*Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 5*

УДК 532.59

# ДВИЖЕНИЕ ПРОФИЛЯ НАД ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА ДВУХ ТЯЖЕЛЫХ ЖИДКОСТЕЙ

**С. И. Горлов**

**Институт информационных технологий и прикладной математики СО РАН, 644077 Омск**

Задача о движении профиля вблизи границы раздела двух сред представляет интерес прежде всего своими практическими приложениями. Основные результаты в этой области связаны с решением задачи о движении профиля под границей раздела двух тяжелых жидкостей, т. е. в более плотной среде [1]. Однако интересно рассмотреть движение профиля в менее плотной жидкости, в частности в воздухе над водной средой. Этому и посвящена настоящая работа.

Построен алгоритм решения рассматриваемой задачи, позволяющий проводить расчеты с высокой точностью. Для профиля, движущегося над границей раздела водной и воздушной сред, исследована зависимость распределенных и суммарных гидродинамических характеристик, а также формы границы раздела сред от параметров задачи.

**1.** Рассмотрим линейную краевую задачу об установившемся движении профиля $L$ над границей раздела двух сред. Предположим, что жидкость идеальная, несжимаемая, тяжелая и однородная в слоях $D_1$ и $D_2$. Введем систему координат $Oxy$, располагая ось $Ox$ вдоль невозмущенной границы раздела и проводя ось $Oy$ через переднюю кромку профиля (рис. 1). Обозначим: $g$ — ускорение силы тяжести, $\rho_k$, $V_k$ — плотность и скорость на бесконечности перед профилем в слое $D_k$ $(k = 1,\ 2)$, $H$ — отстояние задней кромки профиля от невозмущенной границы раздела сред, $\alpha$ и $b$ — угол атаки и хорда профиля соответственно.

Для описания движения жидкости в слое $D_k$ введем комплексные скорости $V_k(z)\,(k = 1,\ 2)$, $z = x + iy$. Для функции $\overline{V}_k(z)$ потребуем выполнения следующих условий: аналитичности в $D_k$ (вне контура $L$ при $k = 2$), непрерывности давления и нормальной составляющей скорости при переходе через границу раздела двух сред, затухания возмущенных скоростей в бесконечности перед профилем, непротекания жидкости через контур $L$. Кроме того, будем искать решение в классе функций, удовлетворяющих постулату Жуковского в задней кромке профиля.

Поставленная краевая задача может быть сведена к одному из двух интегральных уравнений:

$$\operatorname{Im}\{\overline{V}_0(z)\,\mathrm{e}^{i\theta(s)}\} = 0, \quad z \in L; \tag{1.1}$$

$$-\frac{1}{2}\,\gamma(s) = \operatorname{Re}\{\overline{V}_0(z)\,\mathrm{e}^{i\theta(s)}\}, \quad z \in L. \tag{1.2}$$

Здесь $s$ — дуговая координата точки $z \in L$; $\gamma(s)$ — интенсивность вихревого слоя, моделирующего $L$; $\theta(s)$ — угол между касательной к $L$ в точке $z(s)$ и осью $Ox$; $\overline{V}_0(z) = \overline{V}_2(z)$ при $z \in L$, а комплексные скорости $V_k(z)$ $(k = 1,\ 2)$ определяются формулами

$$\overline{V}_k(z) = V_{k\infty} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L K_k(z,\zeta)\,\gamma\,(s)\,\mathrm{e}^{-i\theta(s)}\,d\zeta, \quad k = 1,\ 2; \tag{1.3}$$

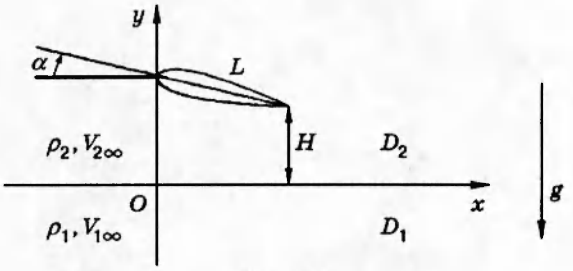

Рис. 1

$$K_1(z,\zeta)=\frac{V_{1\infty}}{V_{2\infty}}\left\{\frac{m_{12}^2}{\pi i}\frac{1}{z-\zeta}-\frac{\nu_1 m_{12}^2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-i\lambda(z-\zeta)}}{\lambda-\nu_1}\,d\lambda-\nu_1 m_{12}^2 i\,\mathrm{e}^{-i\nu_1(z-\zeta)}\right\}; \qquad (1.4)$$

$$K_2(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\zeta}-\frac{m_{12}}{2\pi i}\frac{1}{z-\overline{\zeta}}-\frac{\nu_1 m_{12}^2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{i\lambda(z-\overline{\zeta})}}{\lambda-\nu_1}\,d\lambda-\nu_1 m_{12}^2 i\,\mathrm{e}^{i\nu_1(z-\overline{\zeta})}, \qquad (1.5)$$

где

$$m_{12}^1=\frac{\rho_1V_{1\infty}^2}{\rho_1V_{1\infty}^2+\rho_2V_{2\infty}^2};\quad \nu_1=\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\rho_1V_{1\infty}^2+\rho_2V_{2\infty}^2};\quad m_{12}=m_{12}^1-m_{12}^2;\quad m_{12}^2=\frac{\rho_2V_{2\infty}^2}{\rho_1V_{1\infty}^2+\rho_2V_{2\infty}^2}$$

Выражения (1.4), (1.5) для $K_k(z,\zeta)$ ($k=1,\,2$) представляют собой точные решения соответствующей краевой задачи для вихря единичной интенсивности, полученные на основе метода, изложенного в [2].

Согласно [3], из (1.1), (1.2) получена система интегральных уравнений, не вырождающихся в предельном случае бесконечно малой толщины профиля. Метод решения такой системы уравнений в классе функций $\gamma(s)$, удовлетворяющих постулату Жуковского, изложен в [4]. Форма границы раздела имеет вид

$$f(x)=-\frac{1}{\nu_1}\mathrm{Re}\left\{m_{12}^1\left(\frac{\overline{V}_1(z)}{V_{1\infty}}-1\right)-m_{12}^2\left(\frac{\overline{V}_2(z)}{V_{2\infty}}-1\right)\right\},\qquad z=x.$$

Здесь $V_k(z)$ ($k=1,\,2$) определяются формулами (1.3)–(1.5).

Распределение давления по профилю и суммарные гидродинамические силы $R_x$, $R_y$, а также момент $M$ гидродинамических сил вычисляются по методике [5].

**2.** Расчет проводился для симметричного профиля Жуковского. Алгоритм расчета тестировался известными решениями задачи обтекания профиля Жуковского безгранич-

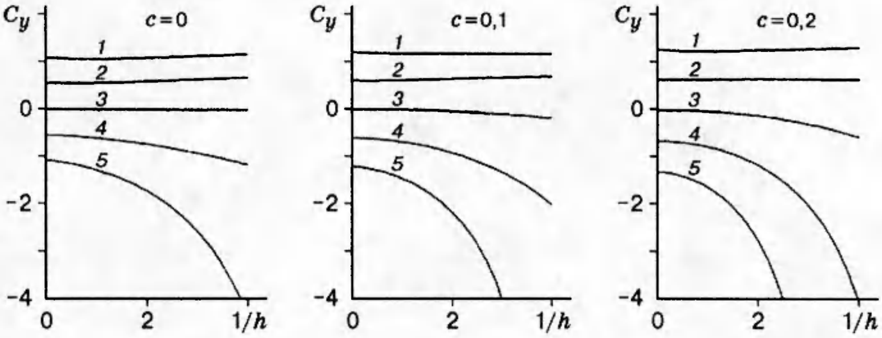

Рис. 2

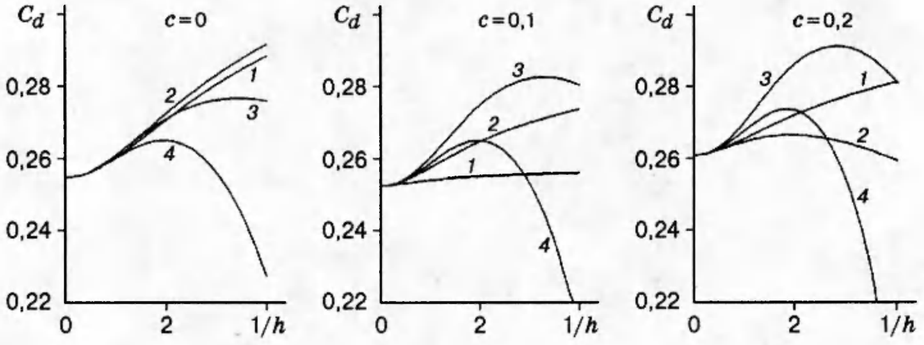

Рис. 3

ным потоком жидкости и движения профиля над твердым плоским экраном [4]. При этом относительная погрешность расчета не превышала 1 %.

Безразмерными параметрами задачи являются: число Фруда $\mathrm{Fr} = V_{2\infty}/\sqrt{gb}$, отношение плотностей $\rho_* = \rho_2/\rho_1$, отношение скоростей набегающих потоков $v_* = V_{2\infty}/V_{1\infty}$, безразмерное отстояние задней кромки профиля от невозмущенной границы раздела сред $h = H/b$, относительная толщина профиля $c$.

Вычислялись стандартные аэродинамические коэффициенты $C_x$, $C_y$, $C_m$, определяющие суммарные аэродинамические силы $R_x$, $R_y$ и момент $M$ относительно передней кромки профиля, безразмерное отстояние центра давления от передней кромки $C_d = C_m/(C_y \cos\alpha - C_x \sin\alpha)$ и распределение давления вдоль контура профиля — коэффициент $C_p = 2(p - p_\infty)/(\rho_2 V_{2\infty}^2)$, где $p$, $p_\infty$ — гидродинамическое давление в рассматриваемой и бесконечно удаленной точках.

Для задачи о движении профиля над границей раздела воздушной и водной сред ($\rho_* = 0{,}00125$, $v_* = 1$) был проведен численный эксперимент по оценке влияния этих параметров на распределенные и суммарные гидродинамические характеристики профиля, а также форму границы раздела сред. Основные результаты представлены на рис. 2–5.

На рис. 2 показана зависимость коэффициента $C_y$ от параметра $h$ для $c = 0$; 0,1; 0,2, $\alpha = 10$; 5; 0; −5; $-10^0$ (линии *1*–*5*) и $\mathrm{Fr} = 1$. С увеличением толщины профиля и с уменьшением его отстояния от границы раздела сред возрастает модуль подъемной силы. Причем этот эффект особенно заметен для отрицательных углов атаки. Аналогичный характер влияния толщины профиля наблюдается и для коэффициента момента $C_m$. При этом коэффициент $C_x$ имеет порядок $10^{-4}$. Расчет также показал, что с увеличением Fr не происходит заметного изменения коэффициентов $C_x$, $C_y$ и $C_m$.

На рис. 3 показана зависимость положения центра давления на профиле от параметра

Рис. 4

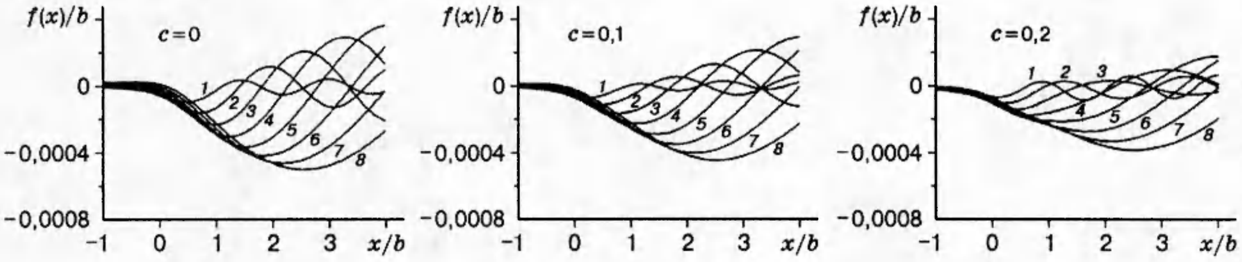

Рис. 5

$h$ для $\alpha = 10$; 5; $-5$; $-10^0$ (линии *1–4*) и $c = 0$; 0,1; 0,2 при Fr = 1. Поведение коэффициента $C_d$ оказалось аналогичным его поведению для задачи о движении профиля над экраном [4].

Представляет интерес рассмотреть распределение давления по контуру профиля (рис. 4). Выбирались следующие значения параметров задачи: $c = 0$; 0,1; 0,2, $\alpha = 5^0$, $h = 0{,}5$, Fr = 1. Заметно сильное изменение распределения давления с ростом толщины профиля.

Зависимость формы границы раздела от числа Фруда (Fr = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2 — линии *1–8*) при $h = 0{,}5$, $\alpha = 5^0$ для $c = 0$; 0,1; 0,2 представлена на рис. 5. При этом сказывается существенное влияние толщины профиля и числа Фруда.

Результаты численного эксперимента позволяют сделать следующие выводы: распределенные и суммарные гидродинамические характеристики профиля, движущегося над границей раздела воздушной и водной сред, практически не зависят от числа Фруда, что позволяет при расчете гидродинамических реакций на профиле моделировать эту границу экраном. Однако форма границы раздела воздушной и водной сред существенно зависит от Fr.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01049).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Басин М. А., Шадрин В. П.** Гидроаэродинамика крыла вблизи границы раздела сред. Л.: Судостроение, 1980.
2. **Горлов С. И.** Решение линейных задач о равномерном движении вихреисточника в многослойной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 3. С. 127–132.
3. **Горелов Д. Н.** Об интегральных уравнениях задачи обтекания профиля // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 4. С. 173–177.
4. **Горелов Д. Н., Горлов С. И.** Движение профиля вблизи плоского экрана // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 47–52.
5. **Горелов Д. Н.** Расчет распределения давления вблизи передней кромки профиля в методе дискретных вихрей // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 1. С. 114–118.

*Поступила в редакцию 16/VI 1995 г.*