

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТЕФАНА В ПОЛУПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЕ

А. Л. Бурка, Н. А. Саввинова

(Новосибирск)

Большинство исследований, связанных с фазовыми переходами, относится к непрозрачным средам. Широкое использование полупрозрачных материалов в различных областях науки и техники предъявляет высокие требования к технологии их получения.

В этой связи расчетное изучение нестационарного радиационно-кондуктивного теплообмена (РКТ) крайне необходимо для выбора оптимальных тепловых режимов при выращивании высококачественных оптических кристаллов. Численным исследованием РКТ в полупрозрачных средах с фазовыми переходами 1-го рода посвящено незначительное количество работ [1—3]. Это обстоятельство связано с рядом проблем, возникающих при решении краевой задачи Стефана, которая становится интегро-дифференциальной в связи с интегральным характером радиационных потоков.

Математическая постановка задачи Стефана с явным выделением границы раздела фаз записывается в виде

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & c_i(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial x} \right) + F_i(T), \\
 & 0 < x < y(t), \quad i = 1, \quad y(t) < x < L, \quad i = 2; \\
 (2) \quad & s_1 \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} = q_1(T), \quad x = 0, \quad s_2 \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} = q_2(T), \quad x = L; \\
 (3) \quad & \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{y(t)-0} - \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{y(t)+0} = \gamma \frac{dy(t)}{dt}; \\
 (4) \quad & T(y(t), t) = T^*, \quad T(0, x) = T_0(x).
 \end{aligned}$$

Условия (2) включают в себя как частный случай краевые условия 1, 2 и 3-го рода, так как параметры s_1, s_2 могут принимать значения 0, 1 [4]. Здесь $c_i(T), \lambda_i(T)$ — теплоемкость вещества на единицу объема, коэффициент теплопроводности; $q_i(T)$ — плотности результирующих потоков к граничным поверхностям ($i = 1, 2$); $F_i(T)$ — плотность тепловых источников; γ — теплота фазового перехода; T^* — температура плавления.

Для решения краевой задачи (1)–(4) без тепловых источников при наличии одного фронта разработаны достаточно эффективные разностные методы с явным выделением фронта [5], которые в случае зависимости искомой функции от нескольких пространственных координат не годятся даже для однофронтных задач. Более того, они не всегда приводят к цели и в случае одномерной задачи Стефана, когда в среде присутствуют источники тепловыделений, приводящие к «размазыванию» геометрической границы фронта фазового перехода. Другими словами, появляется целая область фазового перехода.

В [6] приводится пример несуществования классического решения задачи Стефана для неоднородного уравнения теплопроводности. В связи с этим рядом авторов [4, 7] разработаны численные методы сквозного счета для решения задачи Стефана без явного выделения фронта фазового перехода, основанные на принципе «размазывания» теплоемкости по температуре, которая не зависит от числа измерений. Разностные схемы сквозного счета задачи Стефана, проверенные на автомоделных решениях, позволяют получить решение с достаточной точностью.

В настоящей работе исследуется нестационарный РКТ при плавлении полупрозрачного вещества, находящегося между двумя непрозрачными границами. Предполагается, что твердая фаза кристаллическая, температура фазового перехода постоянна, переход сопровождается выделением скрытой теплоты фазового превращения, в жидкой фазе отсутствует конвекция, среда излучает и поглощает, но не рассеивает тепловую энергию, теплофизические свойства не зависят от температуры, оптические свойства постоянны — среда серая, граница между фазами диффузно пропускающая, а внешние поверхности образца абсолютно черные.

С учетом выше указанных ограничений краевая задача (1)–(4) с граничными условиями 1-го рода относительно функции теплопроводности

$$u(\xi, \tau) = \int_0^{\Theta(\xi, \tau)} \Lambda(z) dz \text{ имеет безразмерный вид}$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - u = \frac{\partial H_s(\Theta)}{\partial \tau} + Sk \frac{\partial \Phi(\Theta)}{\partial \xi} - u, \quad 0 < \xi < 1, \quad \tau > 0;$$

$$(6) \quad u(0, \tau) = \Lambda_1(\Theta(0, \tau) - \Theta^*) + \Lambda_2 \Theta^*, \quad u(1, \tau) = \Lambda_2 \Theta(1, \tau).$$

Условия (6) записаны с учетом кусочно-постоянного характера свойств среды (Λ_i, c_i) и условия $\Theta(1, \tau) < \Theta^* < \Theta(0, \tau)$. Здесь $\xi = x/L$; $\Lambda_i = \lambda_i/\lambda_r$; $c_{pi} = c_i/c_r$; $\Theta(x, \tau) = T(x, \tau)/T_r$; $\tau = \lambda_r t/(c_r L^2)$; $Sk = \sigma_0 T_r^3 L/\lambda_r$; $\Theta^* = T^*/T_r$; $\bar{\gamma} = \gamma/(c_r T_r)$ ($i = 1$ соответствует жидкой, $i = 2$ — твердой фазе);

$$H_s(\Theta) = \begin{cases} c_{p2} \Theta^* + c_{p1} (\Theta - \Theta^*) + \bar{\gamma} & \text{при } \Theta > \Theta^*, \\ c_{p2} \Theta & \text{при } \Theta < \Theta^*; \end{cases}$$

r — индекс, относящийся к определяющим параметрам.

Безразмерный радиационный поток $\Phi(\Theta)$ определяется из решения уравнения переноса [8], представляя собой интегральное соотношение, в которое входят искомая и граничные температуры. Выражение $Sk \partial \Phi / \partial \xi$ в (5) можно трактовать как плотность тепловых источников, которая в данном случае существенно зависит от решения задачи $\Theta(\xi, \tau)$:

$$(7) \quad \frac{\partial \Phi(\Theta)}{\partial \xi} = 2\kappa_i n_i^2 \left\{ 2\Theta^4(\xi, \tau) - \Theta^4(0, \tau) K_2(\xi \kappa_i) - \Theta^4(1, \tau) K_2(\kappa_i(1 - \xi)) - \right. \\ \left. - \kappa_i \int_0^1 \Theta^4(z, \tau) K_1(\kappa_i |\xi - z|) dz \right\},$$

где κ_i, n_i — коэффициенты поглощения и преломления; $K_j(\xi) = \int_0^1 \mu^{-2} \exp(-\xi/\mu) d\mu$ — экспоненциальные функции ($i=1, 2, j=1, 2, \dots$).

С учетом (7) уравнение (5) становится нелинейным, относительно $\Theta(\xi, \tau)$ — интегродифференциальным. После аппроксимации $\partial H_s(\Theta)/\partial \tau$ конечно-разностным отношением с помощью функции Грина для дифференциального оператора левой части (5) краевая задача (5), (6) сводится к нелинейному интегральному уравнению

$$(8) \quad u(\Theta) = (u(0, \tau) \operatorname{sh}(1 - \xi) + u(1, \tau) \operatorname{sh} \xi) / \operatorname{sh} 1 + \int_0^1 W(\Theta) G(\xi, z) dz,$$

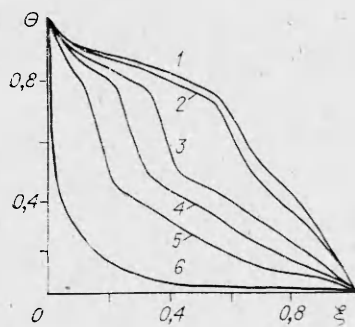
$$W(\Theta) = \frac{\Delta H_s(\Theta)}{\Delta \tau} + Sk \frac{\partial \Phi(\Theta)}{\partial \xi} - u(\Theta),$$

$$G(\xi, z) = \begin{cases} -\operatorname{sh} z \operatorname{sh}(1 - \xi) / \operatorname{sh} 1, & z \leq \xi, \\ -\operatorname{sh} \xi \operatorname{sh}(1 - z) / \operatorname{sh} 1, & z > \xi. \end{cases}$$

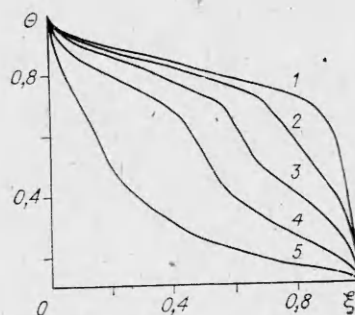
При этом интеграл вычисляется по квадратурам Гаусса.

Таким образом, краевая задача Стефана (1)–(4) с нелинейными внутренними источниками тепловыделений свелась к нелинейному интегральному уравнению РКТ с фазовыми переходами без явного выделения границы раздела фаз. Алгоритм численного решения уравнения (8) в идейном плане эквивалентен численным схемам сквозного счета.

Преимущество предлагаемого метода решения одномерных задач РКТ с фазовыми превращениями перед конечно-разностными состоит в том, что он в отличие от последних не связан с выбором порядка точности разностной схемы при аппроксимации дифференциальной задачи конечно-разностной. Метод дает возможность использовать эффективные итера-



Р и с. 1



Р и с. 2

ционные процессы, применяемые при решении функциональных уравнений. Уравнение (8) решалось итерационным методом [9].

Численный расчет формирования температурного поля при плавлении одномерного плоского слоя флюорита ($T = 1700$ К, $\lambda_r = 9$ Вт/(м·К)) проведен при следующих безразмерных параметрах: $\gamma = -0.1$, $c_1 = 0.75$; $c_2 = 1$, $\Lambda_1 = 2$, $\Lambda_2 = 1$, $n_1 = n_2 = 1.5$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 1$, $\Theta^* = 0.5$, $\Theta(\xi, 0) = \Theta(1, \tau) = 0.1$, $\Theta(0, \tau) = 1$.

Результаты расчетов, представленные на рис. 1, 2, отражают динамику температурного распределения в полупрозрачном образце, в котором происходит процесс плавления. На рис. 1 показаны профили безразмерных температур в слое в различные моменты безразмерного времени $\tau = s \cdot 10^{-2}$ ($s = 4; 3; 2; 1.5; 1; 0.3$ — линии 1—6) при $Sk = 10$ (радиационно-кондуктивный параметр). Рис. 2 иллюстрирует поле температур ($\tau = s \cdot 10^{-3}$, линии 1—5 для $s = 5; 4; 3; 2; 1$) при $Sk = 100$. Как и следовало ожидать, процесс установления стационарного режима наступает гораздо раньше, чем в случае $Sk = 10$.

В заключение отметим, что предложенный метод решения задачи Стефана обладает высокой скоростью сходимости итерационного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abrams M., Viskanta R. The effects of radiative heat transfer upon the melting and solidification of semitransparent crystals // J. Heat Transfer.— 1974.— V. 96, N 2.
2. Habib I. S. Solidification of semitransparent materials by conduction and radiation // Intern. J. Heat Mass Transfer.— 1971.— V. 14.— P. 2161.
3. Марченко Н. В., Аронов Б. И., Штипельман Я. И. Задача Стефана при радиационно-кондуктивном теплопереносе в плоском слое селективной полупрозрачной среды // ТВТ.— 1982.— Т. 20, № 5.
4. Будаев Б. М., Соловьева Е. Н., Успенский А. Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана // ЖВММФ.— 1965.— Т. 5, № 5.
5. Будаев Б. М., Васильев Ф. П., Успенский А. Б. Разностные методы решения некоторых краевых задач типа Стефана // Численные методы в газовой динамике.— 1965.— Вып. 4.
6. Мейрманов А. М. Пример несуществования классического решения задачи Стефана // ДАН СССР.— 1981.— Т. 258, № 3.
7. Самарский А. А., Моисеенко Б. Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // ЖВММФ.— 1965.— Т. 5, № 5.
8. Бурка А. Л., Рубцов Н. А. Нестационарный радиационно-кондуктивный перенос тепла в плоском слое серой поглощающей среды // ПМТФ.— 1971.— № 1.
9. Канторович Л. В. О методе Ньютона // Тр. Матем. ин-та АН СССР.— 1949.— Т. 28.— С. 135.

Поступила 12/II 1986 г.