ПМТФ, № 3, 1963

СКОРОСТЬ СЛАБЫХ ВОЛН В ИЗЛУЧАЮЩЕМ ГАЗЕ

В. А. Прокофьев

(*Москва*)

В статье, исходя из релятивистских уравнений радиационной гидродинамики [1-4] невязкой и нетеплопроводной жидкости, в пренебрежении эффектами взаимодействия частиц высоких энергий (образованием пар, мезонными полями и т. д.), изучается распространение малых плоских гармонических возмущений в покоящейся равновесной среде с учетом собственного радиационного поля, создаваемого термической эмиссией и абсорбцией частицами среды электромагнитных волн. Здесь заранее не налагаются условия малости отношений скорости звука и скорости света и радиационного давления к давлению газа, при которых справедливы выводы проведенного ранее исследования этой задачи [5,6] на основании уравнений Джинса [7] и Фогта [8]. Релятивистские эффекты могут быть заметными при малых макроскопических скоростях движения среды, когда микроскопические скорости отдельных частиц приближаются к скорости света (очень высокие температуры). Различия в значениях параметров, описывающих радиационное поле в фиксированной и в локальной системах отсчета, будут не только в членах, имеющих множителем $1 / c^2$ (c — скорость света), но и в членах, содержащих $1 / c$, вследствие эффекта Допплера и аберрации.

§ 1. Линеаризированные уравнения. В результате возмущения параметры среды получат малые относительные приращения (отмечены штрихами)

$$P = P_0 (1 + P'), \quad H_\nu = 2\pi B_{\nu 0} H_\nu', \quad H = 2\pi B_0 H', \quad u = c_0 u' \equiv c_0 M \qquad (1.1)$$

где P — любой из следующих параметров: p, ρ, T, $э$ — давление, плотность, температура, внутренняя термическая энергия газа; B_ν, I_ν, ε_ν, π_ν — функция Планка, интенсивность радиации, объемная плотность радиационной энергии, радиационное давление оптической частоты ν; B, I, ε, π_1 — соответствующие интегральные параметры, полученные из предыдущих спектральных параметров суммированием по всем частотам; H_ν, H — спектральный и интегральный потоки радиации (в дальнейшем вдоль оси Ox); u — макроскопическая скорость возмущенного движения, c_0 — нерелятивистская скорость звука (без радиации). Нулики относятся к параметрам равновесной покоящейся среды, так что ρ_0, $э_0$ суть остаточная плотность и остаточная внутренняя термическая энергия газа.

Далее исследуется движение с плоскими волнами (вдоль оси Ox), квадратами малых возмущений и их производных пренебрегается. Возникшее движение будет отнесено к фиксированной системе отсчета, однако некоторые из параметров будут определены также и в собственной системе (что отмечено звездочками), причем в невозмущенной среде обе системы совпадают и соответствующие параметры в обеих системах будут одинаковыми, вследствие чего звездочки при наличии у величины индекса 0 опускаются. Так как движение одномерное, то собственное радиационное поле будет осесимметричным и из определений параметров следует

$$\varepsilon' = \frac{1}{2} E(1), H' = E(\mu), \pi'_1 = \frac{3}{2} E(\mu^2), \quad E(\mu^k) \equiv \int_0^\infty B_{\nu 0} d\nu \int_{-1}^{1} I_\nu' \mu^k d\mu \Big/ \int_0^\infty B_{\nu 0} d\nu \qquad (1.2)$$

Линеаризированное уравнение переноса радиации имеет вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu'}{\partial t} + \cos\vartheta\frac{\partial I_\nu'}{\partial x} = \omega_{\nu 0}\left[(T' + Mc^\circ)\left(\frac{\partial \ln B_\nu}{\partial \ln T}\right)_0 - I_\nu'\right] \qquad (1.3)$$

если считать радиацию квазиравновесной и воспользоваться законом Кирхгофа. Здесь $\omega_\nu = \rho\alpha_\nu$ — объемный коэффициент поглощения; ϑ—угол между осью Ox и направлением луча, вдоль которого распространяется радиация; $c^\circ = c_0 / c$. Вариации потока радиации вдоль оси Ox в фиксированной и в локальной системах отсчета связаны так [4]:

$$H' = H^{*\prime} + \tfrac{8}{3} Mc^\circ \qquad (1.4)$$

Релятивистские уравнения одномерного движения газа с учетом радиационного поля [4] после их линеаризации около состояния покоя запишутся в фиксированной системе отсчета в следующем виде:

$$\rho_0\left(1 + \frac{\text{э}_0}{c^2} + \frac{p_0}{\rho_0 c^2}\right)\frac{\partial u}{\partial t} + p_0\frac{\partial p'}{\partial x} + \pi_{10}\frac{\partial \pi_1'}{\partial x} + \frac{2\pi B_0}{c^2}\frac{\partial H'}{\partial t} = 0$$

$$\rho_0 \text{э}_0\frac{\partial \text{э}'}{\partial t} - p_0\frac{\partial \rho'}{\partial t} + 2\pi B_0\frac{\partial H'}{\partial x} + \varepsilon_0\frac{\partial \varepsilon'}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (1.5)$$

Систему (1.3), (1.5) дополним уравнениями состояния газа (1.6)

$$p = f_1(\rho, T), \quad \text{э} = f_2(\rho, T), \quad p' = h_1\rho' + h_2 T', \quad \text{э}' = h_3\rho' + h_4 T'$$

$$h_1 = \lambda_\rho(p), \quad h_2 = \lambda_T(p), \quad h_3 = \lambda_\rho(\text{э}), \quad h_4 = \lambda_T(\text{э}), \lambda_x(y) \equiv (\partial \ln y / \partial \ln x)_0$$

При линеаризации уравнений по существу происходит переход от релятивистского случая к классическому, удовлетворяющему принципу относительности Галилея, с учетом эффекта Допплера и аберрации, однако уравнения состояния остались при этом релятивистскими.

§ 2. Частотное уравнение. Система (1.3), (1.5), (1.6) имеет решения вида

$$P'(x, t) = P'(0, 0)\exp[i(kx + \omega t)] \qquad (k, \omega = \text{const}) \qquad (2.1)$$

описывающие, в частности, распространение в безграничной среде вынужденных гармонических колебаний бесконечно малой амплитуды с частотой ω. Физический смысл имеют действительные части (2.1).

Подставляя выражения вида (2.1) в (1.3) и затем в (1.2), получим

$$I_\nu' = \lambda_T(B_\nu)\frac{T' + Mc^\circ\cos\vartheta}{1 + ic^\circ v_\nu + mv_\nu\cos\vartheta} \quad \left(m = \frac{ikc_0}{\omega}\right) \qquad (2.2)$$

$$\varepsilon' = g_1 T' + \frac{1}{2} Mc^\circ g_2, \quad H' = g_2 T' + \frac{2}{3} Mc^\circ g_3, \quad \pi_1' = g_3 T' + Mc^\circ g_4 \qquad (2.3)$$

$$g_1 = \frac{2}{m} S\left\{\ln\frac{1+q_\nu}{1-q_\nu}\right\}, \qquad g_2 = \frac{8}{m} S\left\{1 - \frac{1}{2q_\nu}\ln\frac{1+q_\nu}{1-q_\nu}\right\}$$

$$g_3 = -\frac{12}{m} S\left\{\frac{1}{q_\nu}\left(1 - \frac{1}{2q_\nu}\ln\frac{1+q_\nu}{1-q_\nu}\right)\right\} \qquad \left(q_\nu = \frac{m}{w_\nu + ic^\circ}\right)$$

$$g_4 = \frac{4}{m} S\left\{1 + \frac{3}{q_\nu^2}\left(1 - \frac{1}{2q_\nu}\ln\frac{1+q_\nu}{1-q_\nu}\right)\right\} \qquad (2.4)$$

$$S\{y\} = \int_0^\infty \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\right)_0 w_\nu y\, d\nu \Big/ \int_0^\infty \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\right)_0 d\nu \qquad \left(w_\nu = \frac{1}{v_\nu} = \frac{\omega_{\nu 0} c_0}{\omega}\right) \qquad (2.5)$$

После подстановки (2.1) в систему уравнений (1.5), (1.6) получается, совместно с (2.3), система линейных однородных уравнений, условием существования нетривиального решения которой относительно вариаций параметров является частотное уравнение

$$\left(h_2 m + \xi m g_3 + \frac{3}{2}\, i c^\circ \xi g_2\right)\left(e_1 m + e_3 \xi m g_3 + \frac{3}{2}\, e_3 i c^\circ \xi g_2\right) + \tag{2.6}$$
$$+ \left(h_4 + 3 e_3 \xi g_1 - \frac{i}{8}\, h_4 Z m g_2\right)\left(e_2 + h_1 m^2 - i c^\circ \xi m g_4 + c^{\circ 2} \xi g_3\right) = 0$$

причем все относительные вариации параметров выражаются через одну из них, например через T', следующим образом: (2.7)

$$M = iLT', \qquad \rho' = -mLT', \qquad p' = (h_2 - h_1 mL)\, T', \qquad э' = (h_4 - mL)\, T'$$
$$\varepsilon' = \left(g_1 + \frac{i}{2}\, c^\circ L g_2\right) T', \qquad H' = \left(g_2 + \frac{2}{3}\, i c^\circ L g_3\right) T', \quad \pi_1' = (g_3 + i c^\circ L g_4)\, T'$$

$$L \equiv \frac{h_2 m + \xi m g_3 + {}^3/_2\, i c^\circ \xi g_2}{e_2 + h_1 m^2 - i c^\circ \xi m g_4 + c^{\circ 2} \xi g_3}, \qquad Z = \frac{12 e_3 \xi}{h_4 c^\circ}, \qquad \gamma = \frac{\rho_0 c_0^2}{h_1 p_0} \tag{2.8}$$
$$\xi = \frac{\pi_0}{p_0}, \qquad e_2 = \gamma h_1 + e_4 c^{\circ 2}, \qquad e_4 = 1 + \frac{1}{e_3}, \qquad e_3 = \frac{p_0}{\rho_0 э_0}$$

Здесь γ — отношение удельных теплоемкостей газа. На основании известных термодинамических соотношений

$$\gamma = 1 + \frac{h_2 e_1}{h_1 h_4}, \qquad e_1 \equiv e_3 - h_3 \tag{2.9}$$

Общее исследование затухания и дисперсии волн бесконечно малой амплитуды сводится к исследованию корней частотного уравнения. В последующих параграфах сделаны некоторые выводы из анализа этого уравнения.

Из характеристического уравнения (2.6) следует, что могут существовать два типа затухающих волн: волны сжатия и термические радиационные волны. Волны сжатия являются видоизменением незатухающих звуковых волн в недиссипативной среде, термические радиационные волны — видоизменением радиационных волн, возникающих под действием пульсирующего источника радиации в начале координат.

Система уравнений для определяющих перенос радиации частот не имеет решения $q_\nu = 1$, так как этот случай соответствует распространению радиации в неизлучающей среде от плоского источника в начале координат со скоростью света в пустоте, затухающей под действием поглощения среды по закону Бугера, что не соответствует условиям рассматриваемой здесь задачи.

В нерелятивистском случае при $c^\circ = 0$ и $\xi = 0$ уравнение (2.6) примет вид

$$\gamma\, \frac{1 + m^2}{\gamma + m^2} = iZS \left\{1 - \frac{w_\nu}{2m} \ln \frac{w_\nu + m}{w_\nu - m}\right\} \tag{2.10}$$

Для иллюстрации полученных ниже выводов будут использованы, кроме общих уравнений (1.6), уравнения состояния совершенного релятивистского невырожденного газа частиц и газа частиц с постоянными теплоемкостями.

§ 3. Релятивистский совершенный газ. Внутренняя энергия релятивистского газа частиц в расчете на единицу собственного объема представляется выражением $E = \rho c^2 + \rho э$, где $\rho = n m_p$ — остаточная плотность массы газа, m_p — осредненная масса покоя отдельной частицы, n — число частиц в единице собственного объема, $\rho э$ — термическая внутренняя энергия газа на единицу собственного объема. Уравнения состояния невырожденного идеального газа запишутся в виде [9,10]: (3.1)

$$p = \frac{k}{m_p}\, \rho T, \qquad э = \frac{p}{\rho}\, \varphi(x), \qquad \varphi(x) = 3 - x + xG, \quad G = \frac{K_1}{K_2}, \quad x = \frac{m_p c^2}{kT}$$

где k — постоянная Больцмана, $K_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя.

В соответствии с этим получим (фиг. 1,2) (3.2)

$$h_1 = h_2 = 1, \quad h_4 = c_{v0}\, T_0 \,/\, E_0 = f \,/\, \varphi, \quad \gamma = 1 + 1/f, \quad e_1 = e_3 = 1 \,/\, \varphi$$

$$h_3 = 0, \quad c^{\circ 2} = \gamma \,/\, x = (1 + f) \,/\, (fx), \quad f\,(x) = 3 + x^2 - xG\,(3 + xG)$$

В идеальном газе с постоянными теплоемкостями

$$h_1 = h_2 = h_4 = 1, \quad h_3 = 0, \quad Z = 12\,(\gamma - 1)\,\xi \,/\, c^\circ$$
$$e_1 = e_3 = \gamma - 1, \quad e^{\circ 2} = \gamma \,/\, x, \quad e_2 = \gamma + \gamma c^{\circ 2} \,/\, (\gamma - 1) \tag{3.3}$$

Релятивистский газ в общем случае не подчиняется этим соотношениям, но в пределе очень высоких и низких температур они приближенно выполняются, причем отношение удельных теплоемкостей будет равно $^4/_3$ и $^5/_3$ соответственно.

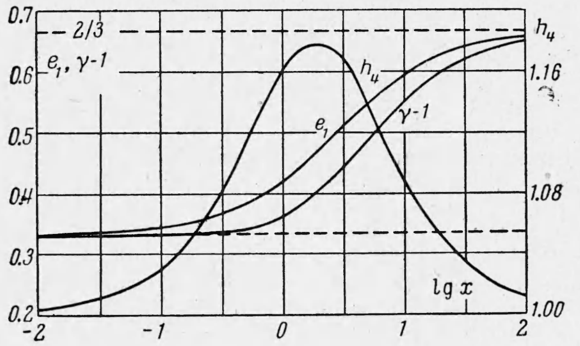
В совершенном релятивистском газе

$$x = 1.082 \cdot 10^{13} \mu_{\text{H}} T^{-1}$$

$$c^\circ = 3.040 \cdot 10^{-7}\, (\gamma T)^{1/2} \mu_{\text{H}}^{-1/2}$$

$$(\mu_{\text{H}} = m_p \,/\, m_{\text{H}}) \tag{3.4}$$

$$\xi = \frac{8}{45}\,\frac{\pi^5 c^3 m_p{}^3 c^{\circ 6}}{h^3 n_0 \gamma^3} = 18.28\,\frac{T^3}{n_0} = \frac{2.364 \cdot 10^{40}}{\gamma^3 n_0}\, c^{\circ 6} \mu_{\text{H}}{}^3 \tag{3.5}$$



Фиг. 1

Здесь m_{H} — масса атома водорода, h — постоянная Планка, n_0 — число частиц в 1 *см*^{3}. Отсюда видны предельные значения c°, ξ, Z, совместимые с представлением о среде как о материальном континууме.

Если энергия в единице объема равна давлению [11], то (3.6)

$$\rho э = p, \; h_1 = h_2 = h_4 = e_1 = e_3 = 1, \; h_3 = 0, \; e_2 = 2\,(1 + c^{\circ 2}), \; \gamma = 2$$

В случае ультрарелятивистского газа частиц имеем

$$\rho э = 3p, \quad h_1 = h_2 = h_4 = 1, \quad h_3 = 0, \quad e_1 = e_3 = {}^1/_3$$
$$e_2 = 4\,({}^1/_3 + c^{\circ 2}), \qquad \gamma = {}^4/_3 \tag{3.7}$$

§ 4. Волны большой оптической длины. При малых числах v_ν для определяющих радиационный перенос энергии оптических частот условная длина волны $l_0 = 2\pi c_0/\omega$, выраженная в длинах свободного пробега фотонов, велика (большая оптическая длина условной адиабатической волны). Время жизни фотона $t_\nu = 1/(c\omega_{\nu 0})$ мало по сравнению с периодом колебаний в волне. Это будет иметь место, если частоты колебаний малы, либо если коэффициенты поглощения радиации велики для определяющих оптических частот. Радиационное поле внутри волны при этих условиях может считаться равновесным.

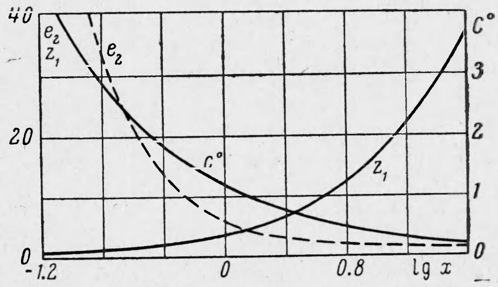
В пределе при $v_\nu \to 0$ волны будут незатухающими и будут распространяться с постоянной скоростью, не зависящей от частоты. Квадрат этой скорости равен

$$c_{a0}^2 = c_0{}^2\,\frac{\gamma h_1 h_4 + 4\xi\,(e_3 + h_2 e_3 + 3h_1 e_3 - h_3) + 16 e_3 \xi^2}{(e_2 + 4\xi c^{\circ 2})\,(h_4 + 12 e_3 \xi)} \tag{4.1}$$

и может быть определен равенством (производная берется при постоянной энтропии)

$$c_a^2 = \left(\frac{\partial (p + \pi)}{\partial \rho}\right)_{0,\,s} \tag{4.2}$$

из уравнений (1.5), (1.6), если в них подставить равновесные значения радиационных параметров. Скорость волн (4.1) представляет собой низкочастотную адиабатическую скорость звука; она, в частности, имеет место при очень малых частотах, причем приток тепла к единице собственного объема в этом случае отсутствует. При $c^\circ \ll 1$ формула (4.1) определит скорость звука в газе, находящемся в равновесии с черным излучением [12]. Для совершенного релятивистского газа отсюда следует формула, полученная Гэссом [13] из рассмотрения соотношений Ранкина — Гюгонио на слабом скачке уплотнения в термически совершенном релятивистском газе; если положить еще $\xi = 0$, то получим скорость звука в релятивистском совершенном газе частиц без радиации, вычисленную Синджем [2]. В случае совершенного газа с постоянными теплоемкостями



Фиг. 2

$$\frac{c_{a0}^2}{c_0^2} = \frac{\gamma + 20(\gamma - 1)\xi + 16(\gamma - 1)\xi^2}{[\gamma + 4\xi c^{\circ 2} + \gamma c^{\circ 2}/(\gamma - 1)]\,[1 + 12(\gamma - 1)\xi]} \tag{4.3}$$

что при $c^\circ = 0$ превращается в формулу Захса [14]. При больших ξ из (4.1) получается скорость звука в фотонном газе [15]

$$c_{a0} = c/\sqrt{3} \tag{4.4}$$

При больших значениях c° (4.1) заменяется формулой

$$\frac{c_{a0}^2}{c^2} = \frac{\gamma h_1 h_4 + 4\xi(e_3 + h_2 e_3 + 3h_1 e_3 - h_3) + 16 e_3 \xi^2}{(e_4 + 4\xi)(h_4 + 12 e_3 \xi)} \tag{4.5}$$

что для $\xi \gg 1$ снова дает (4.4). Если газ совершенный релятивистский или с постоянными теплоемкостями, то из (4.5) следует (4.6)

$$\frac{c_{a0}^2}{c^2} = \frac{1 + f + 20\xi + 16\xi^2}{(1 + \varphi + 4\xi)(f + 12\xi)}, \qquad \frac{c_{a0}^2}{c^2} = \frac{(\gamma - 1)[\gamma + 20(\gamma - 1)\xi + 16(\gamma - 1)\xi^2]}{\gamma + 4\xi(\gamma - 1)[3\gamma + 1 + 12(\gamma - 1)\xi]}$$

Формула (4.5) для одного лишь вещественного газа ($\xi \ll 1$) в общем случае и в случае совершенного релятивистского газа преобразуется, соответственно, к виду

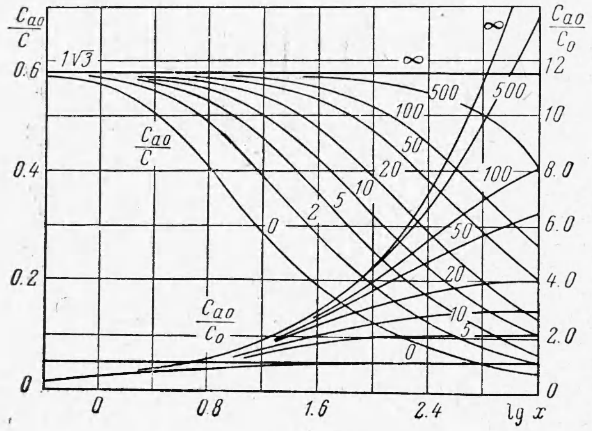
$$\frac{c_{a0}^2}{c^2} = \frac{\gamma h_1 e_3}{1 + e_3}, \qquad \frac{c_{a0}^2}{c^2} = \frac{1}{f}\,\frac{1 + f}{1 + \varphi} \tag{4.7}$$

а для газа с постоянными теплоемкостями получается формула Тауба [16]. При больших c° с большой точностью $f = \varphi = 3$, вследствие чего формулы (4.6) и (4.7) превращаются в (4.4). В эту же формулу превратится равенство (4.5) для совершенного газа при $\gamma = 4/3$.

Отношение $c_{a0}/c_0 \leqslant 1$, если, как следует из (4.1) и (2.8)

$$Z^2 \leqslant \frac{36 e_3 \xi}{h_4^2}\,\frac{(1 + e_3 + 4e_3\xi)(h_4 + 12 e_3 \xi)}{e_3[1 + h_2 - 3(\gamma - 1)h_1 + 4\xi] - h_3} \tag{4.8}$$

В случае нерелятивистского вещественного газа, находящегося в равновесии с фотонным газом, в соответствии с (4.1) и как было показано в статье [12], отношение c_{a0}/c_0 с ростом ξ монотонно возрастает от единицы до бесконечности. В случае же релятивистского газа (фиг. 3 и 4, на кривых указаны значения ξ) это отношение не превышает величины $c^\circ/\sqrt{3}$, как видно из (4.1), причем оно может быть, в зависимости от соотношения между основными термодинамическими параметрами газа, как больше, так и меньше единицы, даже если отношение удельных теплоемкостей газа постоянно.



Фиг. 3

При малых значениях v_ν

$$H' = {}^8/_3\, Mc^\circ, \quad H^{*\prime} = 0 \tag{4.9}$$

За счет переноса радиационной энергии внутри элемента собственного объема не происходит накопления энергии.

Уравнение (2.6) при малых значениях v_ν, кроме корня

$$m \approx \pm\, i c_0 / c_{a0} \tag{4.10}$$

имеет еще корень

$$\pm\, m \approx \frac{1+i}{\sqrt{Zv_R}} \left\{ \frac{3}{2} \left[\gamma + \frac{4\xi}{h_1 h_4} (e_1 + h_2 h_3 + 3h_1 e_3 + 4e_3 \xi) \right] \right\}^{1/2}, \quad v_R = S\{v_\nu^2\} \tag{4.11}$$

При малых и больших значениях ξ (в последнем случае считаем попрежнему, что порядок любого члена определяется порядком величины v_ν) получим соответственно

$$m \approx \pm (1+i) \left(\frac{3\gamma}{2Zv_R} \right)^{1/2}, \quad \xi \ll 1; \qquad m \approx \pm 2(1+i) \left(\frac{6e_3}{h_1 h_4 Z v_R} \right)^{1/2} \xi, \quad \xi \gg 1 \tag{4.12}$$

Таким образом, одновременно существуют две категории волн: волны давления, описываемые корнем (4.10), и термические радиационные волны, описываемые корнем (4.11). Термические радиационные волны распространяются в рассматриваемом случае малых значений v_ν со скоростью, гораздо меньшей как обычной скорости звука c_0 без учета излучения, так и скорости распространения волн давления. Это медленные волны, затухающие гораздо сильнее волн давления. Поэтому преобладающими волнами будут волны давления. Волны второй категории обладают сильной дисперсией: их скорость пропорциональна корню квадратному из частоты колебаний в волне.

Коэффициент поглощения на длине термических радиационных волн

$$\alpha_a^{(2)} = 2\pi \frac{m_r}{m_i} \approx 2\pi \tag{4.13}$$

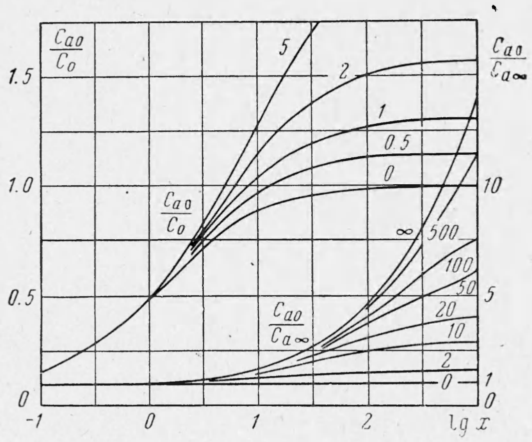
является постоянной величиной. Форма волны не сохраняется, так как $\alpha_a^{(2)}$ не является малой величиной. Коэффициент поглощения на единице длины пропорционален корню квадратному из частоты. Длина термических радиационных волн является большой величиной, обратно пропорциональной корню квадратному из частоты. Эти волны гораздо длиннее звуковых волн и волн давления.

Существование в изучающем и поглощающем газе, кроме волн давления в идеальном газе и волн давления и волн вязкости в вязкой и теплопроводной жидкости, еще и термических радиационных волн было обнаружено ранее [17–19].

В заключение вычислим скорость волн в газе Зельдовича (3.6). Если $v_\nu \to 0$, то

$$\frac{c_{a0}^2}{c_0^2} = \frac{1+2\xi\,(5+4\xi)}{(1+12\xi)\,(1+c^{\circ 2}+2\xi c^{\circ 2})} \tag{4.14}$$

При больших ξ получим ультрарелятивистскую скорость звука (4.4), а при малых $c_{a0} = c_0\,(1+c^{\circ 2})^{-1/2}$, что в случае малых c° дает адиабатическую скорость звука в нерелятивистском газе.



Фиг. 4

В случае больших или малых c° (оставляя в стороне применимость при этом уравнении состояния (3.6)), получим (4.15)

$$\frac{c_{a0}^2}{c^2} = \frac{1+2\xi\,(5+4\xi)}{(1+12\xi)\,(1+2\xi)} \leqslant 1, \quad c^\circ \gg 1; \qquad \frac{c_{a0}^2}{c_0^2} = \frac{1+2\xi\,(5+4\xi)}{1+12\xi}, \quad c^\circ \ll 1$$

§ 5. Волны малой оптической длины. Пусть теперь числа $v_\nu \gg 1$. Это означает, что либо в ответственных за теплопередачу частотах коэффициенты поглощения радиации малы, либо частоты вынужденных механических колебаний велики, продолжительность жизни фотона сильно превосходит период колебаний в волне и за время одного колебания радиационное поле не успевает измениться: распространение волн происходит при «замороженном» радиационном поле. В пределе при $v_\nu \to \infty$ единственный из учитываемых здесь диссипативных процессов исчезает, волны становятся незатухающими и распространяются с высокочастотной скоростью звука, которую можно вычислить по формуле (4.2) из уравнений (1.5), (1.6), если в них подставить замороженные значения H, ε, π_1, т. е. $H' = \varepsilon' = \pi'_1 = 0$, совершенно не привлекая уравнение переноса радиации. В результате получается следующее значение квадрата скорости волн:

$$c_{a\infty}^2 = c_0^2\,\frac{\gamma h_1 e_3}{\gamma h_1 e_3 + (1+e_3)\,c^{\circ 2}} \tag{5.1}$$

Эта формула совпадает с выражением скорости волн малых частот, если в выражении (4.1) положить $\xi = 0$. В нерелятивистском газе, в ультрарелятивистском, в совершенном ультрарелятивистском газе и в газе с постоянными теплоемкостями

$$c_{a\infty} = c_0, \quad c_{a\infty}^2 = \gamma h_1 e_3 c^{\circ 2}/(1+e_3), \quad c_{a\infty}/c\sqrt{3}, \quad c_{a\infty}^2 = (\gamma-1)c^2$$

Скорость распространения высокочастотных волн $c_{a\infty}$ всегда меньше адиабатической скорости звука c_0. Скорость низкочастотных волн в данной среде больше или равна скорости высокочастотных волн, если

$$\begin{gathered}\gamma h_1 e_3\,[(1+h_2)\,e_3 - 3\,(\gamma-1)\,h_1 e_3 - h_3] + \\ + c^{\circ 2}\,\{(1+e_3)\,[(1+h_2)\,e_3 - h_3] - 3\,[(\gamma-1)\,(1+e_3) + \gamma h_4]\,h_1 e_3\} + \\ + 4e_3\xi\,[\gamma h_1 e_3 + (1+e_3-3\gamma h_1 e_3)\,c^{\circ 2}] \geqslant 0\end{gathered} \tag{5.2}$$

Условие (5.2) для совершенного релятивистского газа всегда выполняется, т. е. при любом значении c° и ξ в релятивистском совершенном газе низкочастотная скорость звука больше высокочастотной. В газе с постоянными теплоемкостями из сравнения скоростей звука очень высоких и очень низких частот следует, что: 1) эти скорости равны, если $\xi = 0$; 2) $c_{a0} > c_{a\infty}$, если $\gamma \leqslant {}^4/_3$, 3) $c_{a0} > c_{a\infty}$ при ${}^5/_3 \geqslant \gamma \geqslant {}^4/_3$, если

$$Z^2 \geqslant \frac{144(\gamma-1)^2(3\gamma-4)(1+4\xi)\xi^2}{5-3\gamma+4(\gamma-1)\xi} \tag{5.3}$$

Отношение адиабатических низкочастотной и высокочастотной скоростей звука в совершенном релятивистском газе при различных значениях x и ξ изображено на фиг. 4. Оно стремится к единице при $\xi \to 0$ при любом значении x и при $x \to 0$ при любом ξ; при $x \to \infty$ и конечном ξ квадрат его стремится к $0.4\,({}^5/_3 + 20\xi + 16\xi^2)\,/\,(1 + 8\xi)$, а при $\xi \to \infty$, но конечном x — к ${}^1/_3 f\,(1 + x + \varphi)\,/\,(1 + f)$.

Из анализа частотного уравнения следует, что формула (5.1) верна и в более общем случае, когда одновременно выполняются неравенства

$$c^\circ v_\nu \gg 1, \qquad ZS\{1\} \ll 1 \tag{5.4}$$

При больших значениях v_ν поток радиации через фиксированную площадку есть величина постоянная: в любом неподвижном объеме в фиксированной системе отсчета приток тепла за счет излучения равен нулю. В собственной системе отсчета поток радиации $H^{*\prime} = -\,{}^8/_3 c^\circ M$ отличен от нуля, однако приток тепла за счет излучения в каждом данном элементе газа (в элементе данных частиц газа) отсутствует.

В случае газа (3.6) из (2.6) следует, что при $v_\nu \to \infty$ и любых конечных ξ, c°, а также при $c^\circ \to \infty$ и любых ограниченных v_ν, ξ скорость волн равна скорости света. Если $\xi \to \infty$, то при любых ограниченных v_ν, c° скорость волн равна ультрарелятивистской скорости звука.

§ 6. Изотермические волны. Низкочастотная скорость звука равна изотермической $c_T = c_0 / \sqrt{\gamma}$ при условии, что

$$c^{\circ 2} = \frac{\gamma e_3\,[(\gamma-1)\,h_1h_4 + 4\xi\,(e_3 + h_2e_3 - h_3) + 16e_3\xi^2]}{(h_4 + 12e_3\xi)\,(1 + e_3 + 4e_3\xi)} \tag{6.1}$$

Если $c^{\circ 2}$ меньше или больше правой части (6.1), то низкочастотная скорость звука больше или меньше изотермической. Правая часть (6.1) для совершенного релятивистского газа и газа с постоянными теплоемкостями меньше единицы. Высокочастотная скорость звука равна изотермической, если

$$c^{\circ 2} = (\gamma - 1)\,\gamma h_1 e_3\,(1 + e_3)^{-1} \tag{6.2}$$

В случае совершенного релятивистского газа это имеет место при $x \approx 5.6$, а в случае газа с постоянными теплоемкостями — при $c^\circ = \gamma - 1$.

Одновременное равенство низкочастотной, высокочастотной и изотермической скоростей звука невозможно. Возвращаясь к исследованию общего случая не очень больших и не очень малых значений чисел v_ν в определяющем движение спектральном интервале, можно указать широкий класс условий, когда волны (в первом приближении) будут двигаться с ньютоновской скоростью звука. Такими условиями являются

$$Z\,|a_{0\,0}^{(0)}| \gg 1, \qquad a_{0\,0}^{(0)} \equiv S\{1 - w_\nu \operatorname{arc\,ctg} w_\nu\}, \qquad \xi \leqslant O(1) \tag{6.3}$$

которые должны выполняться одновременно. Из оценки модуля $a_{0\,0}^{(0)}$ следует, что здесь должно быть $Z \gg 1$, а следовательно, $c^\circ \ll 1$, так как ξ не должно быть большой величиной. Поэтому газ здесь близок к нерелятивистскому.

Из уравнений гидромеханики невязкого и нетеплопроводного излучающего и поглощающего радиационную энергию газа в рамках специальной теории относительности получено дисперсионное уравнение распространения слабых возмущений в покоящемся газе. Образованием пар, мезонными полями и другими эффектами, относящимися к взаимодействию частиц высоких энергий, во всех случаях пренебрегалось. Предполагалось, что состояние радиации определяется законом Кирхгофа. Некоторые из этих ограничений могут быть сняты, и не составляет труда обобщить изложенную теорию на более общие уравнения состояния радиации. Установлено существование двух предельных скоростей распространения волн: адиабатической скорости звука малых частот и адиабатической скорости звука больших частот. Эти результаты были получены ранее [6] из нерелятивистских уравнений гидродинамики излучающего газа Джинса — Фогта, где не учитывалось различие между их написанием в фиксированной и в собственной системах отсчета. Учет последнего обстоятельства позволил установить правильную формулу (5.1) для адиабатической скорости высокочастотных волн (вместо формулы (3.8) статьи [6]). Показана возможность распространения волн давления с изотермической скоростью звука. Продемонстрирована возможность существования наряду с волнами давления еще и термических радиационных волн.

Поступила 26 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Thomas L. H. The radiation field in a fluid in motion. Quarterly Journal Mathem., Oxford ser., 1930, vol. 1, pp. 239—251.
2. Synge J. L. The relativistic gas. Amsterdam, Noth-Holland Publishing Company, 1957. (Русск. пер. Д. Л. Синдж, Релятивистский газ, Атомиздат, М., 1960).
3. Halzlehurst J., Sargent W. L. W. Hydrodynamics in a radiation field—a covariant treatment. The Astrophysical Journal, 1959, vol. 130, No. 1, pp. 276—285.
4. Прокофьев В. А. Уравнения релятивистской радиационной гидродинамики. Докл. АН СССР, 1961, т. 140, № 5, стр. 1033—1036, Поправка. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 1, стр. 8.
5. Прокофьев В. А. Слабые волны в сжимаемой жидкости с учетом излучения. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6, стр. 775—782. Поправка, ПММ, т. 22, вып. 3, стр. 424.
6. Прокофьев В. А. Распространение вынужденных плоских волн сжатия малой амплитуды в вязком газе с учетом собственного радиационного поля. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 2, стр. 18—33.
7. Jeans J. H. A theory of stellar evolution. Monthly Notices RAS, 1925, vol. 85, pp. 914—933.
8. Vogt H. Die Stabilität der Sterne. Astronomische Nachrichten, 1928, Bd. 232, No. 5545, SS. 1—4.
9. Паули В. Теория относительности. М., Гостехиздат, 1947.
10. Chandrasekhar S. An introduction to the study of stellar structure. The University of Chicago Press. Chicago, Illinois, 1939. (Русск. пер.: С. Чандрасекар. Введение в учение о строении звезд. ИЛ, 1950).
11. Зельдович Я. Б. Уравнение состояния при сверхвысокой плотности и релятивистские ограничения. ЖЭТФ, 1961, т. 41, № 5, стр. 1609—1615.
12. Прокофьев В. А. О скорости малых возмущений и существовании слабых ударных волн в излучающем газе с учетом радиационного давления. Вестник Московского университета, серия 1, математика и механика, 1960, № 1, стр. 43—59.
13. Guess A. W. Density comression ratio across relativistic — strong — shock waves. The Physics of Fluids, 1960, vol. 3, No 3, pp. 697—705.
14. Sachs R. G. Some properties of very intense shock waves. The Physical Review, 1946, vol. 69, No. 9—10, pp. 514—522.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц М. Е. Механика сплошных сред. Изд. 2-е, Гостехиздат, М., 1953, стр. 604.
16. Taub A. H. Relativistic Rankine — Hugoniot equations. The Physical Review, 1958, vol. 74, No. 3, pp. 328—334.
17. Прокофьев В. А. Влияние излучения на распространение малых возмущений в вязкой и теплопроводной жидкости (гидродинамическая теория). Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7, стр. 94—102.
18. Прокофьев В. А. Учет излучения в гидродинамической теории распространения плоских вынужденных волн бесконечно малой амплитуды. Вестник Московского университета, серия математики, механики, астрономии, физики, химии, 1957, №6, стр. 7—16.
19. Прокофьев В. А. Бесконечно малые вынужденные волны в излучающей баротропной среде. Вопросы механики, вып. 193. Сб. статей под ред. Л. Н. Сретенского. Изд-во Москов. университета, 1961, стр. 93—130.