R^2/6, \quad \epsilon = c_0^2 R/\delta_0.$$

При выводе уравнения (2.3) опущены все члены порядка $\frac{c_0^2 u}{L} \left[\left(\frac{a}{L} \right)^4 + \left(\frac{a}{L} \right)^2 \left(\frac{u}{\delta_0} \right)^2 \right]$ и выше. Решения данного уравнения удовлетворяют с точностью до членов, квадратичных по коэффициентам нелинейности и дисперсии, уравнению Кортевега-де Вриза (КдВ), свойства которого достаточно хорошо изучены [8]. Не останавливаясь на детальном обсуждении этих свойств, отметим, что в зернистой среде правильной структуры, предварительно сжатой внешней силой, возможно существование уединенных волн, периодических волн, ударных волн с осциллирующей структурой. Качественное поведение решений зависит от временных характеристик импульса нагружения [8].

Нас будет интересовать случай, когда $\delta_0 \rightarrow 0$. Тогда, как видно из уравнения (2.2), величина $\beta \rightarrow \infty$ и ангармоническое приближение становится неприменимым. При $\delta_0 = 0$ в длинноволновом приближении волны сжатия даже малой амплитуды не будут описываться стандартным волно-

вым уравнением, которое является прямым следствием ангармонического приближения. В случае $|u_{i-1} - u_i|/\delta_0 \geq 1$ из (2.1) можно получить только уравнение, соответствующее длинноволновому приближению ($L \gg a$) заменой, аналогичной предыдущей. Уравнение имеет вид

$$(2.4) \quad u_{tt} = c^2 \left\{ \frac{3}{2} (-u_x)^{1/2} u_{xx} + \frac{a^2}{8} (-u_x)^{1/2} u_{xxxx} - \frac{a^3 u_{xx} u_{xxx}}{8 (-u_x)^{1/2}} - \frac{a^5 (u_{xx})^3}{64 (-u_x)^{3/2}} \right\},$$

$$-u_x > 0, \quad c^2 = \frac{2E}{\pi \rho_0 (1 - v^2)}.$$

В данном уравнении смещение u включает в себя начальное смещение, обуславливающее сближение δ_0 . В уравнении (2.4) три последних члена по отношению к первому имеют порядок $(a/L)^2$. Отброшены все члены, имеющие более высокий порядок. При наличии постоянной сжимающей силы, обеспечивающей начальное сближение δ_0 , уравнение (2.4) сводится к нелинейному уравнению (2.3) в том же самом приближении. Это легко сделать, представив полную деформацию в виде

$$u_x = -\delta_0/2R + \Delta u_x$$

и проведя разложение по малой величине Δu_x членов в правой части уравнения. Можно найти стационарные решения уравнения (2.4) вида $u(x) = -Vt$. Введя новую переменную $\xi = -u_x$, получим

$$(2.5) \quad \frac{V^2}{c^2} \xi_x = \frac{3}{2} \xi^{1/2} \xi_x + \frac{a^2}{8} \frac{(\xi \xi_{xx})_x}{\xi^{1/2}} - \frac{a^5 \xi_x^3}{64 \xi^{3/2}}.$$

Уравнение (2.5) можно проинтегрировать, сделав замену переменных $\xi = z^{4/5}$:

$$\frac{V^2}{c^2} z^{4/5} = z^{6/5} + \frac{a^2}{10} z^{1/5} z_{xx} + C_1$$

(C_1 — постоянная интегрирования). Последнее уравнение удобно записать в безразмерном виде, делая замену переменных:

$$(2.6) \quad z = \left(\frac{V}{c} \right)^5 y, \quad x = \frac{a}{\sqrt{10}} \left(\frac{V}{c} \right)^{-5/2} \eta,$$

$$y^{4/5} = y^{6/5} + y^{1/5} y_{\eta\eta} + C_2$$

(C_2 — постоянная).

Если $C_2 = 0$, то уравнение (2.6) легко интегрируется. В системе движущейся со скоростью V , решение имеет вид

$$(2.7) \quad \xi = \left(\frac{5}{4} \frac{V^2}{c^2} \right)^2 \cos^4 \frac{\sqrt{10}}{5a} x.$$

При $x = \frac{5a}{\sqrt{10}} \left(\frac{\pi}{2} \pm \pi n \right)$, $n=0, 1, \dots$ ξ обращается в нуль. Это находится в противоречии с условием $\xi > 0$, при котором выведено уравнение (2.4). Поэтому необходимо исследовать поведение решения при $C_2 \neq 0$. С этой целью перепишем уравнение (2.6) в следующем виде, позволяющем использовать аналогию с движением частицы в потенциальном поле [8]:

$$y_{\eta\eta} = -\frac{\partial}{\partial y} W(y), \quad W(y) = -\frac{5}{8} y^{8/5} + \frac{1}{2} y^2 + C_3 y^{4/5}.$$

Из уравнения для $W(y)$ можно заметить, что при $0 < C_3 < 5/27$ функция $W(y)$ имеет вид кривой с двумя экстремумами, показанной на фиг. 1 для значений $C_3 = 4/27$ (кривая 1) и 0,1 (кривая 2). Экстремумы y_1 и y_2 , отмеченные на фиг. 1, соответствуют случаю $C_3 = 0,1$. При $C_3 \rightarrow 0$ величина максимума $W(y_1)$ стремится к нулю так же, как и значение его координаты y_1 . При $C_3 = 0$ получаем решение (2.7) в виде периодических

волн. Отличие C_3 от нуля качественно меняет характер решения. Из вида функции $W(y)$ при $0 < C_3 < 5/27$ можно заключить, что уравнение (2.4) допускает в этом случае существование стационарных решений типа периодических волн, а при определенных условиях — и уединенных волн. Действительно, вблизи максимума y_1 можно разложить $W(y)$ по степеням $(y - y_1)$:

$$W(y) \approx W(y_1) - d(y - y_1)^2.$$

Такой вид потенциальной энергии приводит в рамках механической аналогии к бесконечному «времени» падения частицы с полной энергией $W(y_1)$ в точку y_1 , что соответствует образованию уединенной волны [8]. Зависимость потенциальной энергии от координаты вблизи y_1 соответствует стационарному случаю для КдВ-уравнения в окрестности аналогичной точки. Поэтому поведение решения при $y \rightarrow y_1$ будет асимптотически совпадать с солитонным решением КдВ-уравнения.

Ограничение $C_3 < 5/27$ обеспечивает величину фазовой скорости уединенной волны сжатия, большую, чем начальная скорость звука. Действительно, фазовая скорость солитона V и скорость звука c_0 равны соответственно:

$$V = c \xi_0^{1/4} y_1^{-1/5}, \quad c_0 = c \xi_0^{1/4} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2},$$

где ξ_0 — начальная деформация. Из сравнения верхних выражений видно, что неравенство $V > c_0$ будет выполнено при $y_1 < (2/3)^{5/2}$. Данное условие выполняется при $C_3 < 5/27$, как можно заметить из вида $W(y)$. При значении $C_3 = 5/27$ величина $y_1 = (2/3)^{5/2}$. Константа C_3 определяет отношение максимальной амплитуды солитона к начальной деформации ξ_0 .

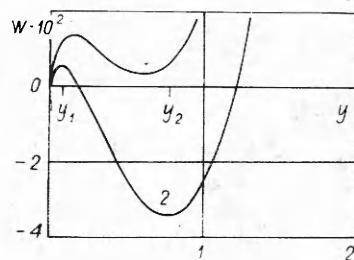
Найдем параметры солитона, соответствующие случаю малой величины $C_3 \ll 5/27$. Если значение полной энергии частицы при этом равно $W(y_1)$, то поведение решения при $y \gg y_1$ близко к поведению решения (2.7), соответствующего случаю $C_3 = 0$ и нулевой полной энергии. Следовательно, максимальное значение деформации в уединенной волне близко к значению амплитуды периодической волны (2.7):

$$\xi_m = \left(\frac{5}{4} \frac{V^2}{c^2} \right)^2.$$

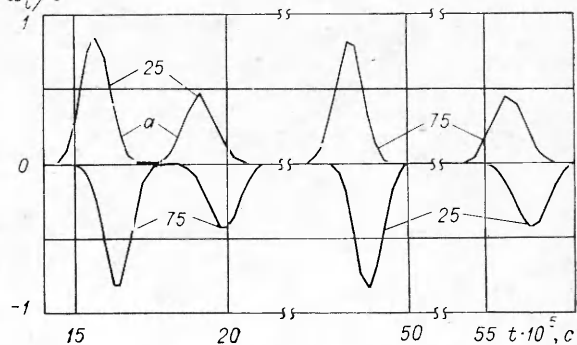
Характерный пространственный размер солитона в этом случае определяется периодом решения (2.7), который равен

$$L = \left(\frac{5a}{V^{10}} \right) \pi \approx 5a.$$

Найденные уединенные волны отличаются от солитонов КдВ-уравнения зависимостью фазовой скорости от амплитуды волны. Другим важным отличием является независимость характерного пространственного размера солитона уравнения (2.4) $L = 5a$ от амплитуды волны. Как уже отмечалось,



Ф и г. 1



Ф и г. 2

при малой деформации в волне по сравнению с ξ_0 решение уравнения (2.4) в виде уединенной волны будет близко к аналогичному решению КдВ-уравнения.

При наличии в среде диссипации для случая $C_3 = 0$ значение деформации за фронтом стационарной ударной волны, соответствующее минимуму $W(y_1)$, равно значению ξ_c , совпадающему с найденным из законов сохранения для цепочки с $\xi_0 = 0$:

$$\xi_c = V^4/c^4.$$

Из сравнения величин ξ_m и ξ_c видно, что при слабой диссипации отношение максимальной деформации на фронте стационарной ударной волны к ее установившейся величине за фронтом достигает значения

$$\xi_m/\xi_c = (5/4)^2 \approx 1,56.$$

Данная разница в деформациях приводит к тому, что отношение максимального давления на фронте стационарной ударной волны p_m к установившемуся давлению за ним p_c может достигать значения

$$p_m/p_c = (\xi_m/\xi_c)^{3/2} = (5/4)^3 \approx 1,95.$$

Дальнейшее исследование одномерной нелинейной цепочки осцилляторов, взаимодействующих при сжатии по закону Герца, проводилось численно.

3. Анализ результатов вычислений. Для численного решения системы нелинейных уравнений (1.2) использовался метод Хемминга и метод Рунге — Кутты четвертого порядка. Контроль решения проводился по закону сохранения импульса, энергии и сравнением результатов, полученных разными методами. Оба используемых метода давали практически одинаковые результаты. В процессе счета закон сохранения импульса выполнялся с точностью не хуже $10^{-5}\%$, закон сохранения полной энергии с точностью 10^{-3} — $10^{-2}\%$. Оценка относительной ошибки определения скоростей частиц дает величину $10^{-2}\%$. С целью проверки правильности счета проводилось также сравнение численного решения задачи об ударе одиночной частицей по цепочке из 100 одинаковых частиц, расположенных с начальными зазорами, с ее очевидным точным решением. Данное сравнение показало совпадение численного и точного решений в пределах указанной выше относительной ошибки.

Сделаем еще одно замечание. При $\delta_0 = 0$ и одинаковых R_i уравнение (2.1) заменой переменных

$$w_i = \dot{u}_i/v_0, \quad \tau = t(A^2 v_0)^{1/5}$$

преобразуется к безразмерному виду

$$(3.1) \quad \dot{w}_i = \left[\int_0^{\tau} (w_{i-1} - w_i) d\tau \right]^{3/2} - \left[\int_0^{\tau} (w_i - w_{i+1}) d\tau \right]^{3/2}.$$

Ясно, что для цепочки со свободными концами ($\varphi_1 = \psi_N = 0$) одинаковым значениям τ соответствуют одинаковые значения w_i в случае, если решается задача с начальными условиями

$$w_i(t=0) = 1, \quad i = 1, \dots, k, \quad w_l(t=0) = 0, \quad k < l \leq N.$$

Аналогичный вывод справедлив и для решения задачи о поршне, движущемся с постоянной скоростью. Поэтому одним из дополнительных способов контроля являлась проверка соблюдения равенства безразмерных скоростей частиц w_i в одинаковые моменты τ для задач с разными значениями начальных скоростей. Для удобства сравнения с экспериментом задача решалась в реальном времени. Выбор начального шага Δt по времени производился исходя из естественного физического условия

$$\Delta t \ll T_1 = 2,94 (5/8A)^{2/5} / v_0^{1/5},$$

где T_1 — время соударения двух шаров с относительной начальной скоростью v_0 [3].

В дальнейшем величина шага при необходимости изменялась с целью достижения компромисса между точностью вычислений и расходом машинного времени.

3.1. *Распад начального возмущения в цепочке гранул со свободными концами.* Здесь и далее (п. 3.2—3.4) все R_i одинаковы и равны $3 \cdot 10^{-3}$ м. Брались следующие значения величин A и ρ_0 , характерные для стальных частиц: $A = 5,6 \cdot 10^{12}$ Н/(м^{3/2}·кг), $\rho_0 = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³. Начальные условия для скоростей в первом случае следующие:

$$\begin{aligned} x_i(t=0) &= x_2(t=0) = v_0 = 5 \text{ м/с}, \\ x_i(t=0) &= 0, \quad N \geq i > 2, \quad N = 100. \end{aligned}$$

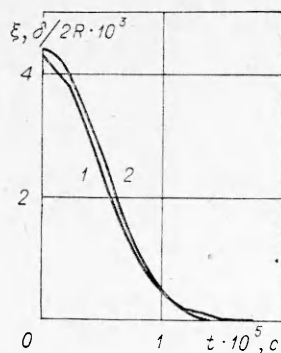
Полученные зависимости x_i/v_0 от времени приведены на фиг. 2 (кривые *a*). Видно, что при таких начальных данных формируется 2 солитона с практически покоящимся материалом между ними. Формирование из начального возмущения двух стационарных уединенных волн заканчивается уже на двадцатой частице. Далее они распространяются стационарно. Как следствие образования уединенных волн конечная скорость последней частицы x_N отличается от v_0 . Например, $x_{20}/v_0 = 1,2338$, $x_{50}/v_0 = 1,2342$, $x_{100}/v_0 = 1,2342$. Равенство скоростей $x_{50} = x_{100}$ служит дополнительным подтверждением стационарности солитона большей амплитуды.

Поскольку амплитуды солитонов отличаются, расстояние между ними непрерывно растет. Полностью аналогичная картина наблюдается и при других значениях начальных скоростей первых двух частиц с измененным масштабом времени. Необходимо отметить, что при свободных концах цепочки ($\phi_1 = \psi_N = 0$) происходит отскок первых частиц и «разрушение» системы. Например, в момент времени $t = 2 \cdot 10^{-4}$ с, когда второй солитон меньшей амплитуды находится вблизи 27-й частицы, частицы с 1 по 7 имеют отрицательную скорость, а с 1 по 8 отошли друг от друга на расстояние, большее $2R$. Значения скоростей первых семи частиц равны $-0,11$; $-0,048$; $-0,013$; $-0,0068$; $-0,0029$; $-0,0004$ м/с. Уносимый ими модуль импульса по отношению к начальному равен примерно 10%. Ясно, что «разрушение» системы с определенного момента времени не будет сказываться на форме солитонов, но сам факт разрушения делает невозможным точное нахождение амплитуд солитонов из начальных условий в каком-либо континуальном описании.

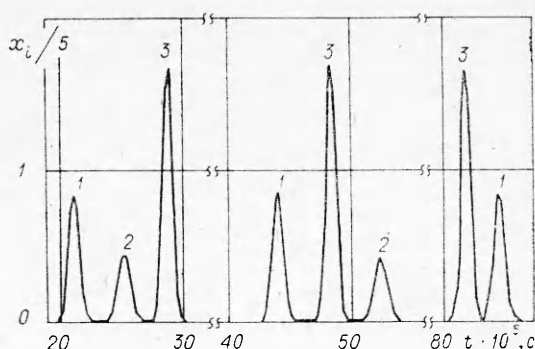
Из уравнения (3.1) и факта существования стационарных уединенных волн следует, что временная полуширина солитона λ и его фазовая скорость V должны зависеть от скорости частиц в максимуме уединенной волны v_m следующим образом:

$$\lambda \sim v_m^{-1/5}, \quad V \sim v_m^{1/5}.$$

Очевидным отличием солитонов в данной системе по сравнению с солитонными решениями уравнения Кортевега-де Вриза является нелинейная зависимость скорости распространения и квадрата обратной полуширины λ^{-2} от амплитуды скорости v_m . Интересно также, что пространственный размер солитона в данном случае не зависит от амплитуды скорости v_m и равен пяти диаметрам частиц. Напомним, что решения континуального уравнения (2.4) в виде уединенных волн существуют только при отличной от нуля начальной деформации ξ_0 . Ее конечная величина обеспечивает необходимую асимптотику поведения решения при $\xi \rightarrow \xi_0$, приводящую к формированию солитона. В численном счете уединенные волны существуют и при $\xi_0 = 0$. В специальных численных расчетах было выяснено, что наличие начальной деформации $\xi_0 \ll \xi_m$, обеспечиваемой приложением постоянных внешних сил к концам цепочки, не меняет качественной картины распада возмущения на уединенные волны по сравнению со случаем $\xi_0 = 0$. Было также найдено, что задание начальной деформации $\xi_0 \sim \xi_m$ качественно меняет характер решения.



Фиг. 3



Фиг. 4

Представляет интерес сравнить стационарные решения континуального уравнения (2.4) с найденными в численном счете уединенными волнами, являющимися стационарными решениями системы уравнений (1.2). Как уже отмечалось, решения уравнения (2.4) в виде уединенной волны при деформации, много большей начальной ξ_0 , хорошо описываются функцией (2.7). На фиг. 3 показана зависимость $\delta/2R$ от времени для частиц с номерами 60 и 61 (кривая 1), полученная с шагом по времени $0,25 \cdot 10^{-5}$ с, и функция (2.7) (кривая 2), в которой значение фазовой скорости полагалось равным ее значению в численном счете. За нулевой момент времени принимался момент достижения деформацией максимума. Из фиг. 3 видно, что континуальное приближение удовлетворительно согласуется с численным счетом при $t \leq 10^{-5}$ с. В то же время разница велика при $\xi \rightarrow 0$, что естественно, так как функция (2.7) не дает правильной асимптотики в этой области.

Был исследован также случай, когда начальная скорость сообщается 4 первым частицам. Возмущение в данном случае распалось на 4 уединенные волны. Если начальная скорость сообщалась одной первой частице, то в системе формировался один солитон.

3.2. *Взаимодействие солитонов.* Исследовалось 2 случая.

А. Столкновение солитонов, движущихся навстречу друг другу. Начальные условия на скорости:

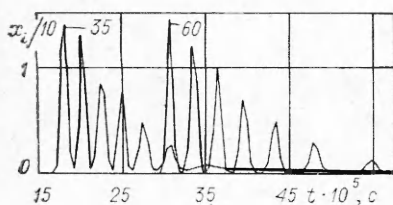
$$x_1(t=0) = x_2(t=0) = 5 \text{ м/с}, \quad x_{100}(t=0) = x_{99}(t=0) = -5 \text{ м/с}, \\ x_i(t=0) = 0, \quad i \neq 1, 2, 100, 99, \quad N = 100.$$

Концы цепочки предполагаются свободными. Результат столкновения показан на фиг. 2, где видно, что вначале происходит распад на 4 солитона, движущихся навстречу. Каждая из пар до столкновения перемещается аналогично случаю 3.1. После взаимодействия солитоны не меняют своей формы. Происходит только изменение фазы. Разница по временам прихода первого максимума скорости на 75-ю частицу между случаем А и соответствующим случаем 3.1 составляет около 10 мкс (см. фиг. 2). Аналогичное взаимодействие солитонов без изменения их формы наблюдалось нами при отражении от жесткой стенки последовательности 6 уединенных волн, вызванных ударом по цепочке частиц ($N = 80$) поршнем с массой 5 m .

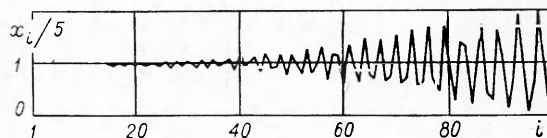
Б. Догон солитона меньшей амплитуды солитоном большей амплитуды. Начальные условия для скоростей

$$x_1(t=0) = x_2(t=0) = 10 \text{ м/с}, \quad x_{18}(t=0) = x_{19}(t=0) = 5 \text{ м/с}, \\ x_i(t=0) = 0, \quad i \neq 1, 2, 18, 19, \quad N = 150.$$

Концы цепочки свободны: $\phi_1 = \phi_N = 0$. При таком выборе начальных условий в системе, в частности, формировалась лидирующая группа из уединенных волн 1—3, показанных на фиг. 4. Интервалу времени $2 \cdot 10^{-4} < t < 3 \cdot 10^{-4}$ с соответствует график скорости 50-й частицы, интервалу $4 \cdot 10^{-4} < t < 5,5 \cdot 10^{-4}$ с — график скорости 85-й частицы, а интервалу $t > 8 \cdot 10^{-4}$ с — скорость 145-й частицы. В последнем случае солитон 2 не



Ф и г. 5



Ф и г. 6

показан, так как уже при $t > 5 \cdot 10^{-4}$ с он не принимает участия во взаимодействии между солитонами данной группы. Из фиг. 4 видно, что солитон 3 последовательно обогнал солитон 2 и 1. Амплитуда и форма уединенных волн при этом не изменилась. Интересно, что при таких начальных условиях в системе формировалось 6 уединенных волн, несмотря на то что начальное возмущение, состоящее только из 2-х движущихся частиц, распадается на 2 солитона (п. 3.1). Данный факт является следствием нелинейного характера взаимодействия частиц.

3.3. *Действие внешней силы треугольного профиля.* Начальные условия для скоростей:

$$x_i(t=0) = 0, N \geq i \geq 1, N = 100.$$

Сила, действующая на левый конец цепочки, задавалась следующим образом:

$$\varphi_1 = 2 \cdot 10^6 (1 - 10^4 t) \text{ м/с}^2, 0 \leq t \leq 10^{-4} \text{ с}; \varphi_1 = 0, t > 10^{-4} \text{ с}.$$

Правый конец цепочки предполагался свободным ($\psi_N = 0$).

Из фиг. 5, где показаны скорости 35-й и 60-й частиц, видно, что возмущение распалось на 7 солитонов. При уменьшении времени действия силы до 10^{-5} с число солитонов уменьшалось до одного. Длительности импульсов 10—100 мкс являются типичными для взрывных экспериментов. Поэтому дискретная структура зернистой среды может оказать существенное влияние на формирование импульсов сжатия в этом случае.

3.4. *Задача о поршне.* Начальные условия для скоростей:

$$x_1(t=0) = 5 \text{ м/с}, x_i(t=0) = 0, N \geq i > 1, N = 200.$$

Правый конец цепочки предполагался свободным ($\psi_N = 0$), а на левом конце ставилось условие $\varphi_1 = \varphi_2$, обеспечивающее постоянство скорости первой частицы.

Значения всех скоростей частиц для момента времени $t = 5,45 \cdot 10^{-4}$ с приведены на фиг. 6. Значения скоростей соседних частиц для удобства восприятия соединены прямыми линиями. Реальные значения скоростей соответствуют только целым числам. Амплитуда первого максимума v_m с течением времени приближается к удвоенному значению скорости поршня v_0 . Этот результат аналогичен получаемому для цепочки Тода [6], для частиц, взаимодействующих между собой согласно потенциалу Морзе [7], для нелинейного уравнения Кортевега-де Вриза [8]. Из фиг. 6 также видно, что с течением времени в голове волны формируется солитон с амплитудой скорости, равной $2v_0$. Движение среды не выходит на стационарный режим, несмотря на практически постоянную, начиная с $i = 20$, скорость переднего фронта, равную скорости солитона с амплитудой $2v_0$, и достижение стационарного состояния частицами вблизи поршня. Нестационарность движения состоит в непрерывном увеличении числа частиц, участвующих в осциллирующем движении. Необходимо отметить, что скорость переднего фронта становится близкой к скорости установившегося солитона с точностью 1% уже на первых десятках частиц. Поэтому, если фиксировать в эксперименте только скорость переднего фронта, то можно прийти к ошибочным выводам о стационарности процесса.

Интересно сравнить скорость установившегося переднего фронта нестационарной волны V со скоростью D_1 стационарной ударной волны, ко-

торая будет распространяться в данной постановке при наличии диссипации. Исходя из уравнения состояния среды и законов сохранения массы и импульса, найдем, что

$$D_1 = \left(\frac{2E}{(1-v^2)\pi\rho_0} \right)^{2/5} v_0^{1/5}.$$

Пользуясь численными результатами, получим, что фазовая скорость солитона V с максимумом скорости v_m равна

$$V \approx 0,915 \left(\frac{2E}{(1-v^2)\pi\rho_0} \right)^{2/5} v_m^{1/5}.$$

При $v_m = 2v_0$ отношение $V/D_1 \approx 1,05$.

Таким образом, разница между установившейся скоростью переднего фронта нестационарной волны и волны стационарной составляет $\sim 5\%$. Данная разница делает нереальной возможность оценить в эксперименте только по скорости переднего фронта, является ли режим стационарным.

Если в среде имеются диссипативные потери, то при малой их величине естественно ожидать (по аналогии с уравнением Кортевега-де Вриза), что форма переднего фронта волны близка к форме солитона. Его амплитуда v_{m1} должна обеспечивать скорость фронта, равную D_1 . Из этого требования с использованием выражения для скорости солитона найдем

$$v_{m1} \approx 1,56 v_0.$$

Таким образом, массовая скорость на стационарном фронте при малой диссипации может превышать скорость поршня в 1,56 раза. Интересно, что найденное отношение v_{m1}/v_0 совпадает с значением ξ_m/ξ_c , полученным из континуального рассмотрения (п. 2). В [6, 7] найдено, что при достаточно большом показателе нелинейности частицы вблизи поршня совершают незатухающие колебания. В отличие от этих двух случаев в нашем численном эксперименте было найдено, что профили скорости в координатах $w_i - i$ при значениях $v_0/V = 0,95$ и $5 \cdot 10^{-3}$ одинаковы в соответствующие моменты времени, что согласуется с уравнением (3.4). Из зависимости скорости ударной волны от v_0 следует, что ударная адиабата зернистой среды не зависит от размера частиц порошка, как и скорость фронта при нестационарном движении волны в отсутствие диссипации.

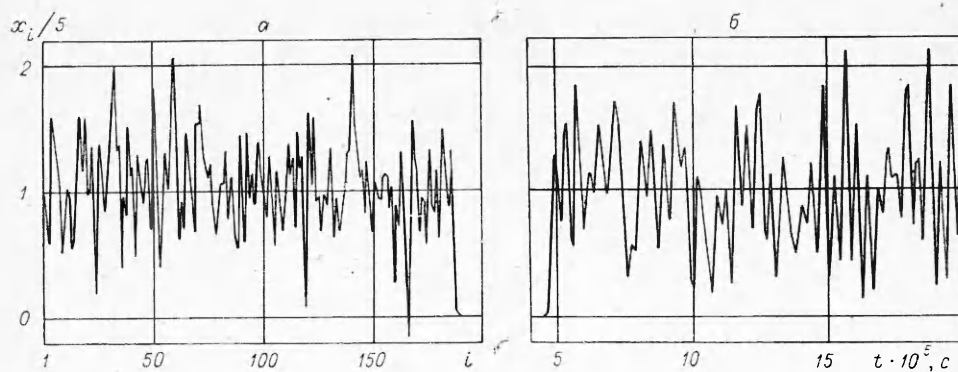
Обращает на себя внимание распределение энергии в системе между кинетической E_k и потенциальной E_p . Отношение $E_k/E_p = 1,249$ устанавливается через время $t \approx 3 \cdot 10^{-5}$ с, когда в движении участвуют всего 6 частиц. В дальнейшем E_k/E_p практически постоянно. Максимальные отклонения от этого значения не превышают 0,8%. Данное значение E_k/E_p близко к ожидаемому из теоремы вириала для частиц, взаимодействующих по закону Герца и совершающих колебательное финитное движение:

$$\langle E_k \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \mathbf{r}_i \mathbf{F}_i \right\rangle \Rightarrow \frac{\langle E_k \rangle}{\langle E_p \rangle} = 1,25.$$

Однако из теоремы вириала не следует, что отклонения от средних значений будут малыми, как наблюдается в численном счете. Малость отклонений от средних величин, видимо, объясняется большим количеством частиц в системе. Аналогичное распределение энергии между E_k и E_p наблюдалось также и в случаях 3.1, 3.2.

Отметим еще одну особенность, обнаруженную в численном счете. Поскольку амплитуда скорости головного солитона растет, приближаясь к $2v_0$, величина максимальной скорости последней частицы v_N будет превышать $2v_0$. Значения v_N/v_0 для $N = 20; 50; 100; 200$ равны соответственно 2,708; 2,836; 2,876; 2,895. Отношение v_N/v_0 , как уже отмечалось, не зависит от v_0 .

Результаты вычислений показывают, что в рассматриваемой задаче давление в максимуме первой осцилляции p_m существенно превышает ус-



Фиг. 7

тановившееся давление вблизи поршня p_c . Например, при скорости поршня $v_0 = 5$ м/с в момент времени, когда фронт волны находится на 50-й частице, $p_m/p_c = 2,24$. Напомним, что на основе континуального приближения для стационарной ударной волны отношение давлений может достигать значения $p_m/p_c = 1,95$. Таким образом, давление в ударной волне на нестационарном участке может превышать давление на фронте стационарной волны.

3.5. *Распространение возмущений в цепочке гранул различного радиуса.* Радиус частиц R_i задавался нами с использованием последовательности случайным образом полученных чисел на интервале (0,1), найденной с помощью стандартной программы RAND:

$$R_i = \{R_0 + \text{RAND}(1,0)\}10^{-3} \text{ м.}$$

А. Задача о поршне. Начальные и краевые условия аналогичны случаю 3.4. Профиль скорости для $R_0 = 0,5$ (момент времени $t = 3,8 \cdot 10^{-4}$ с), соответствующий скорости поршня $v_0 = 5$ м/с, приведен на фиг. 7, а. На фиг. 7, б показана скорость 25-й частицы в зависимости от времени для $R_0 = 0,5$ и при той же скорости поршня. Радиус этой частицы равен $7,82465 \cdot 10^{-4}$ м. Значения констант равны $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho_0 = 7,8 \times 10^3$ кг/м³, $\nu = 0,29$. Наиболее важные отличия системы с различными размерами частиц по отношению к случаю, где их размер одинаков (см. фиг. 6), следующие.

1. В системе с хаотическими размерами частиц (фиг. 7, а) не достигается однородного состояния по скоростям даже вблизи поршня в отличие от случая одинаковых их размеров (см. фиг. 6) при числе исследованных нами частиц $N = 200$. Данная особенность характерна также и для случаев $R_0 = 2$ и 3 при той же скорости поршня $v_0 = 5$ м/с.

2. Амплитуда скорости на фронте может быть ниже ее значения за фронтом (фиг. 7, а, б) и не стремится монотонно к значению удвоенной скорости поршня. Величина скорости частиц в первой лидирующей осцилляции изменяется по мере распространения в глубь материала не монотонно и может быть как меньше v_0 , так и существенно превышать это значение. При этом меньшей массе частицы не обязательно соответствует большая скорость в первом максимуме, и наоборот. За фронтом волны отдельные частицы могут достигать значений скоростей, больших $2v_0$ (см. фиг. 7, а, б). Скорости частиц, большие $2v_0$, были зафиксированы во всех трех исследованных случаях с $R_0 = 0,5; 2; 3$ при скорости поршня $v_0 = 5$ м/с. Величина превышения скоростей отдельных частиц над значением $2v_0$ росла по мере уменьшения R_0 , т. е. по мере увеличения разброса в значениях размеров и масс частиц. Максимальная величина скорости за фронтом 11,76 м/с была зафиксирована у 25-й частицы при $R_0 = 0,5$, $v_0 = 5$ м/с. Фронт волны находился в этот момент на 170-й частице. Особенностью задачи с хаотическими размерами частиц является также появление отрицательных скоростей. Например, в задаче с $R_0 = 0,5$, $v_0 =$

$= 5$ м/с у той же 25-й частицы была зафиксирована скорость — 2,142 м/с. Фронт волны находился в этот момент на 148-й частице.

При выходе возмущения на свободный конец цепочки конечная скорость последней частицы для $R_0 = 2$ оказывается меньшей, чем в случае одинаковых частиц. Например, $v_{100}/v_0 = 2,366$ в отличие от значения 2,876 для случая одинаковых частиц. В то же время для $R_0 = 0,5$ $v_{100}/v_0 = 2,969$, что больше, чем аналогичное отношение скоростей в случае одинаковых частиц.

Таким образом, хотя хаотически изменяющийся размер частиц обуславливает неупорядоченные колебания их скорости за фронтом, нелинейность взаимодействия и в этом случае может приводить к существенному превышению амплитуды скорости на фронте и за ним по сравнению со скоростью поршня.

3. Отношение кинетической энергии к потенциальной в системе с различными размерами частиц так же совершает колебания вблизи среднего значения, как и для системы с одинаковыми размерами частиц. Отличия между ними состоят в том, что максимальные отклонения от среднего значения в первом случае существенно выше, а сами средние величины E_k/E_n больше отклоняются от величины 1,25, вытекающей из теоремы вириала. Например, значения E_k/E_n , усредненные по промежутку времени, когда передний фронт волны проходит расстояние от 70-й до 90-й частицы для случаев $R_0 = 0,5; 2; 3$, соответственно равны 1,178; 1,236; 1,232. При этом максимальные относительные отклонения от этих средних величин соответственно равны 9, 7 и 6%.

Б. Распад начального возмущения в цепочке гранул со свободными концами. Начальные условия аналогичны случаю 3.1.

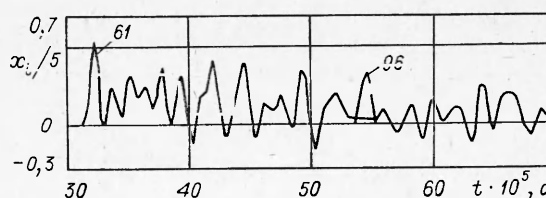
Зависимости скорости от времени для 61-й и первая осцилляция скорости для 96-й частиц приведены на фиг. 8 ($R_0 = 2$). По сравнению со случаем одинаковых частиц возмущение не распадается теперь на 2 солитона, а носит в значительной степени случайный характер. Вместе с тем характерно, что головное возмущение может быть близко по форме к солитону и затухает по амплитуде даже в отсутствие диссипативных потерь. Из фиг. 8 видно, что это затухание связано с рассеиванием энергии на большом числе частиц. Затухание амплитуды скорости удобно проследить по максимальной скорости v_N последней частицы. Так, при $R_0 = 0,5$ $v_{100}/v_0 = 0,692$; при $R_0 = 2$ $v_{100}/v_0 = 0,507$, а при $R_0 = 3$ $v_{50}/v_0 = 1,003$. Видно, что эти величины существенно меньше значения 1,2342, характерного для системы одинаковых частиц (см. п. 3.1). Интересно, что здесь, как и в задаче о поршне, рассмотренной в предыдущем пункте, значительное увеличение степени хаотизации частиц по размерам при переходе от $R_0 = 2$ к $R_0 = 0,5$ не приводит к усилению затухания амплитуды скорости. Наоборот, затухание в случае с $R_0 = 0,5$ меньше. В заключение перечислим основные результаты:

1. В правильных упаковках сферических гранул численными методами обнаружено существование стационарных уединенных волн нового типа.

2. Изучена реакция данной системы на различные возмущения. Исследовано взаимодействие солитонов, их основные свойства и особенности.

3. Найдено, что континуальное уравнение нелинейной цепочки осцилляторов, являющееся длинноволновым приближением, имеет стационарные решения, удовлетворительно согласующиеся с численным счетом.

4. Исследованы основные особенности распространения возмущений в системах с хаотически изменяющимся размером гранул.



Ф и г. 8

Автор благодарит Л. В. Овсянникова, А. А. Дерибаса, Р. М. Гарипова за обсуждение результатов, В. В. Дейнеко, Л. Н. Щеглову, Н. Г. Анникову за помощь в проведении численных расчетов.

Поступила 12 IV 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Дересевич Г. Механика зернистой среды. — В кн.: Проблемы механики. М.: ИЛ, 1961.
2. Черный Г. И. Распространение плоских волн сжатия в зернистой упругопластической среде. — В кн.: Взрыв в пористых и дисперсных средах. Киев: Наукова думка, 1969.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1965.
4. Fermi E., Pasta J. R., Ulam S. M. Collected Works of Enrico Fermi. Vol. 2. Chicago, 1965.
5. Tsai D. H., Beckett C. W. Shock wave propagation in cubic lattices. — J. Geophys. Res., 1966, vol. 71, N 10.
6. Hill T. G., Knopoff L. Propagation of shock waves in one-dimensional crystal lattices. — J. Geophys. Res., 1980, vol. 85, N B12.
7. Strenzik D. F. Shock profiles caused by different end conditions in one-dimensional quiescent lattices. — J. Appl. Phys., 1979, vol. 50, N 11.
8. Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975.

УДК 539.3

ДЕЙСТВИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА В УПРУГОЙ СРЕДЕ ПРИ НЕОДНОРОДНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Л. А. Назаров

(Новосибирск)

Задача о колебаниях упругого полупространства под действием внутреннего источника типа расширение — сжатие была решена в [1]. В [2] рассмотрено установившееся движение безграничной упругой среды при действии виброисточника с неоднородными граничными условиями, где исследовалась в основном зависимость амплитуды смещений от частоты граничной нагрузки. В данной работе указан способ получения полей смещений и напряжений в слоистых средах с плоскопараллельными границами раздела, если граничные условия заданы аналогично [2]. Для чего методом разделения переменных вычисляются потенциалы в сферической системе координат, которые потом записываются в цилиндрической системе. В качестве иллюстрации приводятся теоретические осциллограммы смещений на поверхности полупространства при действии «распорного» источника. Получена асимптотическая формула для смещений в окрестности фронтов волн при действии виброисточника.

1. В сферической системе координат (R, θ, χ) рассмотрим класс источников, симметричных относительно некоторой прямой. Совместим эту прямую с осью z цилиндрической системы координат (r, χ, z) (фиг. 1). Плоскость $z = 0$ разделяет пространство на части с различными физическими свойствами либо является свободной поверхностью полупространства.

Пусть на сфере радиуса R_0 с центром в точке $(0, 0, h)$ цилиндрической системы координат задано некоторое распределение смещений

$$(1.1) \quad u_R|_{R=R_0} = U_R(\theta)f(t), \quad u_\theta|_{R=R_0} = U_\theta(\theta)f(t)$$

или напряжений

$$(1.1)' \quad \sigma_R|_{R=R_0} = F_R(\theta)f(t), \quad \tau_{R\theta}|_{R=R_0} = F_\theta(\theta)f(t).$$

Необходимо найти поле смещений и напряжений в среде. Задача сводится к решению двух волновых уравнений

$$(1.2) \quad \Delta\varphi = a^2\varphi_{tt}, \quad \Delta\psi = b^2\psi_{tt}$$

для продольного φ и поперечного ψ потенциалов при нулевых начальных данных

$$(1.3) \quad \varphi = \varphi_t = 0, \quad \psi = \psi_t = 0, \quad t = 0$$