

УДК 532.529.5; 536.24

## Моделирование турбулентного неизотермического полидисперсного пузырькового течения за внезапным расширением трубы\*

М.А. Пахомов, В.И. Терехов

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

E-mails: pakhomov@ngs.ru; terekhov@itp.nsc.ru

Представлены результаты численного моделирования структуры полидисперсного неизотермического пузырькового турбулентного течения и теплообмена за внезапным расширением трубы. Исследование выполнено при изменении начального диаметра воздушных пузырьков в диапазоне  $d_{m1} = 1\text{--}5$  мм и их объемного расходного газосодержания  $\beta = 0\text{--}10$  %. Мелкие пузырьки присутствуют практически по всему сечению трубы, тогда как крупные проходят в основном только через ядро течения и сдвиговой слой смешения. Увеличение размера дисперсной фазы вызывает рост турбулентности в жидкой фазе за счет турбулизации течения при отрывном обтекании жидкостью крупных пузырьков. Добавление воздушных пузырьков вызывает значительное уменьшение длины отрывной зоны и возрастание теплообмена, причем эти эффекты возрастают с ростом размера пузырьков и их количества.

**Ключевые слова:** пузырьковое отрывное течение, турбулентность, интенсификация теплообмена, моделирование.

### Введение

Пузырьковые потоки широко распространены в химической технологии, в энергетике и других областях техники. Как правило, такие течения являются турбулентными со значительным межфазным взаимодействием между жидкостью и пузырьками. Они могут быть осложнены отрывом потока, полидисперсностью, дроблением и коалесценцией пузырьков и межфазным теплообменом. Наличие рециркуляционного течения оказывает значительное влияние на интенсивность процессов переноса импульса, теплоты и массы и определяет структуру турбулентного потока [1, 2]. Корректное моделирование распределения пузырьков по сечению канала имеет большое значение для безопасной эксплуатации и предсказания развития различных аварийных ситуаций в теплогенераторах.

Исследованию динамики одиночных пузырьков и их систем в ламинарных и турбулентных потоках жидкости при отсутствии межфазного теплообмена посвящено большое количество работ (например, см. [3–10]). В практических приложениях часто используются пузырьковые потоки при наличии теплопереноса [11–14]. Такие течения исследованы в меньшей степени по сравнению с потоками без теплообмена.

---

\* Модель турбулентности и численный код расчета двухфазных течений разработаны в рамках гранта РФФИ (проект 14-09-00402); численные результаты по моделированию отрывного пузырькового потока выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-08-00520).

Экспериментальные исследования изотермических пузырьковых течений при наличии внезапного расширения трубы были проведены в работах [15, 16]. В [15] измерения выполнялись в горизонтальном потоке смеси воздуха и масла в переходном к кольцевому и кольцевом режимах течения двухфазного потока. Было показано, что увеличение концентрации газа сразу после сечения отрыва потока происходит за счет сепарации воздуха из двухфазного течения в области рециркуляции. В работе [16] экспериментально исследовалось влияние размера пузырьков ( $d_{m1} = 0,3-4,5$  мм) и их объемного расходного газосодержания ( $\beta = 0-10$  %) на структуру турбулентного течения. Измерения проводились в вертикальном газожидкостном потоке, состоящим из пузырьков  $\text{CO}_2$  и воды. Мелкие пузырьки вовлекались в отрывное течение и имели отрицательную величину скорости в зоне отрыва потока. Они присутствовали практически по всему сечению трубы, тогда как крупные проходили в основном только через ядро течения и сдвиговый слой смешения. Было показано, что распределение аксиальной осредненной скорости жидкости сильно зависит от величины размера газовых включений.

Исследований пузырьковых отрывных потоков при наличии межфазного теплообмена авторами в литературе не найдено. Целью настоящей работы является проведение численного исследования влияния размера и концентрации газовой фазы на турбулентную структуру течения жидкости и теплоперенос в двухфазном пузырьковом потоке за внезапным расширением трубы.

### Математическая модель

Численные результаты в настоящей работе получены с использованием эйлерова подхода, разработанного для пузырьковых потоков [5, 12, 14]. Модифицировав эйлеров подход [5], авторы использовали его для описания пузырьковых моно- [12] и полидисперсных [14] турбулентных потоков в вертикальных трубах при наличии межфазного теплообмена. В работе применяются осесимметричные RANS (Reynolds Averaged Navier–Stokes) уравнения с учетом обратного влияния пузырьков на осредненные и пульсационные характеристики течения [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial[(1-\Phi)\rho U_i]}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial[(1-\Phi)\rho U_i U_j]}{\partial x_i} &= -\frac{\partial(1-\Phi)P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(1-\Phi) \left( \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \langle u'_i u'_j \rangle \right) + \rho \mathbf{g} + \sum_{k=1}^N M_k^l, \\ \frac{\partial[(1-\Phi)\rho C_p T]}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}(1-\Phi) \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} - \rho C_p \langle u'_j t \rangle \right) - \\ &- \sum_{k=1}^N \left( \frac{6\Phi_k (T - T_{b,k})}{d_k} + C_{pb,k} \rho_{b,k} g_{ut,k} \langle u'_j t \rangle - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} \right), \\ \rho &= (1-\Phi)P / (\bar{R}T). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $C_p$ ,  $\lambda$  — плотность, динамическая вязкость, теплоемкость и коэффициент теплопроводности жидкости,  $\Phi = \sum_{k=1}^N \Phi_k$  — объемная концентрация газовой фазы,  $\Phi_k$  — объемная доля  $k$ -ой фракции,  $N$  — число фракций (в настоящей работе  $N = 3$ ),  $U_i$  и  $U_j$  — компоненты осредненной скорости жидкой фазы,  $P$ ,  $T$  — давление и температура в жидкой фазе,  $M_k^l = -M_k^g$  — межфазное взаимодействие,  $d$  — диаметр пузырьков  $k$ -ой фракции,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\bar{R}$  — газовая постоянная,  $x_i$ ,  $x_j$  — компоненты координат,  $g_{ut,k}$  — коэффициент вовлечения дисперсной фазы в тепловое флуктуационное

движение газовой фазы, имеющий вид, описанный в работе [12]. Индекс  $b$  соответствует пузырьку, и индекс  $k$  указывает на принадлежность к  $k$ -ой фракции дисперсной фазы.

Турбулентность жидкой фазы описывается с использованием модели переноса компонент Рейнольдсовых напряжений [17] с учетом дополнительных функций генерации турбулентности жидкости при обтекании пузырьков [3]:

$$\frac{\partial(U_j \langle u'_i u'_j \rangle)}{\partial x_j} = P_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \nu \delta_{lm} + \frac{C_\mu T_T}{\sigma_k} \langle u'_l u'_m \rangle \right) \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_m} + S_1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial U_j \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{1}{T_T} (C_{\varepsilon 1} P_2 - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \nu \delta_{lm} + \frac{C_\mu T_T}{\sigma_\varepsilon} \langle u'_l u'_m \rangle \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} + \frac{\varepsilon}{k} C_{\varepsilon 3} S_1. \quad (3)$$

$$\chi - L_T^2 \nabla^2 \chi = 1. \quad (4)$$

Здесь  $P_{ij}$  — интенсивность переноса энергии от осредненного движения к пульсационному;  $P_2 = 0,5 P_{kk}$ ;  $T_T$  — турбулентный временной макромасштаб,  $\phi_{ij}$  — перераспределяющее слагаемое, описывающее обмен энергией между компонентами  $\langle u_i u_j \rangle$  вследствие корреляции давление–скорость деформации,  $\chi$  — коэффициент, изменяющийся от нуля на стенке до единицы вдали от нее и определяемый из эллиптического уравнения (4). Константы и функции системы уравнений (2)–(4) взяты из работы [17]. Слагаемое  $S_1$  определяет дополнительную генерацию турбулентности жидкости за счет отрывного обтекания пузырьков [3]:  $S_1 = 3C_i C_D \Phi_k |U_R|^3 / (4d_k)$ , где осредненная скорость скольжения фаз  $U_R = U - U_b$ . Значение констант  $C_i = 0,1$ ,  $C_{\varepsilon 3} = 1,44$  соответствуют их значениям из работы [3].

Система уравнений неразрывности, осредненных компонент скорости пузырьков и энергии  $k$ -ой фракции записаны с учетом дробления и коалесценции пузырьков в осесимметричной постановке и имеет следующий вид:

$$\frac{\partial(\Phi \rho_b U_{bi})}{\partial x_i} = S_{B,C},$$

$$\frac{\partial(\Phi \rho_b U_{bi} U_{bj})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial(\rho_b D_b \Phi)}{\partial x_j} - \frac{\partial(\Phi P)}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^N M_k^g, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\Phi \rho_b C_{Pb} T_b)}{\partial x_j} = -h_c \Phi (T - T_b) \frac{\rho_b}{\tau_\Theta} - \frac{1}{\tau_\Theta} \frac{\partial(D_b^\Theta \Phi)}{\partial x_j}. \quad (6)$$

Первое слагаемое уравнения (5) описывает конвективный перенос дисперсной фазы, второе — характеризует перенос дисперсной фазы за счет турбулентной диффузии в жидкости, третье — перенос пузырьков за счет градиента давления в жидкости, и последнее описывает межфазное взаимодействие. Здесь  $S_{B,C} = B_{k,B} - D_{k,B} + B_{k,C} + D_{k,C}$  — стоковое и источниковое слагаемое, учитывающие дробление и коалесценцию пузырьков в двухфазном потоке пузырьков  $k$ -ой группы,  $B_{k,B}$  и  $B_{k,C}$  — скорости «рождения» пузырьков  $k$ -ой группы за счет дробления более крупных и слияния более мелких частиц соответственно,  $D_{k,B}$  и  $D_{k,C}$  — скорости «смерти» пузырьков  $k$ -ой группы за счет их дробления

на более мелкие и слияния более мелких соответственно,  $\tau_k = 4\rho_b d_k^2 / (3\mu \text{Re}_{b,k} C_{D,k})$  — время динамической релаксации пузырьков  $k$ -ой фракции,  $D_{bij}$  и  $D_b^\ominus$  — тензор турбулентной диффузии и турбулентный перенос теплоты в дисперсной фазе, приведенные в работе [12], и  $\text{Re}_{b,k} = \rho |U_R| d_k / \mu$  — число Рейнольдса пузырька, построенное по скорости скольжения фаз.

Для полидисперсного потока слагаемое при расчете межфазного взаимодействия в эйлеровом приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N M_k^l = - \sum_{k=1}^N M_k^g = & \underbrace{\frac{3\rho C_{Dk}}{4d_k} \Phi_k U_R |U_R|}_{\text{I}} + \underbrace{\rho_b \Phi_k \mathbf{g}}_{\text{II}} + \\ & + \underbrace{C_m \rho \Phi_k \left( U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - U_{bj,k} \frac{\partial U_{bi,k}}{\partial x_j} \right)}_{\text{III}} - \underbrace{C_{Lk} \Phi_k \rho |U_R| \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{IV}} - \\ & - \underbrace{C_T \rho k |U_R| \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}}_{\text{V}} - \underbrace{C_W \frac{d_k \Phi_k |U_R|^2}{2} \left( \frac{1}{y^2} - \frac{1}{(2R-y)^2} \right)}_{\text{VI}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь принимаются во внимание следующие силы, действующие на пузырек: сила аэродинамического сопротивления (I), эффект присоединенной массы (II), сила Архимеда (III) и Сэффмена (IV), турбулентная гомогенная диффузия (V) и пристеночная сила (VI).

Для учета эффекта дробления и коалесценции пузырьков используется уравнение изменения среднего объема пузырьков [4]:

$$\underbrace{\frac{\partial (U_{bj} \bar{v}_k)}{\partial x_j}}_{\text{I}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho_b} \frac{\partial (\rho_{b,k} U_{bj})}{\partial x_j}}_{\text{II}} \bar{v}_k - \underbrace{0,5 (r_{1,k} \bar{v}_k^2 - r_{2,k} \alpha_k)}_{\text{III}}. \quad (8)$$

Здесь  $r_{1,k}$  — функция, описывающая дробление пузырьков  $k$ -ой фракции ( $1/(\text{м}^3\text{с})$ ), и  $r_{2,k}$  — функция, описывающая коалесценцию пузырьков  $k$ -ой фракции ( $\text{м}^3/\text{с}$ ). Эти функции имеют следующий вид [7]:

$$\begin{aligned} r_{1,k} = -f_B \eta_B = & - \frac{\varepsilon^{1/3}}{d_k^{11/3}} \left[ \frac{1,6\alpha_k (1-\alpha_k)}{1+0,42(1-\alpha_k)\sqrt{\text{We}/\text{We}_{\text{cr}}}} \right] \times \exp \left[ - \frac{1,59}{(1-c_3)} \frac{\sigma}{\rho \varepsilon^{2/3} d_k^{5/3}} \right], \\ r_{2,k} = -f_C \eta_C = & - \frac{\varepsilon^{1/3}}{d_k^{11/3}} \left[ \frac{2,86\alpha_k \alpha_{\text{max}}^{1/3}}{(\alpha_{\text{max}}^{1/3} - \alpha_k^{1/3}) + 1,922\alpha_{\text{max}}^{1/3} \alpha_k \sqrt{\text{We}/\text{We}_{\text{cr}}}} \right] \times \\ & \times \exp \left( - \frac{0,913}{c^{2/3}} \sqrt{\frac{\rho \varepsilon^{2/3} d_k^{5/3}}{\sigma}} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $f_B, f_C$  — частота дробления и столкновения пузырьков соответственно,  $\eta_B, \eta_C$  — эффективность дробления и столкновения пузырьков [7],  $\alpha_{\text{max}} = 0,52$ ,  $\text{We}_{\text{cr}} = 1,24$  — критическое значение числа Вебера,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $c = 11^{1/3} \sqrt{2,24(1-c_3)(c_1^{2/3} - c_2^{2/3}) / (c_2^{-3} - c_1^{-3})}$ , где  $c_1, c_2$  и  $c_3$  — константы, приведенные в работе [7].

Уравнение (8) записано с учетом конвективного переноса (I), расширения пузырька газа за счет изменения его плотности (II), например, за счет межфазного теплообмена и (или) изменения градиента давления, дробления пузырьков и их коалесценции (III). Для расчета эффектов коалесценции и дробления пузырьков применяется модель [7].

В основу процесса коалесценции положен механизм столкновений частиц вследствие их вовлечения в турбулентное движение сплошной среды. В модели рассматривается случай, когда сталкиваются только два пузырька, что происходит в реальности чаще всего. Коалесценция состоит из трех процессов: столкновение пузырьков, образование тонкой пленки между двумя столкнувшимися частицами и ее разрыв после достижения критической толщины и образования одного пузырька.

Дробление пузырьков происходит при их взаимодействии с турбулентными вихрями несущей фазы. Скорость дробления определяется силами межфазного взаимодействия, приводящего к деформации и дроблению пузырька. В модели полагается, что в результате дробления образуются два пузырька одинакового размера. Также предполагается, что энергии мелких вихрей не достаточно для дробления пузырьков. Самые крупные вихри не дробят пузырьки, а только переносят их в пространстве. Вихри, имеющие размер, сопоставимый с диаметром пузырька или несколько меньше, дробят его. Зная объем пузырька в любом контрольном объеме расчетной области, можно рассчитать распределение его размеров по длине трубы и по ее сечению в предположении, что не теряется сферичность формы пузырька.

С целью упрощения математической модели непрерывная функция распределения дисперсной фазы по размерам заменяется гистограммой и вводится понятие классов пузырьков [6]. На входе задается равномерное распределение монодисперсных пузырьков по сечению трубы. В работе расчеты выполнялись для трех групп пузырьков:  $d_1 = (0-2)$ ,  $d_2 = (2-5)$ ,  $d_3 > 5$  мм. Было сделано допущение, что скорость пузырьков первых двух фракций одинакова и отличается от третьей, что согласуется с так называемым h-MUSIG (inhomogeneous MUlti SIze Group) подходом [6].

### Результаты численных расчетов и их анализ

Расчеты проводились на сетке, содержащей  $256 \times 100$  контрольных объемов, при восходящем направлении течения. Результаты численных расчетов были получены для полидисперсной смеси воды и пузырьков воздуха при атмосферном давлении. Число Рейнольдса потока  $Re = U_{m1} 2R_1 / \nu = 1,12 \cdot 10^4$ , его среднемассовая скорость перед сечением отрыва  $U_{m1} = 0,75$  м/с. Внутренний диаметр вертикальной трубы  $2R_1 = 15$  мм, высота ступеньки  $H = 12,5$  мм, диаметр канала после отрыва  $2R_2 = 40$  мм, степень расширения  $ER = (R_2/R_1)^2 = 7,1$ , температура стенки  $T_w = \text{const} = 313$  К, начальные температуры жидкости и пузырьков газа  $T_1 = T_{b1} = 293$  К. Начальное распределение газовой фазы задавалось в виде равномерного профиля параметров по сечению трубы. Объемное расходное газосодержание варьировалось в диапазоне  $\beta = 0-10$  %. Расчеты были проведены при условии отсутствия на ограничивающих стенках фазовых переходов.

Распределения аксиальных пульсаций скорости жидкости  $u' = \langle u'^2 \rangle / U_{m1}^2$  в пузырьковом потоке в нескольких сечениях за внезапным расширением при вариации размера газовых включений приведены на рис. 1. Показано, что при увеличении размера дисперсной фазы наблюдается рост турбулентности (до 60 % при  $\beta = 5$  % в сравнении с однофазным потоком) за счет отрывного обтекания жидкостью крупных пузырьков в приосевой зоне и в слое смешения. Известно [8], что в полидисперсных восходящих изотермических пузырьковых течениях в трубах происходит перераспределение дисперсной фазы по поперечному сечению: крупные пузырьки располагаются в основном ядре течения, а мелкие аккумулируются в пристенной зоне. В целом, близкая картина

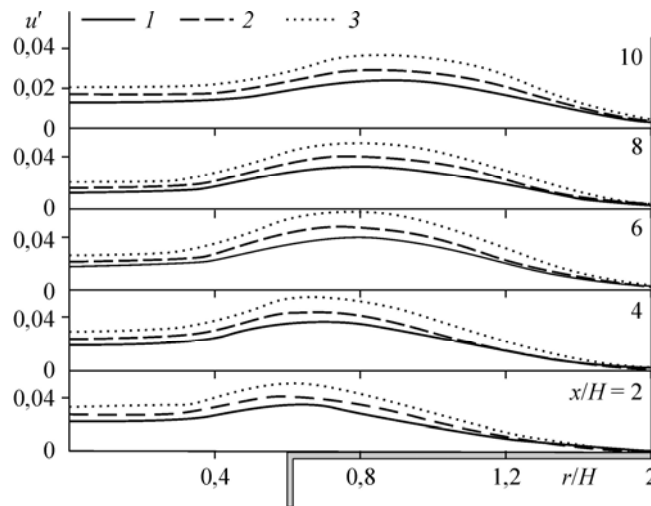


Рис. 1. Профили аксиальных среднеквадратических пульсаций скорости жидкости в двухфазном отрывном потоке при вариации размера воздушных пузырьков.  $\beta = 5\%$ ; однофазный поток жидкости (1),  $d_{m1} = 1,6$  (2), 3 (3) мм.

наблюдается и в неизотермических отрывных газожидкостных потоках. Максимум интенсивности аксиальных пульсаций расположен в сдвиговом слое смешения, аналогичная картина характерна и для однофазных отрывных течений [1]. В целом профили пульсаций при малой величине  $\beta$  качественно соответствуют профилям пульсаций для случая однофазного течения за внезапным расширением трубы [2].

Влияние размера воздушных пузырьков на изменение максимального числа Нуссельта в газожидкостном потоке показано на рис. 2. Концентрация воздушных пузырьков фазы и их начальный размер оказывают значительное влияние на теплоперенос от стенки к двухфазному потоку. С увеличением размера пузырьков наблюдается заметное возрастание величины  $Nu_{max}$  (до 80 %) за счет увеличения градиентов скорости и турбулентности жидкой фазы в пристенной области.

Для сопоставительного анализа были использованы экспериментальные данные [16] для пузырькового отрывного вертикального потока. Расчеты проводились при  $Re = U_{m2} 2R_2 / \nu = 10^4$ ,  $H = 20$  мм,  $2R_1 = 30$  мм,  $2R_2 = 70$  мм,  $ER = 5,4$ . Профили осредненной аксиальной скорости пузырьков  $CO_2$  по сечению трубы в зависимости от размера газовой фазы представлены на рис. 3 для двух сечений вниз от положения отрыва двухфазного потока:  $x/(2R_2) = 0,58$  и 2. Для проведения сопоставлений с данными измерений [16] расчеты выполнялись для изотермического случая без нагрева стенки трубы. Также не принималась во внимание возможность растворения газовых пузырьков  $CO_2$  в воде. Увеличение размера газовых пузырьков вызывает увеличение скорости газа, особенно

в пристенной части трубы. Одной из причин этого является действие подъемной силы. В то же время маленькие пузырьки вовлекаются в отрывное течение и имеют отрицательную величину скорости. Они присутствуют практически по всему сечению канала, тогда как

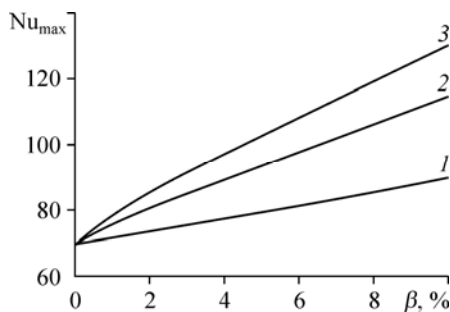


Рис. 2. Влияние размера пузырьков на изменение максимального значения числа Нуссельта в полидисперсном двухфазном газожидкостном потоке.  $d_{m1} = 1$  (1), 1,6 (2), 3 (3) мм.

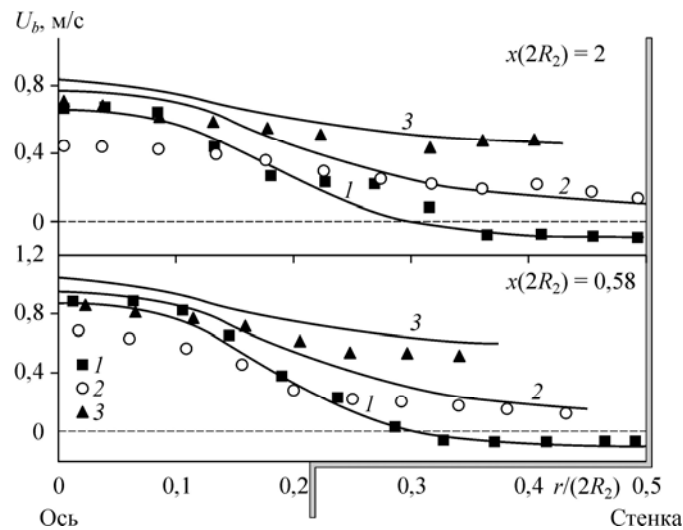


Рис. 3. Влияние размера пузырьков  $\text{CO}_2$  на профили их осредненной аксиальной скорости в жидкости за внезапным расширением трубы.

Символы — измерения [16], линии — расчеты;  $\beta = 5\%$ ;  $d_{m1} = 0,3$  (1), 2,52 (2), 4,25 (3) мм.

крупные частицы проходят в основном только через ядро течения и сдвиговый слой смешения. Это характерно как для экспериментов [16], так и для проведенных расчетов. При продвижении вверх по потоку скорость пузырьков уменьшается за счет расширения потока и действия силы трения.

### Список литературы

1. Simpson R.L. Aspects of turbulent boundary-layer separation // Progress Aerospace Sci. 1996. Vol. 32. P. 457–521.
2. Поляков А.Ф., Комаров П.Л. Исследование характеристик турбулентности и теплообмена за обратным уступом в щелевом канале. Москва: ОИВТ РАН, 1996. Препринт. № 2–396. 70 с.
3. Lopez de Bertodano M., Lee S.J., Lahey R.T., Jr., Drew D.A. The prediction of two-phase turbulence and phase distribution using a Reynolds stress model // ASME J. Fluids Eng. 1990. Vol. 112. P. 107–113.
4. Lehr F., Mewes D. A transport equation for the interfacial area density applied to bubble columns // Chem. Eng. Sci. 2001. Vol. 56. P. 1159–1166.
5. Зайчик Л.И., Скибин А.П., Соловьев С.Л. Моделирование распределения пузырьков в турбулентной жидкости на основе диффузионно-инерционной модели // Теплофизика высоких температур. 2004. Т. 42, № 1. С. 111–117.
6. Krepper E., Lucas D., Frank T., Prasser H.-M., Zwart P.J. The inhomogeneous MUSIG model for the simulation of polydispersed flows // Nucl. Eng. Des. 2008. Vol. 238. P. 1690–1702.
7. Nguyen V.T., Song C.-H., Bae V.U., Euh D.J. Modeling of bubble coalescence and break-up considering turbulent suppression phenomena in bubbly two-phase flow // Int. J. Multiphase Flow. 2013. Vol. 54. P. 31–42.
8. Mukin R.V. Modeling of bubble coalescence and break-up in turbulent bubbly flow // Int. J. Multiphase Flow. 2014. Vol. 62. P. 52–66.
9. Архипов В.А., Васенин И.М., Ткаченко А.С., Усанина А.С. О нестационарном всплытии пузырька в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 1. С. 86–94.
10. Губайдуллин А.А., Губкин А.С. Особенности динамического поведения пузырьков в кластере, вызванные их гидродинамическим взаимодействием // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, № 4. С. 471–480.
11. Yeoh G.H., Tu J.Y. Thermal-hydrodynamic modelling for bubbly flows with heat and mass transfer // AIChE J. 2005. Vol. 51. P. 8–29.
12. Пахомов М.А., Терехов В.И. Численное моделирование течения и теплопереноса в опускном турбулентном газожидкостном потоке в трубе // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49, № 5. С. 737–744.
13. Кашинский О.Н., Рандин В.В., Чинак А.В. Влияние ориентации канала на теплообмен и трение в пузырьковом течении // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20, № 4. С. 401–408.
14. Пахомов М.А., Терехов В.И. Моделирование турбулентной структуры течения и теплопереноса в восходящем полидисперсном пузырьковом потоке // Журнал технической физики. 2015. Т. 85, вып. 9. С. 8–16.

15. **Ahmed W.H., Ching C.Y., Shoukri M.** Development of two-phase flow downstream of a horizontal sudden expansion // *Int. J. Heat Fluid Flow*. 2008. Vol. 29. P. 194–206.
16. **Voutsinas A., Shakouchi T., Tsujimoto K., Ando T.** Investigation of bubble size effect on vertical upward bubbly two-phase pipe flow consisted with an abrupt expansion // *J. Fluid Sci. Techn.* 2009. Vol. 4. P. 442–452.
17. **Fadai-Ghotbi A., Manceau R., Boree J.** Revisiting URANS computations of the backward-facing step flow using second moment closures. Influence of the numerics // *Flow, Turb. Combust.* 2008. Vol. 81. P. 395–410.

*Статья поступила в редакцию 9 декабря 2015 г.,  
после доработки — 19 февраля 2016 г.*