

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В КРЕСТООБРАЗНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

В. И. Ерофеев, И. Д. Конюхова, В. М. Родюшкин
(Горький)

В задачах вибродиагностики упругих конструкций часто бывает важно знать тип колебаний того или иного элемента конструкции. При распространении вибраций в сложных разветвленных конструкциях наблюдается трансформация типов колебаний, и удаленный от источника вибраций элемент может совершать тип колебаний, отличный от того, который запитывает источник.

Распространенные элементы упругих конструкций — стержни и пластины, поэтому в теории традиционно уделяется большое внимание изучению распространения вибраций в стержневых и пластиночных конструкциях [1—3]. Однако стержни и пластины, как правило, изучаются в приближении технической теории, что, естественно, ограничивает частотный диапазон применимости этих моделей.

В данной работе проводятся теоретические и экспериментальные исследования прохождения продольных и изгибных волн через крестообразное соединение стержней. Расчет проведен по неклассическим стержневым моделям [4]. Это позволило изучать волновые процессы в упругой конструкции не только в низкочастотном диапазоне, но и в области частот, при которых длины распространяющихся волн становятся сравнимыми с поперечными размерами стержней.

1. Рассматривается жесткое крестообразное соединение четырех стержней (рис. 1). Распространение продольных и изгибных волн в каждом из стержней описывается уравнениями уточненной теории [4]

$$\begin{aligned}\rho_j S_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - E_j S_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} - \rho_j v_j^2 I_{0j} \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_j^2 \partial t^2} &= 0, \\ \rho_j S_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2} + E_j I_j \frac{\partial^4 w_j}{\partial x_j^4} - \rho_j I_j \frac{\partial^4 w_j}{\partial x_j^2 \partial t^2} &= 0,\end{aligned}$$

где $j = 1, \dots, 4$ — номер стержня; $u(x, t)$, $w(x, t)$ — продольные и поперечные перемещения частиц стержней; ρ , S , E — объемные плотность, площадь поперечных сечений и модуль Юнга; I , I_0 — осевой и полярный моменты инерции.

В этом приближении продольные волны обладают слабой высокочастотной дисперсией, описываемой выражением

$$q_j = \pm \frac{w}{c_j} \left(1 - \frac{v_j^2 R_j^2}{c_j^2} \omega^2 \right)^{-1/2}.$$

Дисперсия изгибных волн определяется соотношением

$$k_j = \pm \left[\frac{\omega^2}{2c_j^2} \pm \left(\frac{\omega^4}{4c_j^4} + \frac{\omega^2}{c_j^2 r_j^2} \right)^{1/2} \right]^{1/2}.$$

Здесь ω — круговая частота; q_j , k_j — волновые числа продольных и изгибных волн; $c = (E/\rho)^{1/2}$ — стержневая скорость; $r = (I/S)^{1/2}$, $R = (I_0/S)^{1/2}$ — осевой и полярный радиусы и инерции.

В месте соединения стержней ($x_j = 0$) должны выполняться следующие краевые условия:

$$\begin{aligned}w_1 - u_4 &= 0, w_4 - u_3 = 0, w_2 + u_3 = 0, \\ u_1 + u_3 &= 0, w_3 + u_4 = 0, u_2 + u_4 = 0\end{aligned}$$

— непрерывности перемещений;

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} - \frac{\partial w_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_1} - \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_1} - \frac{\partial w_4}{\partial x_4} = 0$$

— непрерывности углов поворота поперечных сечений при изгибе;

$$\begin{aligned}
 & E_1 I_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3} - \rho_1 I_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1 \partial t^2} + E_2 S_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \rho_2 v_2^2 I_{02} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \partial t^2} - E_3 I_3 \frac{\partial^3 w_3}{\partial x_3^3} + \\
 & + \rho_3 I_3 \frac{\partial^3 w_3}{\partial x_3 \partial t^2} - E_4 S_4 \frac{\partial u_4}{\partial x_4} + \rho_4 v_4^2 I_{04} \frac{\partial^3 u_4}{\partial x_4 \partial t^2} = 0, \\
 & - E_1 S_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \rho_1 v_1^2 I_{01} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial t^2} + E_2 I_2 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3} - \rho_2 I_2 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2 \partial t^2} + E_3 S_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \\
 & - \rho_3 v_3^2 I_{03} \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3 \partial t^2} - E_4 I_4 \frac{\partial^3 w_4}{\partial x_4^3} + \rho_4 I_4 \frac{\partial^3 w_4}{\partial x_4 \partial t^2} = 0
 \end{aligned}$$

— баланса перерезывающих и продольных сил на границе;

$$E_1 I_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + E_2 I_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} + E_3 I_3 \frac{\partial^2 w_3}{\partial x_3^2} + E_4 I_4 \frac{\partial^2 w_4}{\partial x_4^2} = 0$$

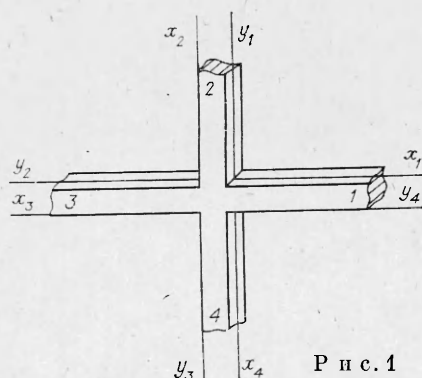
— баланса изгибающих моментов на границе.

Если в стержне 1 возбуждена изгибная (или продольная) волна, падающая на соединение, то в стержнях 2—4 могут возникнуть прошедшие волны: изгибные и продольные, а в стержне 1 — отраженные волны обоих типов.

Методом обобщенных динамических жесткостей [2] получены аналитические выражения для коэффициентов отражения и прохождения энергии в каждом из стержней соединения при возбуждении в стержне 1 продольной или изгибной волны. Эти выражения в силу их громоздкости не приводятся. Для анализа полученных выражений использовался численный расчет на ЭВМ ЕС М4030. Расчеты проводились для стержней из оргстекла прямоугольного поперечного сечения площадью $S = 5 \times 2,5$ см.

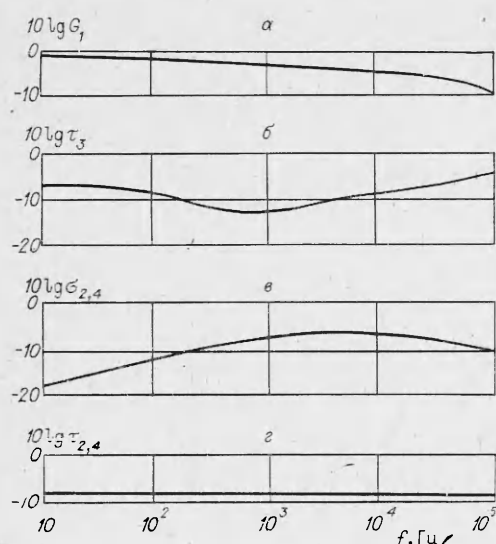
На рис. 2 приведены частотные характеристики коэффициентов отражения и прохождения энергии для случая, когда в стержне 1 возбуждалась изгибная волна (G_1 — коэффициент отражения энергии в стержень 1 в виде изгибной волны, τ_m, σ_m — коэффициенты прохождения энергии в m -й стержень в виде изгибной и продольной волн соответственно ($m = 2, 3, 4$)). Легко видеть, что в диапазоне частот от 10 Гц до 5 кГц отсутствуют трансформация типов волн и прохождение волн через соединение. Большая часть энергии падающей волны отражается в первый стержень в виде изгибной же волны. При дальнейшем росте частоты увеличиваются доля энергии прошедших волн и трансформация изгибных волн в продольные для боковых стержней.

2. Для экспериментальных исследований распространения вибраций в стержневых системах использован корреляционный метод определения симметричности колебаний. На рис. 3 приведена блок-схема установки

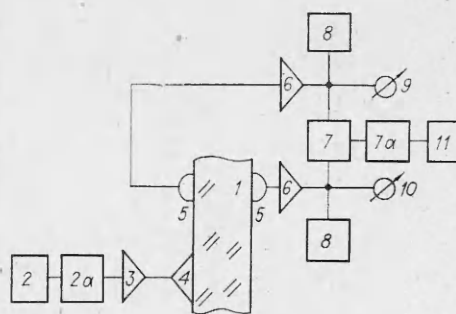


Р и с. 1

для измерения статистических характеристик. Здесь 1 — элемент конструкции, 2 — генератор шума, 3 — усилитель мощности, 4 — излучатель, 5 — акселерометр, 6 — усилитель, 7 — коррелометр, 8 — осциллограф, 9, 10 — вольтметры, 11 — самописец, 2а — набор фильтров, 7а — делитель. Один из стержней возбуждался пьезокерамической пластиной, записываемой электрическим сигналом с генератора шума. Средняя частота спектра случайных колебаний 10 кГц, полуширина его 1 кГц. Пьезокерамическая пластина располагалась либо на торце стержня



Р и с. 2

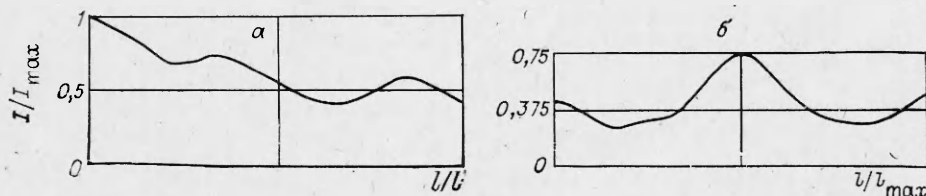


Р и с. 3

(в первичном стержне возбуждались в основном продольные колебания), либо на верхней его грани (возбуждались в основном изгибные колебания). Приемные акселерометры располагались симметрично на верхней и нижней грани в разных сечениях первич-

ного и вторичных стержней. С помощью коррелометра Х6-4 измерялась взаимная корреляционная функция сигналов обоих акселерометров. При симметричных (продольных) колебаниях, когда смещения в точках приема синфазны, максимум взаимной корреляционной функции положителен, при антисимметричных (изгибных) колебаниях — отрицателен.

Исследования показали, что в узлах соединения стержней продольные колебания трансформируются в изгибные, первичные же изгибные волны при прохождении узла остаются изгибными — трансформация в продольную волну незначительна.



Р и с. 4

С помощью коррелометра измерялась также автокорреляционная функция, по которой судили о распределении интенсивности вибраций I в элементах соединения. На рис. 4 представлено распределение интенсивности вибраций по длине: a — возбуждаемая сторона конструкции (стержни 1 и 3); b — невозбуждаемая сторона (стержни 2 и 4). Экспериментальное распределение интенсивности сравнивалось с теоретически рассчитанными для частоты 10 кГц (см. таблицу). Сравнение показывает, что теоретический расчет согласуется с экспериментом.

В заключение заметим, что в данной работе теоретические расчеты проводились по линейной математической модели. При этом продольные и изгибные волны распространялись в стержнях независимо и трансформация типов волн происходила лишь при их прохождении через соедине-

Номер стержня	$I \cdot 100\% / I_{\max}$		Номер стержня	$I \cdot 100\% / I_{\max}$	
	Теория	Эксперимент		Теория	Эксперимент
1	24,5	30	3	19,5	26
2	28	22,5	4	28	22,5

ние. Однако наличие упругой нелинейности в материале может привести к взаимодействию продольных и изгибных волн уже на прямолинейном участке стержня [5]. Наличие некоторых количественных расхождений теоретического расчета с экспериментом можно объяснить, в частности, этим фактором.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никифоров А. С., Будрин С. В. Распространение и поглощение звуковой вибрации на судах.— Л.: Судостроение, 1968.
2. Артоболевский И. И., Бобровицкий Ю. И., Генкин М. Д. Введение в акустическую динамику машин.— М.: Наука, 1979.
3. Михайлова Е. В. Асимптотический анализ продольных и изгибных волн, распространяющихся в системе из двух пластин, скрепленных под углом // ПМТФ.— 1982.— № 5.
4. Григолюк Э. П., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек.— М.: ВИНТИ, 1973.
5. Ерофеев В. П., Потанов А. И. Параметрическая трансформация продольных волн в изгибные в тонких стержнях // Волны и дифракция.— М.: ИРЭ АН СССР, 1981.— Т. 2.

Поступила 6/II 1986 г.

УДК 539.3

АСИМПТОТИКА СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ. ФОРМУЛИРОВКА УКРОЧЕННОЙ ЗАДАЧИ

В. М. Корнев, А. О. Мулькибаев

(Новосибирск)

При применении асимптотического метода [1—3] к расчету собственных колебаний прямоугольных пластин не принимается во внимание краевой эффект в угловых точках. Ниже показано, как уточнить построение асимптотики с учетом угловых пограничных слоев [4, 5]. Поскольку изменяемость основной части решения и краевого эффекта имеет одинаковый порядок, отсутствует возможность записать краевые условия исходной задачи [1—3] в каноническом виде [6], и поэтому используется метод исключения [7, 8].

Исходная задача о свободных колебаниях защемленной прямоугольной пластины разбивается на две задачи меньшего порядка. Первая описывает осциллирующую основную часть решения, вторая рассматривается как задача о возмущении, где малый параметр связывался с большим собственным значением.

Постановка укороченной задачи позволяет сводить исследование асимптотики собственных функций и собственных значений исходной задачи к изучению собственных функций и собственных значений укороченной задачи, которая имеет меньший порядок.

1. Постановка задачи. Асимптотические разложения. В прямоугольной области $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ рассматривается асимптотика собственных форм и частот колебаний защемленной пластины постоянной толщины

$$(1.1) \quad \Delta \Delta w(x, y) - \omega^2 k^2 w(x, y) = 0,$$

где $w(x, y)$ — нормальный прогиб; ω — собственная частота колебаний; $k^2 = \rho h/D$; h — толщина пластины; ρ — удельная масса; D — цилиндрическая жесткость. Краевые условия

$$(1.2) \quad w|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_{\Gamma} = 0.$$

Уравнение (1.1) имеет представление

$$(\Delta + \omega k)(\varepsilon^2 \Delta - k)w(x, y) = 0, \quad \varepsilon^2 = \omega^{-1}.$$

Пусть $\omega \gg 1$, тогда $\varepsilon \ll 1$. Допустим, что $w(x, y) = u(x, y) + v(x, y)$,