Проблемы логики и методологии науки

УДК 165.4
DOI: 10.15372/PS20210305

В.В. Целищев, А.В. Хлебалин

О НЕЯВНОМ ИНТЕНСИОНАЛЬНОМ ПРОЧТЕНИИ ГЁДЕЛЕМ G_2[1]

В статье демонстрируется необоснованность упрощенного понимания значимости Второй теоремы о неполноте К. Гёделя как упускающего ее концептуальное содержание. Выявляется соотношение экстенсионального и интенсионального содержаний конструирования предложения G_2. Показано, что последнее связано с выбором способа формализации концепции непротиворечивости. Обосновываются преимущества интенсиональной интерпретации G_2.

Ключевые слова: интенсиональность математики; концепция непротиворечивости; неполнота; формализация

V.V. Tselishchev, A.V. Khlebalin

ON AN IMPLICIT INTENSIONAL TREATMENT OF G_2 BY GÖDEL

The article shows the groundlessness of a simplified understanding of the significance of K. Gödel's Second Incompleteness Theorem as missing its conceptual contents. The relationship between the extensional and intensional contents of constructing the G_2 sentence is revealed. It is shown that the second one is associated with the choice of a method for formalizing the concept of consistency. The advantages of the intensional interpretation of G_2 are substantiated.

Keywords: intensionality of mathematics; concept of consistency; incompleteness; formalization

В текущей литературе принято обозначение двух типов неразрешимых предложений Гёделя как G_1 и G_2. Первое относится к сконструиро-

[1] Исследования поддержаны грантом РФФИ № 19-011-00518.

ванному Гёделем неразрешимому предложению согласно его Первой теореме о неполноте, а второе – к предложению о недоказуемости непротиворечивости формальной системы арифметики средствами самой системы. Несмотря на обилие популярных и «учебных» изложений этих теорем, существует значительное количество литературы, призванной объяснить некоторые детали этого раздела метаматематики. Примером такого скрупулезного анализа в отношении G_1 является тщательное внимание к тому, как именно конструируется неразрешимое предложение. Как показал, например, П. Милн, требуется наложение весьма жестких ограничений на средства конструирования G_1, дабы оно оказалось истинным предложением, которое утверждает свою собственную неразрешимость. В противном случае мы можем получить ложные геделевы предложения [8].

Дискуссия вокруг G_2 оказалась более интенсивной, что вполне понятно, поскольку именно Вторая теорема Гёделя о неполноте привлекла наибольшее внимание своими радикальными интерпретациями. Во-первых, в русле исследовательских программ оснований математики эта теорема была провозглашена главным аргументом против знаменитой Программы Гильберта. В философских интерпретациях теоремы не было и нет недостатка, хотя в этом отношении допускаются непозволительные упрощения.

Помимо этого, история доказательства Второй теоремы оказалась интересным эпизодом, который до сих пор привлекает внимание историков математики. Хотя при упоминании знаменитых результатов Гёделя они идут как Первая и Вторая теоремы, собственно доказанной Гёделем была только первая из них, а в отношении второй он кратко заметил, что это достаточно легко сделать. Тем не менее потребовалось некоторое время, чтобы П. Бернайс сумел это сделать (в тесном сотрудничестве с самим Гёделем), и важными ингредиентами такого доказательства явились некоторые уточнения метаматематических понятий (например, условия выводимости Гильберта – Бернайса).

В философских интерпретациях Второй теоремы Гёделя часто прибегают к абсолютизации ее следствий, утверждая, что непротиворечивость любой формальной системы не может быть доказана внутри системы. На самом деле это не так. Г. Крайзель приводит примеры формальных систем, в которых доказуема их собственная непротиворечивость, замечая при этом следующее: «…С философской точки зрения интересно, что хотя в учебниках логики редко рассматриваются системы (с доказуемой внутри непротиворечивостью), такие системы хорошо, хотя и грубовато, отражают один существенный метод, используемый на практике для проверки доказательств, а именно, сравнение с уже накопленными знаниями…» [1, с. 47].

Справедливости ради следует заметить, что в последнее время внимание к таким системам оживилось. В литературе употребляется несколько названий для систем, в рамках которых может доказываться их непротиворечивость: встроенная непротиворечивость, гарантируемая непротиворечивость. Так вот, для любой стандартной формальной системы арифметики существует система со встроенной непротиворечивостью с теми же самыми теоремами в предположении непротиворечивости стандартной системы [6, p.105–138]. Еще более сильное свидетельство против упрощения смысла Второй теоремы можно найти у самого Гёделя: «Как подчеркивал сам Гёдель… его Вторая теорема о неполноте не имеет отношения ни к какой разумной постановке вопроса о непротиворечивости. Ведь если *ConF* (формула, выражающая непротиворечивость, тождественная G_2) сомнительна, то почему ее надо доказывать в F (а не в системе, несравнимой с F)? Этому взгляду Гёдель следовал и на практике» [1, с. 48].

Как недавно завил К. Фрэнкс, стратегия Гёделя в отношении доказательства Второй теоремы была концептуально гораздо сложнее, чем это представлялось ранее [5]. Данная статья в некоторой части является комментарием к такой постановке вопроса. Действительно, Вторая теорема, справедливая для некоторых формальных систем арифметики, имеет и другое измерение. Исходная конструкция предложения у Гёделя G_2 производила впечатление, что она является единственным вариантом экспликации утверждения о непротиворечивости системы, не допускающим альтернатив.

Мы имеем утверждение о непротиворечивости системы, а также имеем его формальный аналог. Содержательное понятие непротиворечивости может по-разному переводиться в формальный вид, и поначалу на это обстоятельство не обратили внимание. Только в 1960-х годах несколько исследователей отмечали, что на это, по Гёделю, само собой разумеющееся обстоятельство, следует обратить внимание [4; 7; 9]. Смысл этого состоял в том, что можно задать такую формальную экспликацию понятия непротиворечивости, экстенсионально равносильную G_2, при которой Вторая теорема окажется ложной. Различие же экспликаций определяется их смыслом, и в этом отношении в структуру доказательства Второй теоремы вкрадывается интенсиональность.

На самом деле эта проблематика широко освещена в литературе [2]. В данной статье мы хотим обратить внимание на соотношение экстенсионального и интенсионального в доказательстве Второй теоремы с несколько иной точки зрения. Предложенная С. Феферманом [4] терминология «интенсионального» часто считается вводящей в заблуждение, поскольку не очевидна связь с реальной интенсиональностью. Требуется более обоснованное обсуждение того, в каком смысле доказательство Второй теоремы является интенсиональным, но теперь уже в более общем контексте роли интенсиональности в математике.

Сама постановка вопроса о доказательстве непротиворечивости формальной системы или отсутствии такового осуществлена Гёделем в рамках арифметизации синтаксиса, когда утверждения о формальной системе переводятся в арифметические предложения. Эти последние представляют собой метаязык, и принятые в нем нормы являются метаматематическими. Статус метаматематических утверждений и соотношение их с обычной математикой имеют непосредственное отношение к новой интерпретации соотношения экстенсионального и интенсионального аспектов математики. В этом отношении есть две опции: метаматематика для определенной теории является независимой от самой теории, и ее утверждения объективны (в платонистском смысле) применительно к математическим фактам. Эта независимость проявляется в том, что истинность или ложность метаматематических утверждений определяется тем, что может доказать формальная система. Это утверждение о наличии доказательства. Например, утверждение о том, что формула φ является теоремой формальной системы S, а именно $S \vdash \varphi$, истинно именно тогда, когда в S есть доказательство φ. Но само метаматематическое утверждение не обязано быть теоремой, будучи утверждением «второго порядка» по отношению к утверждениям формальной системы. Таким образом, если у нас есть доказательство утверждения φ в S, в любой формальной системе, не обязательно в самой S, где допускается формализация утверждения $S \vdash \varphi$, оно будет истинным. Это означает независимость от конкретной формальной системы. Такая ситуация связывается с экстенсиональной трактовкой метаматематики.

Важнейшим вопросом является вопрос о том, что значит «допускается формализация утверждения $S \vdash \varphi$». Ранее уже упоминалось, что такая формализация не единственная, и, конечно, было бы желательно, чтобы эти формализации были в каком-то смысле эквивалентными. Именно в этом пункте значимую роль начинает играть интенсиональный аспект математических рассуждений. Дело в том, что вопрос об эквивалентности может рассматриваться по-разному. Эквивалентность может рассматриваться в рамках конкретной теории и в этом смысле не являться метаматематическим вопросом. В свою очередь, это обстоятельство определяется более общей постановкой вопроса, являются ли утверждения о математике частью математической теории или же они независимы от нее. Первая позиция, как видно, ассоциируется с интенсиональным аспектом, поскольку при этом учитывается контекст конкретной теории. Так, обращаясь к уже рассмотренному примеру, утверждение, что формула φ является теоремой формальной системы S, зависит от теории: это верно для теории T только в том случае, если T доказывает правильную формализацию утверждения $S \vdash \varphi$. Таким образом, интенсиональный аспект подчеркивается тем, что нужно дать трактовку «правильности».

Дискуссия вокруг интенсионального характера доказательства Второй теоремы подняла деликатный вопрос экзегетического характера, что, собственно, думал по этому поводу сам Гёдель. К. Фрэнкс утверждает, что следует отличать собственно Вторую теорему, которая гласит, что $S \nvdash ConS$ (формализация концепции непротиворечивости S), когда S непротиворечива и сильна в той же степени, что и G_2, от двух выводов из нее, которые сделал Гёдель, а именно:

1) S не доказывает свою собственную непротиворечивость;

2) никакое доказательство непротиворечивости S не может быть формализовано в S [5].

Эти вопросы вызваны в первую очередь тем, что сам Гёдель предложил определенную формулу в качестве формализации утверждения о непротиворечивости системы, в отношении которой могут быть заданы следующие вопросы: во-первых, в каком смысле предложенная Гёделем формула утверждает непротиворечивость формальной системы и, во-вторых, в каком бы смысле это ни было, откуда мы знаем, что нет других формул, которые также делают это.

С экстенсиональной точки зрения ответы на эти вопросы затруднительны, и более или менее удовлетворительный ответ достигается с интенсиональной точки зрения. Тем не менее Гёдель, придерживаясь платонизма в отношении математических сущностей и утверждений и, стало быть, независимости метаматематики от собственно математики, занял экстенсионалистскую позицию в трактовке проблемы доказуемости или недоказуемости непротиворечивости формальной системы средствами самой системы. Собственно, цель К. Фрэнкса состоит в том, чтобы показать, каким образом экстенсионализм Гёделя, подтверждаемый многими свидетельствами, сумел оказаться оправданным при столкновении с интенсиональными вызовами. Эта задача имеет много общего с уже упомянутой проблемой «минимизация следствий интенсиональности в “наилучшей и самой общей версии” Второй теоремы Гёделя», упоминавшейся выше [2]. В плане экзегетики интересен сам по себе вопрос, каким образом ликвидируются «белые пятна» в ходе концептуальной и исторической реконструкции значимых событий в науке.

Какие трудности можно усмотреть в стратегии Гёделя? Прежде всего, приняв определенную формулу в качестве формализации понятия непротиворечивости, Гёделю нужно показать, что все другие формализации эквивалентны его формализации и что этот факт должен быть доказан в S. Но именно это сделать затруднительно с точки зрения экстенсионалиста, согласно которому различные способы утверждения непротиворечивости S эквивалентны независимо от того, доказывает ли S такие эквивалентности. Другими словами, экстенсионалисту не нужна доказуемость эквивалентности. Как было ранее указано, Мостовский, Россер, Феферман построили формулы, аналогичные $ConS$, которые фактически доказуемы в S. Их аналогия с геделевской $ConS$ заключается в том, что они «нумерически правильны» (в конструировании формального вывода) в том же смысле, что и $ConS$. Сам Гёдель, очевидно, полагал, что нумерического критерия будет достаточно. Но как оказалось, нужен другой критерий, который вобрал бы в себя все допустимые «правильные» формализации понятия непротиворечивости. Однако трудно вобрать в одно понятие все оттенки смысла понятия непротиворечивости в рамках общей теории формализации смысла лингвистических выражений.

При экстенсиональном прочтении второй гёделевский вывод проблематичен в силу следующих причин. Если есть несколько способов «правильной» формализации понятия непротиворечивости, существуют два варианта, при которых проходит решение Гёделя о приемлемости именно его конструкции. Должно быть объяснение того, почему все эти «правильные» формализации в конечном счете имеют ту форму, которую сконструировал Гёдель. Другими словами, почему G_2 «универсально правильная». Другой стороной проблемы является то, почему G_2, даже обладая некоторой общностью, исключает возможность формализации непротиворечивости каким-либо другим способом. Таким образом, проблема сводится к демонстрации того, что G_2 является единственной «правильной» формализацией и что G_2 специфична в исключении других возможностей.

С экстенсионалистской точки зрения, которая подразумевается в решении этой проблемы, объяснение подобного рода предполагает условия выводимости Гильберта – Бернайса. Нельзя сказать, что эти условия имеют характер ad hoc для поддержки позиции Гёделя, поскольку они достаточно естественны. С другой стороны, одно из условий, как известно, носит откровенно метаматематический характер: если доказуемо утверждение F, то доказуемо, что доказуемо F. Такие эпистемически спорные утверждения не добавляют уверенности в плодотворности экстенсионального подхода к единственности гёделевской формализации непротиворечивости.

В этом отношении радикальным решением является интенсиональный подход, при котором поиск такой формализации всегда соотносится с конкретной теорией и, значит, поиск универсальной формализации непротиворечивости отпадает. Существуют только различные понятия, связанные с отдельными теориями. В этом случае метаматематика включена в общий математический дискурс, не будучи выделенной областью с независимыми объектами. Важность конкретной теории в данном случае заключается в том, что формализация понятия непротиворечивости здесь делается в рамках этой теории и не претендует на общность для всех формальных систем.

Таким образом, интенсиональность понимается в данном случае как релятивизация к конкретному языку. Этот смысл термина «интенсиональный аспект» несколько отличен от традиционного понимания. Какова может быть связь нового словоупотребления с G_2? Д. Ауэрбах настаивает на том, что феномен интенсиональности в доказательстве Второй теоремы возникает при переводе обычного математического дискурса в формальный язык метаматематики [3]. Это означает, что мы имеем дело с некоторого рода лингвистическими проблемами схватывания содержательных утверждений формальными структурами. Сама постановка вопроса о том, что значит доказать в теории S ее собственную непротиворечивость, взывает к вопросу, что значит признать соответствующую формулу выражением концепции непротиворечивости. Другими словами, смысл непротиворечивости понятен в контексте конкретной теории, и адекватность перевода этой концепции в формальный вид должна быть предметом демонстрации в этой теории S. Именно учет этого смысла придает интенсиональный характер дискурсу.

По сравнению с экстенсиональным подходом здесь нет трудностей в обеспечении общности, которая заботила Гёделя. Его задача состояла в том, чтобы показать невозможность доказательства системой своей непротиворечивости для конкретной системы, а потому показать общность этого результата, распространяя его на целый класс систем. Интенсиональный подход избавляет от второй части этой задачи. И тем не менее при интенсиональном подходе вполне допустимо распространение общности результата о недоказуемости собственной непротиворечивости системы на другие системы. Фактически это означает сближение экстенсионального и интенсинального подходов. Такая стратегия К. Фрэнкса, в силу ее оригинальности в трактовке результата Гёделя, заслуживает иллюстрации.

Фрэнкс сравнивает две формулы непротиворечивости: обычную *ConS* и *CFConS*. Вторая из них есть формула, выражающая, что в системе секвенций Генцена с устранением сечения не существует доказательства $\perp$ в *S*. «Если предположить, что теорема Генцена об устранении сечения применима к *S*, тогда эти формулы экстенсионально эквивалентны. Однако *S* все еще может быть слишком слабой, чтобы доказать формализованную версию теоремы Генцена, и по этой причине не докажет их эквивалентности. Следовательно, они фактически не эквивалентны с точки зрения этой теории и, говоря интенсионально, не могут выражать одно и то же. Самое большее, только одна из этих формул может быть интенсионально корректной для *S*» [5, p. 9].

Раз не проходит доказательство эквивалентности, то остается только одна версия доказательства, поскольку система не может различить их. Если проходит одна лишь интенсиональная версия недоказуемости непротиворечивости, тогда любое утверждение о доказуемости непротиворечивости оказывается интенсионально некорректным. Именно это обстоятельство Фрэнкс считает положенным в основу геделевского результата, и именно оно снимает, по крайней мере, понимание того, почему проблемный экстенсионализм Гёделя вполне сочетается с менее проблематичным интенсионализмом.

С интенсиональной точки зрения второй геделевский вывод совпадает с первым. Причина в том, что если рассматривать формализацию доказательства непротиворечивости *S* интенсионально, то нет никакого разумного способа действовать иначе, чем доказывая в *S* правильную формализацию утверждения $S \nvdash \perp$. Более того, понятие «подходящести» здесь должно быть таким же, как и при анализе первого геделевского вывода. Ибо если S доказывает формулу φ, которую она не признает своим собственным утверждением о непротиворечивости, и нужно проверить такое утверждение в более богатой системе, чем S, то с интенсиональной точки зрения никакое доказательство непротиворечивости S не было формализовано в S. В частности, интерпретация φ как утверждение непротиворечивости S не была формализована. Поскольку этот решающий шаг должен быть осуществлен в некоторой теории, более сильной, чем S, только в этой более сильной теории формализовано все доказательство непротиворечивости. Таким образом, второй геделевский вывод, как и первый, оправдан и фактически тривиален, как только недоказуемость в S интенсионально правильного утверждения непротиворечивости доказана.

Если трактовать G_2 интенсионально, тогда становится понятно, почему уверенность Гёделя в том, что она говорит о собственной недоказуемости, оправданна, даже если это оправдывается соображениями «наилучшей и самой общей версии» G_2. Действительно, поскольку не может быть нескольких формализаций непротиворечивости S, которые интенсионально правильны в S, но недоказуемо эквивалентны в S, недоказуемости одной такой формулы достаточно, чтобы гарантировать неспособность S доказать свою собственную непротиворечивость. Это последнее обстоятельство делает соображения Гёделя неопровержимыми. Но тогда надо признать почти сверхъестественные способности предвидения у Гёделя, который «шестым чувством» знал о предпочтительности интенсиональной трактовки G_2. (Подтверждений этой способности Гёделя много, и одно из них можно привести здесь. Я. Хинтикка в 1975 г. говорил одному из авторов данной статьи, что при разговоре с Гёделем о совсем новой проблеме у него создалось впечатление, что Гёдель уже знал о ней и готов был к ее разрешению.)

В продолжение разговора об окончательной неясности, какую же именно интерпретацию G_2 предпочитал сам Гёдель, следует сказать, что он мог предвидеть «сбой» в экстенсиональной интерпретации, которая делала некоторые G_2 ложными. Ко времени работы Гёделя не могло быть ясной постановки проблемы о том, имеет ли одна интерпретация преимущества перед другой, и интуитивно, как уже говорилось, Гёдель выбрал интенсиональную интерпретацию из прагматических соображений, поскольку экстенсиональная интерпретация была бы контрпримером. Но он избегнул каких-либо уточнений по этому поводу и в дальнейшем, кроме косвенного «оправдания» в виде опять-таки «наилучшей и самой общей версии» G_2.

Литература

1. *Крайзель Г.* Биография Курта Геделя. – М.: URSS, 2003.

2. *Целищев В.В., Хлебалин А.В.* Минимизация следствий интенсиональности в «наилучшей и самой общей версии» Второй теоремы Гёделя // Философия науки. – 2019. – № 1 (80). – С. 58–69.

3. *Auerbach D.* Intensionality and Gödel theorems // Philosophical Studies. – 1985. – Vol. 48, No. 3. – P. 337–351.

4. *Feferman S.* Arithmetization of metamathematics in general setting // Fundamenta Mathematicae. – 1960. – Vol. 49. – P. 35–92.

5. *Franks C.* On Gödelian Inferences. – URL: https://www3.nd.edu/~cfranks/franksgoedelHPL.pdf (дата обращения 16.08.2021).

6. *Franks C.* The Autonomy of Mathematical Knowledge: Hilbert's Program Revisited. – Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

7. *Kreisel G.* Mathematical significance of consistency proofs // Journal of Symbolic Logic. – 1958. – No. 23. – P. 159–182.

8. *Milne P.* On Gödel sentences and what they say // Philosophia Mathematica. – 2007. – Vol. 15, No. 3. – P. 103–226.

9. *Mostowski A.* The incompleteness of arithmetic // Mostowski A. Thirty Years of Foundational Studies. – N.Y.: Barnes and Noble, 1966. – P. 18–26.

References

1. *Kreisel, G.* (2003). Biografiya Kurta Gedela [Biography of Kurt Gödel]. Moscow, URSS Publ. (In Russ.).

2. *Tselishchev, V.V. & A.V. Khlebalin.* (2019). Minimizatsiya sledstviy intensionalnosti v "nailuchshey i samoy obshchey versii" Vtoroy Teoremy Gedela [Minimizing the consequences of intensionality in the "best and most general version" of Gödel's Second Theorem]. Filosofiya nauki [Philosophy of Science], 1 (80), 58–69.

3. *Auerbach, D.* (1985). Intensionality and Gödel theorems. Philosophical Studies, Vol. 48, No. 3, 337–351.

4. *Feferman, S.* (1960). Arithmetization of metamathematics in general setting. Fundamenta Mathematicae, 49, 35–92.

5. *Franks, C.* On Gödelian Inferences. Available at: https://www3.nd.edu/~cfranks/franksgoedelHPL.pdf (date of access:16.08.2021).

6. *Franks, C.* (2009). The Autonomy of Mathematical Knowledge: Hilbert's Program Revisited. Cambridge, Cambridge University Press.

7. *Kreisel, G.* (1958). Mathematical significance of consistency proofs. Journal of Symbolic Logic, 23, 159–182.

8. *Milne, P.* (2007). On Gödel sentences and what they say. Philosophia Mathematica, Vol. 15, No. 3, 103–226.

9. *Mostowski, A.* (1966). The incompleteness of arithmetic. In: Mostowski, A. Thirty Years of Foundational Studies. New York, Barnes and Noble, 18–26.

Информация об авторах

Целищев Виталий Валентинович – доктор философских наук, профессор, кафедра гносеологии и истории философии Новосибирского национального исследовательского государственного университета (630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2); научный руководитель Института философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8).
leitval@gmail.com

Хлебалин Александр Валерьевич – кандидат философских наук, старший научный сотрудник Института философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8).
sasha_khl@mail.ru

Information about the authors

Tselishchev Vitaliy Valentinovich – Doctor of Sciences (Philosophy), Professor, the Department of Gnoseology and History of Philosophy at Novosibirsk National Research State University (2, Pirogov st., Novosibirsk, 630090, Russia); Scientific Director at the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090, Russia).
leitval@gmail.com

Khlebalin Aleksandr Valerievich – Candidate of Sciences (Philosophy), Researcher at the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Akademy of Sciences (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090 Russia).
sasha_khl@mail.ru

Дата поступления 24.02.2021