Физика горения и взрыва

1

1968 г.

ОБ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УДАРНЫХ ВОЛН

А. С. Плешанов

(Москва)

Устойчивость ударных волн по отношению к периодическим возмущениям вдоль поверхности разрыва была впервые рассмотрена в [1], где в зависимости от величины параметра $\varphi = j^2\ (\partial V/\partial p)_H$ были получены области абсолютной неустойчивости, в которых возмущения экспоненциально растут со временем, убывая экспоненциально же с удалением от поверхности разрыва; область абсолютной устойчивости, в которой возмущения убывают и со временем, и с удалением от разрыва; область так называемой возможности спонтанного излучения звука, в которой амплитуды возмущений постоянны (j — плотность потока массы; p — давление; V — удельный объем; индекс H означает, что производная берется вдоль адиабаты Гюгонио). В работах [2] и [3] левая граница области возможности спонтанного излучения звука была исправлена. В [4] было высказано предположение, что «неустойчивость ударных волн может иметь место лишь при некоторых весьма специальных формах ударной адиабаты, которые практически, по-видимому, не осуществляются в природе».

Представляет интерес получение общего термодинамического критерия, выполнение которого независимо от условий до скачка достаточно для абсолютной устойчивости ударных волн. Для этого параметр φ нужно связать с термодинамическими характеристиками среды. Условия непрерывности на скачке возмущенных потоков массы, импульса и энергии, эквивалентные условиям [1], имеют вид

$$\left.\begin{aligned} v\,\delta\rho + \rho\left(\delta v - \frac{\partial\eta}{\partial t}\right) &= -\rho_0\frac{\partial\eta}{\partial t},\\ \delta p + v^2\delta\rho + 2j\,\delta v &= 0,\\ \delta w + v\left(\delta v - \frac{\partial\eta}{\partial t}\right) &= -v_0\frac{\partial\eta}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где v — скорость, нормальная к скачку; ρ — плотность; w — энтальпия; η — возмущение поверхности разрыва; δ — возмущение; индекс 0 — относится к состоянию до скачка. Если обозначить энтропийно-вихревые и звуковые возмущения индексами (1) и (2) соответственно, то, согласно [1], имеют место соотношения

$$\begin{gathered} \delta p = \delta p^{(2)} = a_s^2\,\delta\rho^{(2)},\\ \delta w = \delta w^{(1)} + \delta w^{(2)} = T\left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_p \delta V^{(1)} + V\,\delta p^{(2)}, \end{gathered} \tag{2}$$

где T — температура; s — энтропия; a_s — адиабатическая скорость звука. Комбинация (1) дает, в частности, возмущенную форму адиабаты Гюгонио

$$\delta w = \frac{1}{2} (V + V_0)\, \delta p + \frac{1}{2} (p - p_0)\, \delta V. \qquad (3)$$

Подстановка (2) в (3) дает искомый результат

$$\varphi = (1 - M^2) \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} M^2 (\varkappa - 1)\, \lambda\right]^{-1} - 1, \qquad (4)$$

где $\gamma = C_p / C_v$ — отношение теплоемкостей; $M = v / a_s < 1$ — число Маха; $\varkappa = v_0/v > 1$, а

$$\lambda = a_s^2 \left[(\gamma - 1)\, T \left(\frac{\partial s}{\partial \ln V}\right)_p\right]^{-1} = \frac{K_1}{\sqrt{K_2}};$$

$$K_1 = a_s \Big/ \sqrt{\gamma \frac{R}{\mu} T}; \quad K_2 = (C_p - C_v) / R. \qquad (5)$$

Из общих неравенств химической термодинамики для газов, подчиняющихся уравнению Клапейрона, следует $K_1 < 1$ и, если $(\partial \mu / \partial T)_v < < 0$, то $K_2 > 1$ [5] (μ — молекулярный вес; R — универсальная газовая постоянная).

Разность между левой границей области возможности спонтанного излучения звука [2, 3]

$$\varphi_* = \frac{1 - M^2 (\varkappa + 1)}{1 + M^2 (\varkappa - 1)}$$

и действительным значением φ равна

$$\varphi_* - \varphi = \frac{(1 - M^2)\, [1 + (\gamma - 1)\, \lambda]}{[1 + M^2 (\varkappa - 1)] \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} M^2 (\varkappa - 1)\, \lambda\right]} \cdot \frac{p_0 + \nu p}{\rho a_s^2}, \qquad (6)$$

где

$$\nu = \frac{a_s^2}{p V} [1 + (\gamma - 1)\, \lambda]^{-1} - 1 = \left(\frac{\partial \ln p V / T}{\partial \ln T / V}\right)_s = (1 - \sigma)^{-1} - 1;$$

$$\sigma = \left(\frac{\partial \ln p V / T}{\partial \ln p}\right)_s, \qquad (7)$$

pV/T — фактор сжимаемости. При выводе (4), (5) и (7) используются известные термодинамические соотношения [6]; при выводе (6) — непрерывность потока импульса на скачке. Из (6) следует основной результат: для абсолютной устойчивости ударных волн в произвольных средах независимо от состояния до скачка достаточно, чтобы $\sigma \geqslant 0$, т. е. фактор сжимаемости среды в адиабатных условиях должен быть неубывающей функцией давления[1]. Для этого, как видно из (7), необходимо, чтобы имело место неравенство $a_s > a^* = \sqrt{pV}$, т. е. равновесная адиабатическая скорость звука должна быть больше замороженной

[1] Предполагается, что адиабата Гюгонио не содержит точек, где $(\partial p / \partial V)_H = 0$. Тогда $1 - \frac{\gamma - 1}{2} M^2 (\varkappa - 1)\, \lambda > 0$, и знак $\varphi_* - \varphi$ определяется знаком $p_0 + \nu p$.

изотермической скорости звука (знак $*$ относится к замороженным характеристикам). Для газа, подчиняющегося уравнению Клапейрона $pV/T=R/\mu$, условие $\sigma\geqslant 0$, очевидно, эквивалентно требованию, чтобы при адиабатном сжатии молекулярный вес не возрастал. Этому требованию тривиальным образом удовлетворяет газ, в котором происходят реакции без изменения общего числа частиц (в частности, газ из химически одинаковых, но различно возбужденных частиц, а в вырожденном случае — классический идеальный газ). Произвольно реагирующие газы, например воздух ($1000\leqslant T\leqslant 20000$ °К, $10^{-3}\leqslant p\leqslant 10^{3}$ *атм*), углекислый газ ($1000\leqslant T\leqslant 12000$, $10^{-2}\leqslant p\leqslant 10^{3}$), азот ($1000\leqslant T\leqslant 12000$°К $10^{-4}\leqslant p\leqslant 10^{3}$ *атм*), подчиняющиеся уравнению Клапейрона, в согласии с [4] с большой степенью вероятности удовлетворяют полученному условию. Соответствующие простые расчеты ν для температуры через 1000° К и для давления через порядок были выполнены по данным [7—10]. Отметим, что при $T_0=\mathrm{const}$, $p=\mathrm{const}$ и растущем T величина φ, т. е. безразмерный наклон адиабаты Гюгонио, периодически меняет знак.

Учет взаимодействия между нейтральными частицами (силы Ван-дер-Ваальса) при замороженных реакциях осуществляется на основе уравнения состояния типа уравнения Ван-дер-Ваальса [6]

$$\left[1+\frac{(N/V)^2\,a}{p}\right]\left(1-\frac{Nb}{V}\right)-\frac{NRT}{pV}\equiv(1+\alpha)\,(1-\beta)-\tau=0$$

($N=\mu^{-1}$ — общее число молей на единицу массы; $a>0$ — силовая постоянная; $b>0$ — коволюм) и соответствующей адиабаты

$$(V-Nb)\,T^{C_v^*/R}=\mathrm{const}.$$

Вычисляя σ, получим

$$\sigma=\left[(\beta-\alpha+2\alpha\beta)\,C_v^*/R+\alpha\right]\left[(1-\alpha+2\alpha\beta)\,C_v^*/R+1+\alpha\right]^{-1}, \qquad (8)$$

откуда следует, что при слабом взаимодействии выше точки Бойля $\sigma>0$, т. е. это взаимодействие является фактором, повышающим абсолютную устойчивость ударных волн.

Учет взаимодействия между заряженными частицами (кулоновское взаимодействие) при замороженных реакциях осуществляется на основе уравнения состояния в приближении Дебая-Хюккеля [6]

$$\frac{NRT}{pV}-\frac{1}{3}\,\frac{e^3}{pV}\sqrt{\frac{\pi}{VRT}}\left(\sum_i N_i z_i^2\right)^{3/2}-1\equiv\tau-\varepsilon-1=0,$$

где e — заряд электрона; N_i — число молей компоненты сорта i на единицу массы; z_i — заряд в e и адиабаты.

$$s=s_{\text{ид}}-\frac{pV}{T}\,\varepsilon=\mathrm{const}.$$

Вычисляя σ, получим

$$\sigma=\left[1+\frac{2}{3-C_v^*/R}\left(\frac{2}{\tau}+\frac{C_p^*/R}{\varepsilon}\right)\right]^{-1}\approx\frac{3R-C_v^*}{2C_p^*}\,\varepsilon. \qquad (9)$$

Это выражение положительно ввиду $C_v^* < 3R$, так что кулоновское взаимодействие также является фактором, повышающим абсолютную устойчивость ударных волн.

Учет конденсации в простейшем случае одной компоненты, когда $C_p = \infty$, дает

$$\nu = \frac{a_s / \sqrt{pV}}{1 + a_s / \sqrt{C_v T}} - 1.$$

Скорость звука находится из выражения [4]:

$$(V / a_s)^2 = x_1 (V_1 / a_{s1})^2 + x_2 (V_2 / a_{s2})^2,$$

где $V = x_1 V_1 + x_2 V_2$; x — массовая доля ($x_1 + x_2 = 1$); индексы 1, 2 относятся к конденсату и газу соответственно, а $a_{s1} = \frac{V_1}{V_2} \frac{q}{\sqrt{C_1 T}}$; $a_{s2} = \sqrt{pV_2}\left(1 - \frac{2}{\chi} + \frac{C_{p2}/R}{\chi^2}\right)^{-1/2}$; $C_v = \frac{R}{\mu}\left[x_1 \frac{C_1}{R} + x_2\left(\frac{C_{p2}}{R}\chi - 2\chi + \chi^2\right)\right]$, (здесь q — скрытая теплота перехода из фазы 1 в фазу 2, $\chi = \mu q / RT$). Для чистых фаз предельные значения ν равны

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{V_2 C_1}{V_1 R}}\left(1 + \sqrt{\frac{V_2}{V_1}}\,\frac{C_1/R}{\chi}\right)^{-1} - 1,$$

$$\nu_2 = \frac{\chi(\chi^2 - 2\chi + C_{p2}/R)^{1/2}}{\chi^2 - \chi + C_{p2}/R} - 1. \quad (10)$$

Из (10) следует, что $\nu_2 \leqslant 0$, т. е. мощные ударные волны неустойчивы в гетерогенных однокомпонентных средах с малым содержанием конденсата[1].

В гетерогенных средах при наличии хотя бы одной неконденсирующейся компоненты величина $\sigma < 0$ при достаточно малом содержании газовой фазы. В самом деле, в простейшем случае двух компонент, из которых одна может конденсироваться, а другая — нет, для σ, аналогично [4], получим

$$\sigma = \left(\frac{q_1}{C_p^* T}\,y - 1\right)\left[\frac{p - \pi_1}{\pi_1} + \frac{C_p^*}{R}\left(\frac{q_1}{C_p^* T}\right)^2 y\right]^{-1}, \quad (11)$$

где q_1 — скрытая теплота перехода первой компоненты из конденсата в газ; π_1 — давление насыщенного пара этой компоненты; y — объемная доля газовой фазы. Из (11) следует, что при малом содержании газовой фазы имеет место $\sigma < 0$, т. е. мощные ударные волны неустойчивы в гетерогенных многокомпонентных средах.

Из изложенного выше можно сделать вывод о том, что ударные волны в реальных средах могут быть неустойчивы не в реагирующих

---

[1] Знаки выражений в скобках в (10) положительны. Действительно: $\chi^2 - \chi + C_{p2}/R > \chi^2 - 2\chi + C_{p2}/R = (\chi - 1)^2 + C_{v2}/R > 0$.

газах, как это предполагалось в [1], а в гетерогенных средах. Теоретически неустойчивость возможна и в реагирующих газах, но, как показывают численные расчеты, она маловероятна.

Поступила в редакцию
22/III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Дьяков. ЖЭТФ, 1954, **27**, 3, 288.
2. С. В. Иорданский. ПММ, 1957, **21**, 4, 465.
3. В. М. Конторович. ЖЭТФ, 1957, **33**, 6, 1525.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
5. А. С. Плешанов. Докл. АН СССР, 1961, **140**, 6, 1372.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Статистическая физика. М., Изд-во «Наука», 1964.
7. А. С. Предводителев и др. Таблицы термодинамических функций воздуха для температур от 200 до 6000°К и давлений от 10^{-5} до 10^{2} *атм.* М., Изд-во Вычисл. центра АН СССР, 1962.
8. А. С. Предводителев и др. Таблицы термодинамических функций воздуха для температур от 6000 до 12000°К и давлений от 10^{-3} до 10^{3} *атм.* М., Изд-во АН СССР, 1957.
9. А. С. Предводителев и др. Таблицы термодинамических функций воздуха для температур от 12000 до 20000°К и давлений от 10^{-3} до 10^{3} *атм.* М., Изд-во АН СССР, 1959.
10. Физическая газодинамика, теплообмен и термодинамика газов высоких температур. Сб. М., Изд-во АН СССР, 1962.