УДК 532.5: 533.6

РАСЧЕТ ДАВЛЕНИЯ НА КОНТУР В РЕЖИМЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ

Д. Н. Горелов

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 644099 Омск
E-mail: gorelov@ofim.oscsbras.ru

В рамках модели плоского нестационарного движения идеальной несжимаемой жидкости получены простые формулы для расчета давления и суммарных гидродинамических реакций, действующих на контур при его произвольном движении. С контура могут сходить несколько вихревых следов, обусловленных изменением циркуляции скорости вокруг контура. Рассматриваются случаи разомкнутого и замкнутого контуров.

Ключевые слова: отрывное обтекание контура, нестационарное течение, расчет давления.

В ряде задач расчет гидродинамических реакций на профиль, обтекаемый нестационарным потоком идеальной несжимаемой жидкости, вызывает затруднения ввиду сложности. Общие формулы Л. И. Седова [1] не используются, поэтому при расчете суммарных гидродинамических реакций, как правило, вычисляют давление с последующим интегрированием по контуру профиля. В нестационарном потоке давление определяется интегралом Коши — Лагранжа, который содержит производную по времени от потенциала скорости. Вычисление этой составляющей давления наиболее трудоемко, так как необходимо учитывать перемещение точек контура и разрывы потенциала скорости, обусловленные сходом с профиля вихревых следов. Однако предлагаемые формулы расчета не всегда корректны, особенно при рассмотрении режимов отрывного обтекания [2].

В настоящей работе получены общие формулы для расчета давления и суммарных гидродинамических реакций на контур (разомкнутый и замкнутый) в нестационарном потоке в режимах безотрывного и отрывного обтекания.

1. В декартовой системе координат xy рассмотрим плоское нестационарное течение идеальной несжимаемой жидкости вблизи разомкнутого или замкнутого контура L. На бесконечном удалении от контура жидкость движется со скоростью $\boldsymbol{v}_\infty$, контур — со скоростью $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ $((x,y)\in L)$. Движение жидкости вне контура и вихревых следов, обусловленных изменением циркуляции скорости вокруг контура, полагается потенциальным. Тогда в точках контура L гидродинамическое давление $p(x,y,t)$ определяется интегралом Коши — Лагранжа, который можно записать в виде [3]

$$p - p_\infty = -\rho\Big(\frac{\delta\varphi}{\delta t} + \frac{1}{2}\,[(v_s - v_{es})^2 - v_e^2 - v_\infty^2]\Big), \qquad v_e^2 = v_{es}^2 + v_{en}^2. \tag{1}$$

Здесь p_∞ — давление в бесконечно удаленной точке; $\delta/\delta t$ — оператор дифференцирования по времени t в точке, движущейся с переносной скоростью $\boldsymbol{v}_e$ (для точек контура $\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{U}$); индексы s, n соответствуют касательным и нормальным составляющим скоростей.

Предположим, что известно решение начально-краевой задачи обтекания контура, определяющее интенсивность вихревого слоя $\gamma(s,t)$, моделирующего контур L. Для расчета давления в точках разомкнутого и замкнутого контуров L в режимах безотрывного и отрывного обтекания используем интеграл Коши — Лагранжа (1).

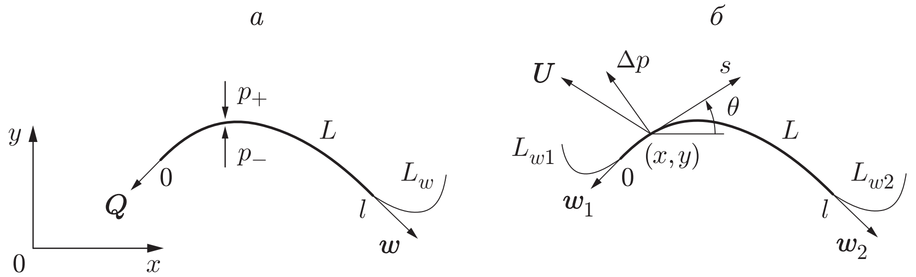

Рис. 1. Схема обтекания разомкнутого контура:
а — безотрывное обтекание; *б* — отрывное обтекание

В случае обтекания разомкнутого контура целесообразно вычислять перепад давления $\Delta p(s,t) = p_-(s,t) - p_+(s,t)$ в точке контура $(x,y) \in L$ с дуговой координатой s, отсчитываемой от передней кромки. Рассмотрим безотрывное нестационарное обтекание разомкнутого контура, когда вихревой след L_w сходит только с задней кромки (рис. 1,*а*). В этом случае перепад давления Δp, действующий на контур L в направлении нормали $\boldsymbol{n}$, равен

$$\Delta p(s,t) = -\rho v_{rs}(s,t)\gamma(s,t) - \rho\,\frac{d\Gamma(s,t)}{dt}, \qquad \Gamma(s,t) = \int\limits_0^s \gamma(s,t)\,ds, \quad s \in [0,l]. \tag{2}$$

Здесь $\gamma(s,t) = v_s^-(s,t) - v_s^+(s,t)$; v_s^-, v_s^+ — предельные скорости жидкости при подходе к контуру L; $v_{rs}(s,t) = v_{0s}(s,t) - v_{es}(s,t)$ — относительная скорость жидкости при ее движении вдоль контура L; $v_{0s}(s,t) = [v_s^-(s,t) + v_s^+(s,t)]/2$. Заметим, что формула (2) хорошо известна.

На задней кромке разомкнутого контура $\Delta p(l,t) = 0$. В общем случае безотрывного обтекания перепад давления в точке $s = 0$ обращается в бесконечность. Это обусловлено тем, что вблизи передней кромки имеется асимптотика интенсивности вихревого слоя: $\gamma(s,t) = A(t)/\sqrt{s}$. Такая особенность течения в окрестности передней кромки порождает подсасывающую силу [1], приложенную к передней кромке и действующую в направлении, противоположном направлению вектора касательной к контуру L (см. рис. 1,*а*). Касательная составляющая подсасывающей силы [5] равна

$$Q_s(t) = -\frac{\pi\rho}{4}\,\lim_{s\to 0}\,[s\gamma^2(s,t)] = -\frac{\pi\rho}{4}\,A^2(t). \tag{3}$$

Обозначим через R_x, R_y проекции суммарной гидродинамической силы на оси координат, а через M — момент гидродинамических сил относительно начала координат. По определению

$$\begin{gathered} R_x(t) + iR_y(t) = i\int\limits_0^l \Delta p(s,t)\,\mathrm{e}^{i\Theta(s,t)}\,ds + Q_s(t)\,\mathrm{e}^{i\Theta(0,t)}, \\ M(t) = \mathrm{Re}\,\Big(\int\limits_0^l \Delta p(s,t) z(s,t)\,\mathrm{e}^{-i\Theta(s,t)}\,ds\Big) - Q_s(t)\,\mathrm{Im}\,\big[z(0,t)\,\mathrm{e}^{-i\Theta(0,t)}\big]. \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь параметры Δp, Q_s определяются формулами (2), (3); $\Theta(s,t)$ — угол наклона касательной к контуру L в точке с комплексной координатой $z(s,t) = x(s,t) + iy(s,t)$.

Рассмотрим отрывное обтекание разомкнутого контура L, при котором с обеих кромок контура сходят вихревые следы L_{w1}, L_{w2} (рис. 1,*б*). Циркуляцию скорости при обходе вихревого следа L_{wk} против часовой стрелки обозначим через $\Gamma_{wk}(t)$, интенсивность сходящих вихрей и скорость их схода — через $\gamma_{wk}(0,t)$, $w_k(t)$ $(k=1,2)$. Разрыв потенциала скорости в точке контура L с дуговой координатой s определяется формулой

$$\varphi_-(s,t)-\varphi_+(s,t)=\Gamma(s,t)+\Gamma_{w1}(t), \qquad s\in(0,l). \tag{5}$$

С учетом (5) и соотношения $d\Gamma_{w1}(t)/dt = w_1(t)\gamma_{w1}(0,t)$ формула (2) для перепада давления в точках разомкнутого контура в режиме отрывного обтекания принимает вид

$$\Delta p(s,t)=-\rho\Big(v_{rs}(s,t)\gamma(s,t)+\frac{d\Gamma(s,t)}{dt}+w_1(t)\gamma_{w1}(0,t)\Big), \qquad s\in(0,l). \tag{6}$$

Из соотношения (6) следует, что на кромках контура L перепад давления $\Delta p(0,t) = \Delta p(l,t)=0$. Действительно, при подходе к точке $s=0$ циркуляция скорости $\Gamma(0,t)=0$, касательная составляющая относительной скорости жидкости $v_{rs}(0,t)=-w_1(t)$ (вектор скорости схода вихрей с передней кромки направлен противоположно вектору касательной к контуру), $\gamma(0,t)=\gamma_{w1}(0,t)$ в силу непрерывного перехода вихревого слоя с контура L в вихревой след L_{w1}. При подходе к задней кромке, с которой сходит вихревой след L_{w2}, перепад давления Δp также становится равным нулю. Это следует из соотношений [4]

$$\frac{d\Gamma}{dt}=-\sum_{k=1}^{2}\frac{d\Gamma_{wk}(t)}{dt}=-\sum_{k=1}^{2}w_k(t)\gamma_{wk}(0,t), \qquad v_{rs}(l,t)\gamma(l,t)=w_2(t)\gamma_{w2}(0,t).$$

С контура L могут сходить несколько вихревых следов, в частности, это происходит, если контур L имеет угловые точки. Пусть $s_{*1},\dots,s_{*N_w}$ — дуговые координаты точек схода вихревых следов. Тогда при $0<s<s_{*m+1}$, $1\leqslant m\leqslant N_w-1$ формулу (5) для разрыва потенциала скорости можно записать в виде

$$\varphi_-(s,t)-\varphi_+(s,t)=\Gamma(s,t)+\sum_{k=1}^{m}\Gamma_{wk}(t),$$

выражение для перепада давления в тех же точках имеет вид

$$\Delta p(s,t)=-\rho\Big(v_{rs}(s,t)\gamma(s,t)+\frac{d\Gamma(s,t)}{dt}+\sum_{k=1}^{m}w_k(t)\gamma_{wk}(0,t)\Big). \tag{7}$$

Отметим, что в отличие от (2) формулы (6), (7) получены впервые. В режиме отрывного обтекания подсасывающая сила не возникает, поэтому суммарные силы и момент, действующие на контур, определяются формулами (4), где $Q_s=0$.

2. Рассмотрим нестационарное обтекание замкнутого контура L (рис. 2). Дуговую координату s будем отсчитывать от передней кромки. Пусть l, l_1 — длина контура L и дуговая координата задней кромки. Разделим контур L на L_1 $(0<s<l_1)$ и L_2 $(l_1<s<l)$. Гидродинамическое давление на этих контурах обозначим через $p_1(s,t)$, $p_2(s,t)$ соответственно. Контур L моделируем вихревым слоем $\gamma(s,t)=v_s^-(s,t)-v_s^+(s,t)$ [4] ($v_s^-=U_s$, $v_s^+=v_s$ — скорость жидкости на контуре L). Потенциал скорости φ в точках контура L связан с v_s соотношением

$$\frac{\partial\varphi(s,t)}{\partial s}=v_s(s,t), \qquad v_s(s,t)=U_s(s,t)-\gamma(s,t). \tag{8}$$

Пусть с задней кромки (точки $s=l_1$) контура L сходит только один вихревой след L_w (рис. 2,a). Интегрируя (8), имеем

$$\begin{gathered}\varphi(s,t)=\varphi(0,t)-\Gamma(s,t), \quad s\in[0,l_1), \qquad \Gamma(s,t)=-\int_0^s v_s(s,t)\,ds,\\ \varphi(s,t)=\varphi(l_1+0,t)-\Gamma(s,t)+\Gamma(l_1,t), \qquad s\in(l_1,l].\end{gathered} \tag{9}$$

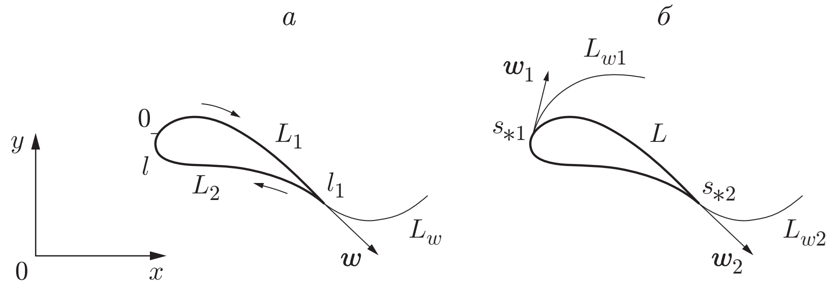

Рис. 2. Схема обтекания замкнутого контура:
а — безотрывное обтекание; *б* — отрывное обтекание

При переходе через вихревой след L_w потенциал скорости терпит разрыв:

$$\varphi(l_1 - 0, t) - \varphi(l_1 + 0, t) = \Gamma_w(t), \qquad \Gamma_w(t) = \int\limits_{L_w} \gamma_w(\sigma, t)\, d\sigma. \tag{10}$$

В точке $s = 0$ потенциал скорости непрерывен: $\varphi(0, t) = \varphi(l, t)$. Отсюда с учетом (9), (10) следует теорема Кельвина о сохранении циркуляции скорости по замкнутому "жидкому" контуру: $\Gamma(t) + \Gamma_w(t) = 0$.

В точках контура L

$$(v_s - v_e)^2 = \gamma^2, \qquad v_e^2 = U^2,$$
$$\frac{\delta\varphi}{\delta t} = \frac{\partial\varphi(0,t)}{\partial t} - \frac{\partial\Gamma(s,t)}{\partial t}, \qquad 0 \leqslant s < l_1,$$
$$\frac{\delta\varphi}{\delta t} = \frac{\partial\varphi(0,t)}{\partial t} - \frac{\partial\Gamma(s,t)}{\partial t} - \frac{d\Gamma_w(t)}{dt}, \qquad l_1 < s \leqslant l.$$

Подставляя данные выражения в (1), получаем

$$p_1(s,t) = -\rho\Big(\frac{1}{2}\,\gamma^2(s,t) - \frac{\partial\Gamma(s,t)}{\partial t}\Big) + f(s,t), \qquad 0 \leqslant s < l_1,$$
$$p_2(s,t) = -\rho\Big(\frac{1}{2}\,\gamma^2(s,t) - \frac{\partial\Gamma(s,t)}{\partial t} - \frac{d\Gamma_w(t)}{dt}\Big) + f(s,t), \qquad l_1 < s \leqslant l, \tag{11}$$
$$f(s,t) = p_\infty - \rho\Big(\frac{\partial\varphi(0,t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\,[U^2(s,t) + v_\infty^2]\Big).$$

В случае безотрывного обтекания контура L интенсивность вихревого слоя на передней кромке непрерывна: $\gamma(0,t) = \gamma(l,t)$, циркуляция скорости $\Gamma(0,t) = 0, \Gamma(l,t) = \Gamma(t)$. С учетом теоремы Кельвина из (11) следует, что на передней кромке давление также меняется непрерывно: $p_1(0,t) = p_2(l,t)$. В окрестности задней кромки $(s = l_1)$

$$p_1(l_1 - 0, t) = -\rho\Big(\frac{1}{2}\,\gamma^2(l_1 - 0, t) - \frac{\partial\Gamma(l_1,t)}{\partial t}\Big) + f(l_1, t),$$
$$p_2(l_1 + 0, t) = -\rho\Big(\frac{1}{2}\,\gamma^2(l_1 + 0, t) - \frac{\partial\Gamma(l_1,t)}{\partial t} - \frac{d\Gamma_w(t)}{dt}\Big) + f(l_1, t).$$

Отсюда следует, что на задней кромке разрыв давления

$$p_1(l_1 - 0, t) - p_2(l_1 + 0, t) = -\rho\Big(\frac{1}{2}\,[\gamma^2(l_1 - 0, t) - \gamma^2(l_1 + 0, t)] + \frac{d\Gamma_w(t)}{dt}\Big) = 0,$$

так как [4]

$$\gamma(l_1 - 0, t) + \gamma(l_1 + 0, t) = \gamma_w(0, t), \qquad [\gamma(l_1 - 0, t) - \gamma(l_1 + 0, t)]/2 = -w(t).$$

Рассмотрим режим отрывного обтекания замкнутого контура. Предположим, что вихревые следы сходят с точек $s = s_{*1}$, $s = s_{*2}$ (рис. 2,*б*). При переходе через вихревые следы потенциал скорости терпит разрыв $\varphi(s_{*k} - 0, t) - \varphi(s_{*k} + 0, t) = \Gamma_{wk}(t)$. С учетом этого обстоятельства и соотношения $d\Gamma_{wk}(t)/dt = w_k(t)\gamma_{wk}(0, t)$ формулы (11) для расчета гидродинамического давления $p(s, t)$ в случае отрывного обтекания замкнутого контура аналогично (6) принимают вид

$$p_1(s,t) = -\rho\Big(\frac{1}{2}\,\gamma^2(s,t) - \frac{\partial\Gamma(s,t)}{\partial t} - w_1(t)\gamma_{w1}(0,t)\Big) + f(s,t), \qquad s_{*1} < s < s_{*2},$$

$$p_2(s,t) = -\rho\Big(\frac{1}{2}\,\gamma^2(s,t) - \frac{\partial\Gamma(s,t)}{\partial t} - w_1(t)\gamma_{w1}(0,t) - w_2(t)\gamma_{w2}(0,t)\Big) + f(s,t), \qquad (12)$$

$$s_{*2} < s < l + s_{*1}, \qquad f(s,t) = p_\infty - \rho\Big(\frac{\partial\varphi(s_{*1} - 0, t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\,[U^2(s,t) + v_\infty^2]\Big).$$

Из (12) следует, что в точках схода вихревых следов давление не терпит разрыва:

$$p_1(s_{*1} + 0, t) - p_2(l + s_{*1} - 0, t) = 0, \qquad p_1(s_{*2} - 0, t) - p_2(s_{*2} + 0, t) = 0.$$

Отметим, что в предельном случае бесконечно тонкого профиля формулы (11), (12) переходят в формулы (2), (6). Для доказательства данного утверждения необходимо учитывать, что в предельном случае профиль переходит в разомкнутый контур, на котором интенсивность вихревого слоя равна сумме соответствующих интенсивностей вихревых слоев на контурах L_1, L_2.

Суммарные гидродинамические реакции, действующие на замкнутый контур, определяются интегрированием давления по контуру L.

Таким образом, получены формулы, позволяющие достаточно точно вычислять давление и суммарные гидродинамические реакции, действующие на профиль в нестационарном потоке идеальной несжимаемой жидкости в режимах безотрывного и отрывного обтекания. Рассмотрены случаи обтекания разомкнутого и замкнутого контуров. Течение жидкости вне профиля и вихревых следов предполагалось потенциальным. Для расчета давления использованы интенсивности вихревых слоев, моделирующих профиль и вихревые следы, определяемые из решения соответствующей нелинейной начально-краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
2. **Белоцерковский С. М.** Математическое моделирование плоского отрывного обтекания тел / С. М. Белоцерковский, В. Н. Котовский, М. И. Ништ, Р. М. Федоров. М.: Наука, 1988.
3. **Горелов Д. Н.** Критерии отрыва нестационарного потока идеальной жидкости с гладкого контура // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 1. С. 74–81.
4. **Горелов Д. Н.** К постановке нелинейной начально-краевой задачи нестационарного отрывного обтекания профиля // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 2. С. 48–56.
5. **Горелов Д. Н.** Методы решения плоских краевых задач теории крыла. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.

Поступила в редакцию 27/II 2007 г.,
в окончательном варианте — 22/VI 2007 г.