ПМТФ, № 1, 1966

ОБЩАЯ И ОСНОВНАЯ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ПЛОСКИХ СТРУЙНЫХ УСТАНОВИВШИХСЯ ТЕЧЕНИЙ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Г. Н. Пыхтеев
(Новосибирск)

Формулируется общая краевая задача, охватывающая известные плоские струйные установившиеся течения идеальной несжимаемой жидкости. Из общей задачи выделяется наиболее простая задача, сохраняющая все специфические особенности общей задачи, которая называется основной задачей. Решение основной задачи сводится к решению нелинейного интегро-дифференциального уравнения, а также к решению нелинейных интегральных уравнений. Приводятся примеры течений, определение которых сводится к решению основной задачи.

§ 1. Общая краевая задача. Основная краевая задача. 1.1. Определение струйного течения в параметрической плоскости. Функция Жуковского. Струйными течениями принято называть такие течения, границы которых состоят из твердых стенок и свободных поверхностей, на которых давления постоянны. Здесь рассматривается плоское установившееся струйное течение идеальной жидкости, причем предполагается, что жидкость несжимаема, а область течения односвязна. Для определения всех элементов такого течения, как известно, достаточно найти комплексный потенциал скорости течения $w = \varphi + i\psi$ в каждой точке $z = x + iy$ области течения, т. е. найти зависимость $w = w(z)$. Отыскание зависимости $w = w(z)$ облегчается, если ввести вспомогательное комплексное переменное $\zeta = \xi + i\eta$, изменяющееся в некоторой канонической области, а также вспомогательную функцию, и искать зависимость $w = w(z)$ в параметрической форме

$$w = w(\zeta), \qquad z = z(\zeta) \tag{1.1}$$

Поэтому зависимость $w = w(z)$ здесь будет браться в форме (1.1). В качестве канонической области изменения $\zeta = \xi + i\eta$ будет браться либо верхняя полуплоскость, либо правый квадрант верхней полуплоскости. В качестве вспомогательной функции удобно взять функцию

$$F(\zeta) = \frac{1}{\omega_0} \ln\left(\frac{1}{V_0}\frac{dw}{dz}\right) + F^\circ(\zeta) \tag{1.2}$$

Здесь ω_0 — некоторое заданное число, V_0 — характерная скорость течения, а $F^\circ(\zeta)$ — заданная функция, выбираемая таким образом, чтобы $F(\zeta)$ была аналитична в канонической области. Функция $F(\zeta)$, определяемая равенством (1.2), будет далее называться функцией Жуковского. Так как течение установившееся, то область изменения комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ всегда известна, и, следовательно, можно считать известной зависимость $w = w(\zeta)$. Последнюю можно представить в виде

$$w = w(\zeta) = \varphi_0 f(\zeta) \tag{1.3}$$

Здесь φ_0 — характерный для данного течения параметр, имеющий размерность потенциала скорости. Пусть функция Жуковского найдена; тогда, используя равенства (1.2) и (1.3), легко найти функцию, отображающую область течения на каноническую область плоскости ζ

$$z = z(\zeta) = \frac{\varphi_0}{V_0}\int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{\omega_0(F^\circ(\zeta) - F(\zeta))} f'(\zeta)\, d\zeta \tag{1.4}$$

Для комплексной скорости будем иметь, согласно (1.2), выражение

$$\frac{dw}{dz} = V_0 e^{\omega_0 (F(\zeta) - F^\circ(\zeta))} \tag{1.5}$$

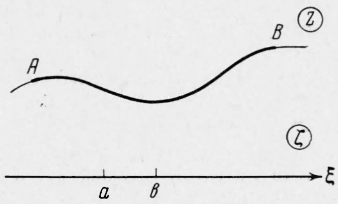
Таким образом, для определения всех элементов течения достаточно найти функцию Жуковского $F(\zeta)$ и зависимость $w = w(\zeta)$.

1.2. Граничные условия для функции Жуковского. Для того чтобы выяснить вид общей краевой задачи для функции Жуковского, необходимо посмотреть, каким условиям будет удовлетворять функция Жуковского на различных участках границы канонической области в зависимости от свойств границ области течения, которым эти участки соответствуют. Пусть AB — часть границы области течения, которой в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ соответствует отрезок $[a, b]$ оси ξ (фиг. 1). Обозначим действительную часть $F(\zeta)$ через u, а мнимую — через v, отсюда

$$F(\zeta) = u + iv \tag{1.6}$$

и заметим, что, с другой стороны,

$$F(\zeta) = \frac{1}{\omega_0} \ln \left(\frac{V_s}{V_0} e^{-i\vartheta} \right) + F^\circ(\zeta) \tag{1.7}$$



Фиг. 1

где V_s — модуль скорости, ϑ — угол наклона скорости к действительной оси. Граничные значения $F^\circ(\zeta)$ на отрезке $[a, b]$ будем далее обозначать через $F^\circ(\xi)$. Заметим также, что в рассматриваемом течении непроницаемая твердая стенка и свободная поверхность являются линиями тока. Рассмотрим в зависимости от вида участка границы AB четыре случая.

1) *Линия AB является твердой непроницаемой стенкой.* Положим $\omega_0 = i$ и направим оси таким образом, чтобы угол наклона касательной на линии AB совпадал с углом наклона скорости ϑ. Введем для линии AB понятие относительной кривизны. Пусть $K^s(\vartheta)$ — абсолютная величина кривизны линии AB как функция угла наклона касательной ϑ. Тогда относительной кривизной линии AB будет функция

$$K(\vartheta) = K^s(\pi\sigma - \vartheta) \,/\, K^\circ \tag{1.8}$$

Здесь K° — кривизна линии AB в некоторой ее точке, а $\pi\sigma$ — угол наклона касательной в этой точке. Известно, что, если S — длина дуги линии AB, то для $K^s(\vartheta)$ справедливо равенство

$$d\vartheta / dS = \mp K^s(\vartheta) \tag{1.9}$$

Здесь знак минус берется, если ϑ убывает при увеличении S, а знак плюс, если ϑ возрастает. В силу того что AB — линия тока для скорости и потенциала скорости, имеют место соотношения

$$V_s = \left| \frac{d\varphi}{dS} \right| \quad \text{на } AB; \qquad \varphi = \varphi_0 f(\xi), \qquad \xi \in [a, b] \tag{1.10}$$

Из соотношений (1.6) — (1.10), вводя безразмерный параметр

$$\lambda = \varphi_0 K^\circ / V_0 \tag{1.11}$$

находим, что $F(\zeta)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет краевому условию

$$\frac{du}{d\xi} \mp \lambda \, |f'(\xi)| \, e^{-\operatorname{Im} F^\circ(\xi)} K(u + \pi\sigma - \operatorname{Re} F^\circ(\xi)) \, e^{v} = \operatorname{Re} F^{\circ\prime}(\xi), \quad \xi \in [a, b] \tag{1.12}$$

2) *Линия AB является свободной поверхностью тяжелой жидкости.* Выберем $\omega_0 = 1$ и направим оси координат таким образом, чтобы ускорение силы тяжести g было направлено в отрицательную сторону оси y и

чтобы угол наклона касательной на линии AB совпадал с углом наклона скорости ϑ. Используя интеграл Бернулли, будем иметь на AB равенство

$$\tfrac{1}{2}V_s^2 + gy = C - p_0 \tag{1.13}$$

где p_0 — давление на свободной поверхности, C — постоянная. Из очевидных геометрических соображений находим

$$dy/dS = \sin\vartheta \tag{1.14}$$

Продифференцируем равенство (1.13) по S и воспользуемся соотношениями (1.6), (1.7), (1.10) и (1.14); тогда, вводя безразмерный параметр

$$\lambda = g\psi_0 / V_0^3 \tag{1.15}$$

получим для $F(\zeta)$ краевое условие

$$\frac{du}{d\xi} - \lambda |f'(\xi)| e^{3\operatorname{Re}F^\circ(\xi)} \sin(v - \operatorname{Im}F^\circ(\xi)) e^{-3u} = \operatorname{Re}F^{\circ\prime}(\xi), \quad \xi \in [a, b] \tag{1.16}$$

3) *Линия AB является свободной поверхностью, на которую действуют капиллярные силы.* Положим $\omega_0 = -i$. Пусть p_1 — давление над свободной поверхностью, а q — коэффициент поверхностного натяжения; тогда, как известно [1]

$$p_s - p_0 = qK^s(\vartheta) \tag{1.17}$$

Интеграл Бернулли в данном случае имеет вид

$$p_1 - p_s = \tfrac{1}{2}\rho(V_0^2 - V_s^2) \tag{1.18}$$

Из соотношений (1.6), (1.7), (1.9), (1.10), (1.17) и (1.18), вводя безразмерные параметры

$$\lambda = \rho V_0 \varphi_0 / q, \qquad \mu = 2(p_1 - p_0) / \rho V_0^2 \tag{1.19}$$

видим, что $F(\zeta)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет краевому условию

$$\frac{du}{d\xi} \mp \lambda |f'(\xi)| [\operatorname{sh}(\operatorname{Im}F^\circ(\xi) - v) + \frac{1}{2}\mu \exp(\operatorname{Im}F^\circ(\xi) - v)] = \operatorname{Re}F^{\circ\prime}(\xi)$$
$$\xi \in [a, b] \tag{1.20}$$

4) *Линия AB—твердая проницаемая стенка, вдоль которой потенциал скорости сохраняет постоянное значение.* В этом случае, очевидно,

$$V_s = \left|\frac{d\psi}{dS}\right| \text{ на } AB; \quad \psi = -i\varphi_0 f(\xi), \quad \xi \in [a, b] \tag{1.21}$$

Положим $\omega_0 = i$. Используя равенства (1.21), а также соотношения (1.6) — (1.9), находим, что $F(\zeta)$ удовлетворяет на $[a, b]$ краевому условию

$$\frac{du}{d\xi} \mp \lambda |f'(\xi)| e^{-\operatorname{Im}F^\circ(\xi)} K(u + \pi\sigma - \operatorname{Re}F^\circ(\xi)) e^v = \operatorname{Re}F^{\circ\prime}(\xi), \ \xi \in [a, b] \tag{1.22}$$

в котором параметр λ определяется равенством (1.12).

Анализ краевых условий (1.13), (1.17), (1.21), (1.23) дает возможность установить вид общей краевой задачи для функции Жуковского, охватывающей все струйные течения, границы которых состоят из твердых (вообще говоря, криволинейных) стенок и свободных поверхностей, на которые могут действовать силы тяжести или капиллярные силы. В самом деле, если в качестве канонической области переменного $\zeta = \xi + i\eta$ взять верхнюю полуплоскость, то каждой твердой стенке или свободной поверхности плоскости течения будет соответствовать отрезок действительной оси ξ (конечный или бесконечный); с другой стороны, из равенств (1.12), (1.16), (1.20), (1.22) следует, что нелинейная часть краевого условия для функции $F(\zeta) = u + iv$ на каждом таком отрезке представляет собой произведение двух функций, одна из которых зависит только от u, а другая — только от v, линейная же часть содержит производную по ξ либо от u, либо от v. Если учесть указанные два обстоятельства, а также возможность произвольного выбора функции $F^\circ(\zeta)$ в равенстве (1.2), то легко убедиться, что любая краевая задача для функции Жуковского при сделанных выше предположениях будет частным случаем общей краевой задачи.

1.3. Общая нелинейная задача. *Задача* 1.1. Найти аналитическую в верхней полуплоскости, ограниченную на бесконечности и непрерывную на действительной оси функцию $F(\zeta)$ по краевым условиям

$$\frac{1+\varkappa_\nu}{2}\frac{du}{d\xi}+\frac{1-\varkappa_\nu}{2}\frac{dv}{d\xi}=\lambda_\nu\gamma_\nu(\xi)\,U^\nu(u+\alpha_\nu(\xi))\,V^\nu(v+\beta_\nu(\xi))+\delta_\nu(\xi) \quad (1.23)$$

$$\xi\in\sigma_\nu \quad (\nu=1,2,\ldots,n), \qquad \bigcup_{\nu=1}^{n}\sigma_\nu=(-\infty,\infty);\ \varkappa_\nu=\pm 1$$

в которых $\alpha_\nu(\xi)$, $\beta_\nu(\xi)$, $\gamma_\nu(\xi)$, $\delta_\nu(\xi)$, $U^\nu(u+\alpha)$ и $V^\nu(v+\beta)$ — заданные функции своих аргументов.

Задачу 1.1 естественно назвать однородной, если $F(\zeta)\equiv 0$ будет решением этой задачи. Очевидно, для однородной задачи имеют место условия

$$\lambda_\nu\gamma_\nu(\xi)\,U^\nu(\alpha_\nu(\xi))\,V^\nu(\beta_\nu(\xi))+\delta_\nu(\xi)\equiv 0 \quad (\nu=1,2,\ldots,n) \quad (1.24)$$

Совокупность параметров λ_ν будет далее обозначаться через λ. Коэффициенты задачи могут содержать некоторые действительные параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, т. е., вообще говоря,

$$\alpha_\nu(\xi)=\alpha_\nu(\xi,\varepsilon),\ \beta_\nu(\xi)=\beta_\nu(\xi,\varepsilon),\ \gamma_\nu(\xi)=\gamma_\nu(\xi,\varepsilon),\ \delta_\nu(\xi)=\delta_\nu(\xi,\varepsilon) \quad (1.25)$$

где через ε обозначена совокупность параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$. В поставленной общей задаче параметры λ и ε предполагаются заданными.

1.4. Решение гидродинамической задачи. Краевая задача с дополнительными условиями, наложенными на параметры. Решение поставленной выше краевой задачи (1.23), вообще говоря, не будет давать решение гидродинамической задачи, которой она соответствует, так как постановка большинства струйных гидродинамических задач такова, что параметры λ и ε связаны с искомой функцией некоторыми соотношениями. Последние по своему происхождению могут носить геометрический или физический характер. Часть этих соотношений представляет собой трансцендентное уравнение вида

$$\lambda_\nu=\tau_\nu/\chi_\nu(u,v,\varepsilon) \quad (\nu=1,2,\ldots,n) \quad (1.26)$$

число которых обычно равно числу параметров λ. Здесь τ_ν — заданные величины, а $\chi_\nu(u,v,\varepsilon)$ — заданные функционалы. Остальные соотношения в общем случае представляют собой неявные трансцендентные уравнения вида

$$\chi^\nu(u,v,\varepsilon)=0 \quad (\nu=1,2,\ldots,n) \quad (1.27)$$

число которых равно числу параметров ε. Примеры соотношений вида (1.26), (1.27) будут приведены ниже при рассмотрении струйных течений с криволинейной стенкой и струйных течений тяжелой жидкости (соотношения (2.11), (3.5), (3.11)).

Таким образом, решение струйной гидродинамической задачи эквивалентно следующей краевой задаче с условиями для параметров λ и ε.

Задача 1.2. Найти решение общей краевой задачи (1.23) в предположении, что параметры λ и ε связаны с искомой функцией дополнительными условиями (1.26), (1.27).

Естественный путь решения задачи 1.2 состоит в том, что сначала решается общая краевая задача (1.23), после чего полученное решение $F(\zeta)=F(\zeta;\lambda,\varepsilon)=u(\xi,\eta;\lambda,\varepsilon)+iv(\xi,\eta;\lambda,\varepsilon)$ подставляется в соотношения (1.26), (1.27), а затем решается найденная в результате подстановки система нелинейных трансцендентных уравнений для λ и ε.

1.5. Основная краевая задача. Решение общей краевой задачи представляет трудности, поэтому выделим из нее частную задачу, наиболее простую, но в то же время сохраняющую основные ее специфические особенности как математического, так и физического характера.

Такую задачу получим, если в (1.23) на всех отрезках σ_ν, кроме одного, положить либо $U^\nu(u+\alpha_\nu(\xi)) \equiv 0$, либо $V^\nu(v+\beta_\nu(\xi)) \equiv 0$. Физически это соответствует случаю, когда все участки границы соответствующего струйного течения, кроме одного, состоят из твердых прямолинейных стенок и свободных поверхностей, на которые не действуют внешние силы. Очевидно, функцию $F^\circ(\zeta)$ в равенстве (1.2) в данном случае всегда можно выбрать так, чтобы либо $u=0$, либо $v=0$ на всех отрезках, кроме одного, а в качестве последнего, не ограничивая общности, можно взять отрезок $[-1, 1]$. Таким образом, приходим к задаче.

Задача 1.3. Найти аналитическую в верхней полуплоскости, ограниченную на бесконечности и непрерывную на действительной оси функцию $F(\zeta) = u + iv$ по краевым условиям

$$(1+\varkappa_\nu)\, v + (1-\varkappa_\nu)\, u = 0, \quad \xi \in \sigma_\nu, \quad \varkappa_\nu = \pm 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.28}$$

$$\frac{du}{d\xi} = \lambda\gamma(\xi)\, U(u+\alpha(\xi))\, V(v+\beta(\xi)) + \delta(\xi), \qquad \xi \in [-1, 1] \tag{1.29}$$

в которых $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$, $\delta(\xi)$, $U(u+\alpha)$, $V(v+\beta)$ — заданные функции своих аргументов, а λ — заданный параметр,

$$\bigcup_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu \bigcup [-1, 1] = (-\infty, \infty)$$

Краевые условия этой основной задачи содержат четыре коэффициента: $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$ и $\delta(\xi)$ и один параметр (который считается заданным). Если коэффициенты содержат действительные параметры ε, т. е.

$$\alpha(\xi) = \alpha(\xi, \varepsilon), \quad \beta(\xi) = \beta(\xi, \varepsilon), \quad \gamma(\xi) = \gamma(\xi, \varepsilon), \quad \delta(\xi) = \delta(\xi, \varepsilon) \tag{1.30}$$

то они считаются заданными. Для однородной задачи имеет место условие

$$\lambda\, \gamma(\xi) U(\alpha(\xi))\, V(\beta(\xi)) + \delta(\xi) \equiv 0 \tag{1.31}$$

В случае, когда решение данной задачи будет содержать произвольные постоянные на искомую функцию нужно наложить добавочные условия, выбор которых зависит от физических особенностей данного течения. В качестве одного из таких условий можно взять равенство

$$u(\xi_0, 0) = 0, \qquad \xi_0 \in [-1, 1] \tag{1.32}$$

Для того чтобы основная задача давала решение соответствующей гидродинамической задачи, необходимо удовлетворить дополнительным условиям (1.27) и одному условию вида

$$\lambda = \tau / \chi(u, v, \varepsilon) \tag{1.33}$$

где τ — заданный параметр, $\chi(u, v, \varepsilon)$ — заданный функционал. Таким образом, решение задачи (1.28), (1.29), эквивалентно решению краевой задачи с дополнительными условиями, наложенными на λ и ε.

Задача 1.4. Найти решение основной задачи (1.28), (1.29) в предположении, что параметры λ и ε связаны с искомой функцией дополнительными условиями (1.33), (1.27).

Естественный путь решения задачи (1.4) состоит в том, что сначала решается основная задача (1.28), (1.29), после чего полученное решение $F(\zeta) = F(\zeta; \lambda, \varepsilon) = u(\xi, \eta; \lambda, \varepsilon) + iv(\xi, \eta; \lambda, \varepsilon)$ подставляется в соотношения (1.33), (1.27), и решается полученная система уравнений для λ и ε.

§ 2. Редукция основной и общей краевых задач к нелинейным интегро-дифференциальным и нелинейным интегральным уравнениям. Пусть $u(\xi)$ реальная часть $F(\zeta)$ на отрезке $[-1, 1]$ оси ξ, т. е. положим

$$u(\xi) = u(\xi, 0), \qquad \xi \in [-1, 1] \tag{2.1}$$

Будем считать, что функция $u(\xi)$ известна; тогда определение $F(\zeta)$ сведется к решению смешанной задачи или задачи Дирихле для аналитической функции. Будем полагать, что в последнем случае на $F(\zeta)$ наложено условие $F(\infty) = 0$. Если воспользоваться известными решениями указанных задач [2, 3], то нетрудно получить интегральное представление $F(\zeta)$ через функцию $u(\xi)$ в верхней полуплоскости. Введем интеграл вида

$$\Omega(u \mid \zeta) = \frac{\omega(\zeta)}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{t-\zeta} \frac{dt}{\omega(t)}, \qquad \zeta \,\overline{\in}\, [-1, 1] \tag{2.2}$$

где $\omega(\xi)$ — вещественная функция, а $\omega(\xi)$ — функция, аналитическая в верхней полуплоскости всюду, кроме, быть может, бесконечно удаленной точки, в которой для нее допустим полюс, и удовлетворяющая условию $\lim \omega(\zeta) = \omega(\xi)$ при $\zeta \to \xi$, $\xi \in [-1, 1]$. Обозначением $\Omega(u \mid \zeta)$ подчеркивается, что данный интеграл является не только функцией точки ζ, но и оператором от $u(\xi)$. В случае, когда нужно подчеркнуть только один из указанных факторов или отметить зависимость этого интеграла от $\omega(\zeta)$, то для него будем употреблять также обозначения $\Omega(\zeta)$, Ωu или $\Omega(u, \omega \mid \zeta)$.

В частном случае, когда $\omega(\zeta) \equiv 1$ или $\omega(\zeta) = -i\sqrt{\zeta^2 - 1}$, обозначим этот интеграл через

$$\begin{aligned} \Phi(u \mid \zeta) &= \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{t-\zeta} dt, \qquad \zeta \,\overline{\in}\, [-1, 1] \\ \Psi(u \mid \zeta) &= -\frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{t-\zeta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad \zeta \,\overline{\in}\, [-1, 1] \end{aligned} \tag{2.3}$$

Под $\sqrt{\zeta^2 - 1}$ в последнем интеграле понимается ветвь, аналитическая на разрезанной вдоль отрезка $[-1, 1]$ оси ξ плоскости ζ и такая, что $\sqrt{\zeta^2 - 1} = \zeta + O(\zeta^{-1})$ при больших $|\zeta|$. Наряду с интегралом $\Omega(u \mid \zeta)$, введем сингулярный интеграл

$$T(u \mid \xi) = \frac{\omega(\xi)}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{t-\xi} \frac{dt}{\omega(t)}, \qquad \xi \in [-1, 1] \tag{2.4}$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши. Будем для него употреблять также обозначения $T(\xi)$, Tu, $T(u, \omega \mid \zeta)$, вкладывая в них тот же смысл, что и в соответствующие обозначения интеграла $\Omega(u \mid \zeta)$. В отмеченных выше двух частных случаях задания $\omega(\xi)$ будем обозначать интеграл $T(u \mid \xi)$ через

$$\begin{aligned} J(u \mid \xi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{t-\xi} dt, \quad \xi \in [-1, 1] \\ I(u \mid \xi) &= \frac{\sqrt{-\xi^2 + 1}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{t-\xi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \xi \in [-1, 1] \end{aligned} \tag{2.5}$$

Если воспользоваться введенными обозначениями, то указанное выше интегральное представление $F(\zeta)$ через функцию $u(\xi)$ в общем случае (при сделанном выше предположении) можно представить в виде [2, 3]

$$F(\zeta) = \Omega(u \mid \zeta) \tag{2.6}$$

причем, если порядок полюса $\omega(\zeta)$ равен n, то $u(\xi)$ должна удовлетворять условиям

$$\int_{-1}^{1} u(t)\, t^{k-1} \frac{dt}{\omega(t)} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.7}$$

в которых $m = n - 1$, если $F(\zeta)$ ограничена на бесконечности и $m = n$, если $F(\infty) = 0$. Если в равенствах (1.6), (2.6) перейти к пределу при $\zeta \to \xi$, $|\xi| \leqslant 1$, а затем воспользоваться формулами Сохоцкого [2, 3], то нетрудно убедиться, что действительная и мнимая части $F(\zeta)$ на отрезке $[-1, 1]$ оси ξ связаны соотношением $v = -T(u \mid \xi)$. Подставим теперь найденное выражение для v в равенство (1.29). Тогда получим для определения $u(\xi)$ нелинейное уравнение

$$u'(\xi) = \lambda\gamma(\xi) U(u(\xi) + \alpha(\xi)) V(-T(u \mid \xi) + \beta(\xi)) + \delta(\xi), \quad \xi \in [-1, 1] \tag{2.8}$$

которое является интегро-дифференциальным и сингулярным. Решение этого уравнения, согласно (1.32), должно удовлетворять условию

$$u(\xi_0) = 0, \quad \xi_0 \in [-1, 1] \tag{2.9}$$

а иногда и условиям (2.7) — в случае, если этим условиям должно удовлетворять решение основной краевой задачи. В дальнейшем, если не будет оговорено особо, будет предполагаться, что решение уравнения (2.8) удовлетворяет только условию (2.9). Таким образом, решение основной краевой задачи сводится к решению уравнения (2.8). Поэтому оно будет далее называться основным нелинейным интегро-дифференциальным уравнением. Функции $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$, $\delta(\xi)$ естественно называть коэффициентами уравнения (2.8). Естественно уравнение (2.8) называть однородным, если коэффициенты удовлетворяют соотношению (1.31). В общем случае коэффициенты зависят от параметров ε, т. е. имеют место зависимости (1.30). Параметры λ и ε считаются заданными. Решение уравнения (2.8), вообще говоря, не будет эквивалентно решению соответствующей гидродинамической задачи. Для того чтобы решение уравнения (2.8) было эквивалентно гидродинамической задаче или, что то же, основной краевой задаче с дополнительными условиями, наложенными на параметры, необходимо, чтобы это решение удовлетворяло системе нелинейных функциональных уравнений, которые получаются при помощи подстановки функций $u(\xi, \eta; \lambda, \varepsilon)$, $v(\xi, \eta; \lambda, \varepsilon)$ из равенства (2.6), где $F(\zeta) = u(\xi, \eta; \lambda, \varepsilon) + iv(\xi, \eta; \lambda, \varepsilon)$, в соотношения (1.33), (1.27).

2.2. Преобразование уравнения (2.8) к интегральным нелинейным уравнениям. Уравнение (2.8) можно в некоторых случаях свести к интегральному нелинейному уравнению. Рассмотрим три таких случая.

1) Пусть оператор $T(u \mid \xi)$ в случае, если производная $u'(\xi)$ интегрируема, представим в виде

$$T(u \mid \xi) = T^*(u' \mid \xi) = -\int_{-1}^{1} u'(t) H(\omega \mid \xi, t)\, dt \tag{2.10}$$

где $H(\omega \mid \xi, t)$ — ядро типа Фредгольма, т. е. функция, квадратично суммируема в квадрате $-1 \leqslant \xi, t \leqslant 1$. Кроме того, пусть $M(u \mid \xi)$ — оператор, обратный $T(u \mid \xi)$. Тогда, если ввести функцию $v(\xi) = -T(u \mid \xi)$, легко показать, что при сделанных предположениях решение уравнения

(2.8) сводится к решению уравнения

$$v(\xi)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}\gamma(t)H(\omega\,|\,\xi,t)\,U(-M(v\,|\,t)+\alpha(t))\,V(v(t)+\beta(t))\,dt+\delta^*(\xi)$$

$$\delta^*(\xi)=T^*(\delta\,|\,\xi),\qquad \xi\in[-1,1] \tag{2.11}$$

2) Пусть имеет место равенство (2.10) и

$$\alpha(\xi)=\alpha=\mathrm{const},\quad \delta(\xi)\equiv 0$$

В этом случае, если ввести функцию $Q(u)$, определяемую равенствами

$$R(u)=\int\limits_{0}^{u}\frac{du}{U(u+\alpha)},\qquad Q(u)=\frac{dR^{-1}(u)}{du}$$

где $R^{-1}(u)$ — оператор, обратный $R(u)$, нетрудно убедиться, что решение уравнения (2.8) сводится к решению уравнения

$$v(\xi)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}\gamma(t)H(\omega\,|\,\xi,t)\,V(v(t)+\beta(t))\,Q\left[\lambda\int\limits_{\zeta_0}^{t}\gamma(\tau)V(v(\tau)+\beta(\tau))\,d\tau\right]dt$$

$$\xi\in[-1,1] \tag{2.12}$$

в котором $v(\xi)$ — та же самая функция, что и в уравнении (2.11)

3) Пусть $U(u+\alpha)$ не зависит от u, т. е.

$$U(u(\xi)+\alpha(\xi))=U(\alpha(\xi))=U(\xi)$$

Тогда уравнение (2.11) примет вид уравнения типа Гаммерштейна.

$$v(\xi)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}\gamma^*(t)V(v(t)+\beta(t))H(\omega\,|\,\xi,t)\,dt+\delta^*(\xi),\quad \xi\in[-1,1] \tag{2.13}$$

$$\gamma^*(\xi)=\gamma(\xi)U(\xi)$$

Замечание. Если воспользоваться известными формулами обращения интеграла типа Коши [2, 3], то легко установить, что для оператора $M(v\,|\,\xi)=T^{-1}(v\,|\,\xi)$, входящего в уравнение (2.11), имеет место формула

$$M(v\,|\,\xi)=T(v,\omega^*\,|\,\xi)+C\omega^*(\xi),\qquad \omega^*(\xi)=\chi(\xi)\omega(\xi)$$

в которой значение постоянной C и вид функции $\chi(\xi)$ зависят от поведения $\omega(\xi)$ и искомой функции $u(\xi)$ уравнения (2.8) на концах отрезка $[-1,1]$. Если отношение $u(\xi)/\omega(\xi)$ имеет на обоих концах отрезка $[-1,1]$ интегрируемые особенности, то $\chi(\xi)=1/\sqrt{1-\xi^2}$, а постоянная C определяется из условия (2.9). Если отношение $u(\xi)/\omega(\xi)$ ограничено на обоих концах отрезка $[-1,1]$, то $\chi(\xi)=\sqrt{1-\xi^2}$ и $C=0$, причем должно выполняться условие

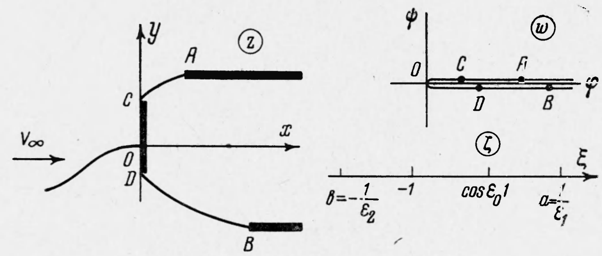
$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{u(t)}{\omega(t)\sqrt{1-t^2}}\,dt=0$$

В случае, когда отношение $u(\xi)/\omega(\xi)$ имеет в точке $\xi=1$ или $\xi=-1$ интегрируемую особенность, то соответственно $\chi(\xi)=\sqrt{1+\xi}/\sqrt{1-\xi}$ или $\chi(\xi)=\sqrt{1-\xi}/\sqrt{1+\xi}$ и $C=0$. Нетрудно также написать интегральное представление для функции Жуковского $F(\zeta)$ через функцию $v(\xi)=-T(u\,|\,\xi)=\operatorname{Im}F(\xi)$, $\xi\in[-1,1]$.

2.3. О сведении общей задачи к системе нелинейных уравнений. Решение общей задачи можно свести к решению системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Покажем это на двух примерах.

В качестве первого примера можно привести задачу об отрывном обтекании по схеме Кирхгофа конечного числа криволинейных дуг. Эта задача была рассмотрена Л. И. Седовым и была редуцирована им к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений [1, 4].

В качестве второго примера рассмотрим кавитационное обтекание пластинки по схеме Жуковского — Рошко [1] потоком тяжелой жидкости в предположении, что пластинка направлена перпендикулярно скорости на бесконечности, а стенки, на которые замыкаются струи, параллельны скорости на бесконечности. Рассматриваемое течение изображено на фиг. 2, где указано соответствие точек плоскости течения и вспомогательной плоскости. При указанном соответствии для комплексного потенциала будет иметь место формула



Фиг. 2

$$w = \varphi_0 (\zeta - \cos \varepsilon_0)^2$$

$$\sqrt{\varphi_0} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varphi_C} + \sqrt{\varphi_D}\right)$$

$$\cos \varepsilon_0 = \frac{\sqrt{\varphi_D} - \sqrt{\varphi_C}}{\sqrt{\varphi_D} + \sqrt{\varphi_C}}$$

Положим в равенстве (1.2) $\omega_0 = 1$, $V_0 = V_\infty$ и выберем функцию $F^\circ(\zeta)$ так, чтобы она удовлетворяла условиям

$$\operatorname{Im} F^\circ(\xi) = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi \leqslant -b, \ a \leqslant \xi < \infty, \\ -\frac{1}{2}\pi, & -1 \leqslant \xi < \cos \varepsilon_0, \\ \frac{1}{2}\pi, & \cos \varepsilon_0 < \xi \leqslant 1, \end{cases} \qquad \operatorname{Re} F^\circ(\xi) = \begin{cases} \ln (V_\infty / V_2), & -b \leqslant \xi \leqslant -1 \\ \ln (V_\infty / V_1), & 1 \leqslant \xi \leqslant a \end{cases}$$

где V_1 и V_2 — скорости в точках C и D соответственно, а затем введем функции, определяемые равенствами

$$u(\xi, 0) = u_1(f_1(\xi)), \qquad f_1(\xi) = (a + 1 - 2\xi) / (a - 1) \qquad 1 \leqslant \xi \leqslant a$$

$$u(\xi, 0) = u_2(f_2(\xi)), \qquad f_2(\xi) = -(b + 1 + 2\xi) / (b - 1) \qquad -b \leqslant \xi \leqslant -1$$

Тогда для функции Жуковского будет иметь место интегральное представление

$$F(\zeta) = \frac{\omega(\zeta)}{\pi}\left[-\int_1^a \frac{u_1(f_1(t))}{t - \zeta} \frac{dt}{|\omega(t)|} + \int_{-b}^{-1} \frac{u_2(f_2(t))}{t - \zeta} \frac{dt}{|\omega(t)|}\right]$$

$$\omega(\zeta) = \sqrt{(\zeta^2 - 1)(\zeta - a)(\zeta + b)}$$

Здесь для $\omega(\zeta)$ берется та ветвь, которая принимает действительные положительные значения на отрезке (a, ∞) оси ξ. Обозначим через $\omega_1(\zeta)$ и $\omega_2(\zeta)$ те ветви функций

$$\omega_1(\zeta) = i\sqrt{(\zeta^2 - 1)(\zeta - a_1)(\zeta - b_1)}, \quad a_1 = \frac{a + 3}{a - 1}, \quad b_1 = \frac{2b + a + 1}{a - 1}$$

$$\omega_2(\zeta) = -i\sqrt{(\zeta^2 - 1)(\zeta + a_2)(\zeta + b_2)}, \quad b_2 = \frac{b + 3}{b - 1}, \quad a_2 = \frac{2a + b + 1}{b - 1}$$

которые принимают чисто мнимые положительные или отрицательные значения соответственно на отрезках (b_1, ∞) или $(1, \infty)$, а через $\mu_1(\xi^*)$ и $\mu_2(\xi^*)$ — действительные функции

$$\mu_1(\xi^*) = -\frac{a + b + 2 - (a - 1)\xi^*}{b - 1}, \quad \mu_2(\xi^*) = \frac{a + b + 2 - (b - 1)\xi^*}{a - 1}$$

Используя введенные обозначения и граничное условие (1.16), нетрудно получить для определения $u_1(\xi^*)$ и $u_2(\xi^*)$, где $\xi^* = f_1(\xi)$, если $1 \leqslant \xi \leqslant a$, и $\xi^* = f_2(\xi)$, если $-b \leqslant \xi \leqslant -1$, систему уравнений (2.14)

$$u_1'(\xi^*) = \lambda_1 \gamma_1(\xi^*) e^{-3u_1(\xi^*)} \sin [T(u_1, \omega_1 | \xi^*) - i\Omega(u_2, \omega_2 | \mu_1) + \beta_1(\xi^*)], \quad (-1 \leqslant \xi^* \leqslant 1)$$

$$u_2'(\xi^*) = \lambda_2 \gamma_2(\xi^*) e^{-3u_2(\xi^*)} \sin [T(u_2, \omega_2 | \xi^*) - i\Omega(u_1, \omega_1 | \mu_2) + \beta_2(\xi^*)] \quad (-1 \leqslant \xi^* \leqslant 1)$$

$$\lambda_1 = \frac{g\varphi_0}{V_1^3}, \quad \gamma_1(\xi^*) = (a-1)\left(\frac{a-1}{2}\xi^* - \frac{a+1}{2} + \cos\varepsilon_0\right), \quad \beta_1(\xi^*) = -\operatorname{Im} F^\circ[f_1^{-1}(\xi^*)]$$

$$\lambda_2 = \frac{g\varphi_0}{V_2^3}, \quad \gamma_2(\xi^*) = (b-1)\left(\frac{b-1}{2}\xi^* + \frac{b+1}{2} + \cos\varepsilon_0\right), \quad \beta_2(\xi^*) = -\operatorname{Im} F^\circ[f_2^{-1}(\xi^*)]$$

Решение системы (2.14) должно удовлетворять условию $u_1(0) = 0$, $u_2(0) = 0$. В качестве основного заданного параметра возьмем число, обратное числу Фруда

$$\tau = gh / V_\infty^2$$

где h — длина пластинки. Для того чтобы решение системы (2.14) давало решение рассматриваемой гидродинамической задачи при заданном τ, необходимо потребовать выполнения условий

$$(F(\zeta) - F^\circ(\zeta)) = 0 \quad \text{при} \lim_{\zeta\to\infty}$$

$$\exp\Big[2 \lim_{\substack{\xi\to-1\\ -1\leqslant\xi<\cos\varepsilon_0}} (u(\xi, 0) - \operatorname{Re} F^\circ(\xi))\Big] - \exp\Big[2 \lim_{\substack{\xi\to1\\ \cos\varepsilon_0<\xi\leqslant1}} (u(\xi, 0) - \operatorname{Re} F^\circ(\xi))\Big] = 2\tau \tag{2.15}$$

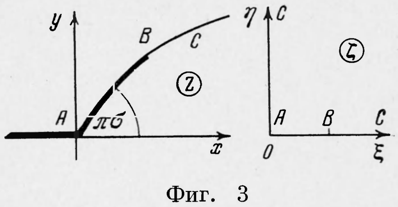
$$2\lambda_1 i \int_{-1}^{1} (\xi - \cos\varepsilon_0)\exp(F^\circ(\xi) - u(\xi, 0))\,d\xi + \tau\exp\Big[3 \lim_{\substack{\xi\to1\\ \cos\varepsilon_0<\xi\leqslant1}} (\operatorname{Re} F^\circ(\xi) - u(\xi, 0))\Big] = 0$$

$$2\lambda_2 i \int_{-1}^{1} (\xi - \cos\varepsilon_0)\exp(F^\circ(\xi) - u(\xi, 0))\,d\xi + \tau\exp\Big[3 \lim_{\substack{\xi\to-1\\ -1\leqslant\xi<\cos\varepsilon_0}} (\operatorname{Re} F^\circ(\xi) - u(\xi, 0))\Big] = 0$$

Условия (2.15) дают пять действительных трансцендентных уравнений для определения параметров λ_1, λ_2, ε_0, $\varepsilon_1 = 1/a$ и $\varepsilon_2 = 1/b$ $(0 \leqslant \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leqslant 1)$.

§ 3. Примеры струйных течений, определение которых сводится к решению основной краевой задачи. В общем случае определение струйного течения, как видно из вышеизложенного, сводится к решению общей краевой задачи, однако определение некоторых целых классов струйных течений сводится к решению основной краевой задачи. Здесь приводятся три класса струйных течений.

3.1. Струйные течения невесомой жидкости с криволинейной стенкой. Рассмотрим течение, границы которого состоят из конечного числа n прямолинейных стенок, одной криволинейной стенки и сходящей с нее свободной струи, причем на криволинейной стенке нет критических точек скорости. Направим оси координат, как указано на фиг. 3, где изображена часть границы течения, состоящая из криволинейной стенки AB и примыкающих к ней прямолинейного отрезка и свободной струи BC. Относительную кривизну $K(\vartheta)$ дуги AB определим равенством (1.8), где $\pi\sigma$ и K° — соответственно угол наклона касательной и кривизна стенки в точке A. Будем полагать, далее, $K(\vartheta)$ четной функцией, что не ограничивает общности, так как ее всегда можно продолжить из области положительных значений аргумента в область отрицательных значений (или наоборот) четным образом. Возьмем в качестве канонической области изменения ζ правый квадрант верхней полуплоскости с соответствием точек, указанным на фиг. 3, при котором все прямолинейные границы течения переходят в мнимую ось η, так что каждому прямолинейному участку границы течения соответствует отрезок σ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ оси η. Угол наклона скорости на прямолинейном участке границы течения, соответствующем отрезку σ_ν, обозначим через ϑ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Положим в равенстве (1.2) $\omega_0 = i$ и примем



Фиг. 3

$$F^\circ(\zeta) = \pi\sigma + 2i\sigma \ln\frac{\zeta}{1 - i\sqrt{\zeta^2 - 1}} + F_0(\zeta)$$

где функция $F_0(\zeta)$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} F_0(i\eta) = \vartheta_\nu, \quad \eta \in \sigma_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n); \quad \operatorname{Re} F_0(\xi) = 0, \quad \xi \in [-1, 1]$$

$$\operatorname{Im} F_0(\xi) = 0, \quad \xi \in [1, \infty]$$

Введем далее функцию

$$\gamma(\xi) = f'(\xi)\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right)^{2\sigma} e^{-\operatorname{Im} F_0(\xi)}, \qquad \xi \in [0, 1]$$

а затем продолжим ее на отрезок $[-1, 0]$ четным образом и обозначим построенную таким способом функцию, изменяющуюся на отрезке $[-1, 1]$, снова через $\gamma(\xi)$.

Продолжим теперь функцию $F(\zeta)$ аналитически на всю верхнюю полуплоскость, учитывая, что она должна удовлетворять условию (1.12); тогда получим для определения $F(\zeta)$ краевую задачу

$$v = 0, \qquad |\xi| \in [1, \infty]; \qquad \frac{du}{d\xi} = \lambda\gamma(\xi) K(u) e^v, \qquad \xi \in [-1, 1] \tag{3.1}$$

где параметр λ дается равенством (1.11). Полученная за является частным случаем основной задачи, когда $\varkappa = 1$, $U(u+\alpha) = K(u)$, $V(v+\beta) = e^v$. Интегральное представление (2.6) для $F(\zeta)$ в этом случае имеет вид $F(\zeta) = \Psi(u|\ \zeta)$, $\xi \in [-1,1]$; откуда $v = -I(u\,|\,\xi)$, $\xi \in [-1, 1]$, и, следовательно, решение полученной задачи сводится к решению уравнения

$$u'(\xi) = \lambda\gamma(\xi) K(u(\xi)) e^{-I(u\,|\,\xi)}, \qquad \xi \in [-1, 1] \tag{3.2}$$

при условии $u(0) = 0$, причем ищется нечетное решение. Возьмем в качестве заданных геометрических параметров величины

$$\tau = K^\circ S_0, \quad \tau_\nu = L_\nu / S_0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{3.3}$$

где L_ν — длины прямолинейных отрезков, которым в плоскости ζ соответствуют отрезки σ_ν оси η. В качестве физического параметра возьмем величину

$$\varkappa_0 = 2(p_\infty - p_0)/\rho V_\infty^2 = V_0^2 / V_\infty^2 - 1 \tag{3.4}$$

которую принято называть числом кавитации; здесь p_∞, p_0, V_∞, V_0 — давление и скорость на бесконечности и на свободной струе соответственно. Обозначим через η_ν и $\eta_{\nu+1}$ концы отрезка σ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, а через η_0—точку оси η, которой в плоскости течения соответствует бесконечно удаленная точка. Введем функции

$$\gamma_\nu(\eta) = \eta^{-2\sigma}(1 + \sqrt{1+\eta^2})^{2\sigma} f'(i\eta)\, e^{-\operatorname{Im} F_0(i\eta)}, \qquad \eta \in \sigma_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

Используя введенные обозначения, нетрудно получить соотношения

$$\tau = \lambda\chi(v, \varepsilon), \qquad \chi(v, \varepsilon) \equiv \int_0^1 |\gamma(\xi)|\, e^{v(\xi, 0)}\, d\xi$$

$$\chi(v, \varepsilon) - \tau_\nu \chi^\nu(v, \varepsilon) = 0, \qquad \chi^\nu(v, \varepsilon) \equiv \int_{\eta_\nu}^{\eta_{\nu+1}} |\gamma_\nu(\eta)|\, e^{v(0, \eta)}\, d\eta \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

$$\varkappa_0 = \eta_0^{-4\sigma}(1 + \sqrt{1+\eta_0^2})^{4\sigma} \exp(-2\operatorname{Im} F_0(i\eta_0) + 2v(0, \eta_0)) \tag{3.5}$$

в которых функции $\gamma(\xi)$, $\gamma_\nu(\xi)$ и величины η_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, вообще говоря, зависят от параметров ε. Соотношения (3.5) представляют собой дополнительные условия, наложенные на параметры λ и ε, которым должно удовлетворять решение задачи (3.1), если оно является решением гидродинамической задачи с заданными параметрами (3.3), (3.4). Напишем интегральное уравнение для $v(\xi) = -I(u\,|\,\xi)$. Для этого заметим, что в случае, когда $u(\xi)$ является четной функцией, ограниченной и не обращающейся в нуль на концах отрезка $[-1, 1]$ и $u(0) = 0$, то оператор, обратный $I(u\,|\,\xi)$, будет $I^{-1}(u\,|\,\xi) = -J(u\,|\,\xi)$ (см. замечание к п. 2.2 в § 2). Заметим также, что путем интегрирования по частям нетрудно получить для $I(u\,|\,\xi)$ формулу

$$I(u\,|\,\xi) = -\int_{-1}^{1} u'(t) H(\xi, t)\, dt, \qquad H(\xi, t) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{|t - \xi|}{1 - \xi t + \sqrt{(1-\xi^2)(1-t^2)}} \tag{3.6}$$

Подставим в равенство (3.6) $u'(t)$ из уравнения (3.2) и введем функцию $v(\xi) = -I(u\,|\,\xi)$. Тогда получим интегральное уравнение

$$v(\xi) = \lambda \int_{-1}^{1} \gamma(t) H(\xi, t) K(J(v\,|\,t))\, e^{v(t)}\, dt$$

которое является частным случаем уравнения (2.11).

Если учесть, что $\operatorname{Re} F(\xi) = v(\xi, 0) = v(\xi)$, $\xi \in [-1, 1]$, и воспользоваться формулой Шварца, то для функции $F(\zeta)$ легко получить интегральное представление $F(\zeta) = \Phi(v\,|\,\zeta)$.

3.2. Струйные течения тяжелой жидкости с прямолинейными границами. Рассмотрим течение тяжелой жидкости, границы которого состоят из конечного числа n прямолинейных твердых стенок и одной свободной поверхности. Ось y направим вертикально вверх. В качестве канонической области переменного ζ возьмем верхнюю полуплоскость с таким соответствием точек, чтобы свободной поверхности соответствовал отрезок $[-1, 1]$ оси ξ, так что остальная часть действительной оси разбивается на отрезки σ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, каждому из которых в плоскости течения соответствует прямолинейный участок границы с углом наклона скорости вдоль него ϑ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Положим в равенстве (1.2) $\omega_0 = 1$ и выберем функцию $F^\circ(\zeta)$ такой, чтобы она удовлетворяла условиям (3.7)

$$\operatorname{Im} F^\circ(\xi) = \vartheta_\nu, \quad \xi \in \sigma_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n); \qquad \operatorname{Re} F^\circ(\xi) = 0, \xi \in [-1, 1]$$

Тогда, учитывая условие (1.16) и вводя функции

$$\gamma(\xi) = f'(\xi), \qquad \beta(\xi) = -\operatorname{Im} F^\circ(\xi), \qquad \xi \in [-1, 1]$$

получим для определения $F(\zeta)$ краевую задачу

$$v = 0, \ |\xi| \in [1, \infty]; \qquad \frac{du}{d\xi} = \lambda\gamma(\xi)\sin(v + \beta(\xi))e^{-3u}, \qquad \xi \in [-1, 1] \tag{3.8}$$

Здесь параметр λ дается равенством (1.15). Полученная задача является частным случаем основной задачи, когда $\varkappa = 1$, $U(u + \alpha) = e^{-3u}$, $V(v + \beta) = \sin(v + \beta)$. Для функции $F(\zeta)$ в этом случае имеет место представление $F(\zeta) = \Psi(u \mid \zeta)$, и, следовательно, решение задачи (3.7) сводится к решению уравнения

$$u'(\xi) = \lambda\gamma(\xi)\sin(-I(u \mid \xi) + \beta(\xi))\, e^{-3u(\xi)}, \qquad \xi \in [-1, 1] \tag{3.9}$$

при условии (2.9). Возьмем в качестве заданных параметров

$$\tau = gL_0 / V_\infty, \qquad \tau_\nu = L_\nu / L_0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{3.10}$$

где L_0 — характерный размер, в качестве которого будет браться величина абсциссы или ординаты одной из точек A или B свободной поверхности, V_∞ — скорость на бесконечности, L_ν — длины прямолинейных отрезков, которым в плоскости ζ соответствуют отрезки $\sigma_\nu = [\xi_\nu, \xi_{\nu+1}]$ оси ξ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Предположим, что скорость на бесконечности параллельна оси абсцисс и что точке $z = \infty$ соответствует точка $\zeta = \infty$. Введем функцию

$$\gamma_\nu(\xi) = f'(\xi)\, e^{\operatorname{Re} F^\circ(\xi)}, \qquad \xi \in \sigma_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

Используя введенные обозначения, нетрудно получить соотношения

$$\tau\chi_0(u, \varepsilon) - \lambda\chi(u, v, \varepsilon) = 0; \qquad \chi_0(u, \varepsilon) = \exp(F(\infty) - F^\circ(\infty))$$

$$\tau_\nu\chi(u, v, \varepsilon) - \chi^\nu(u, \varepsilon) = 0, \quad \chi^\nu(u, \varepsilon) \equiv \int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} |\gamma_\nu(\xi)|\, e^{-u(\xi, 0)}\, d\xi \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

$$\chi(u, v, \varepsilon) \equiv \pm \int_{-1}^{1} \gamma(\xi)\, e^{-u(\xi, 0)} \sin\left(\frac{\pi\sigma}{2} - \beta(\xi) - v(\xi, 0)\right) d\xi \tag{3.11}$$

в которых $\sigma = 0$ или $\sigma = 1$ в зависимости от того, является ли L_0 длиной ординаты или абсциссы, а знак перед интегралом выбирается так, чтобы выполнялось условие $\chi(u, v, \varepsilon) > 0$. Соотношения (3.11) представляют собой дополнительные условия, наложенные на λ и ε, которым должно удовлетворять решение задачи (3.8), если оно является решением гидродинамической задачи с заданными параметрами (3.10).

Пусть искомая функция $u(\xi)$ ограничена и не обращается в нуль на концах отрезка $[-1, 1]$. Тогда оператор, обратный $I(u \mid \xi)$, при условии (2.9) имеет вид $I^{-1}(u \mid \xi) = -J(u \mid \xi) + J(u \mid \xi_0)$ (см. замечание к п. 2.2 в § 2). Учитывая это, а также (3.6), получим интегральное уравнение для функции $v(\xi) = -I(u \mid \xi)$

$$v(\xi) = \lambda \int_{-1}^{1} \gamma(t) H(\xi, t) \sin(v(t) + \beta(t)) e^{-3(J(v \mid t) - J(v \mid \xi_0))}\, dt, \qquad \xi \in [-1, 1]$$

в котором $H(\xi, t)$ — функция, входящая в равенство (3.6). Интегральное представление, выражающее функцию Жуковского через функцию $v(\xi)$, в данном случае имеет вид $F(\zeta) = i\Phi(v \mid \zeta) - J(v \mid \xi_0)$.

Умножим уравнение (3.9) на $e^{-3u(\xi)}$, а затем возьмем интеграл от обеих частей полученного равенства, выбирая постоянную интегрирования из условия (2.9). Тогда после дифференцирования по ξ будем иметь

$$u'(\xi) = \frac{\lambda\gamma(\xi)\sin(-I(u\mid\xi) + \beta(\xi))}{1 + 3\lambda\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\gamma(\tau)\sin(-I(u\mid\tau) + \beta(\tau))\,d\tau}$$

Подставим найденное выражение для $u'(\xi)$ в равенство (3.6) и введем функцию $v(\xi) = -I(u\mid\xi)$. В результате получим интегральное уравнение

$$v(\xi) = \lambda\int\limits_{-1}^{1}\frac{\gamma(t)H(\xi, t)\sin(v(t) + \beta(t))}{1 + 3\lambda\int\limits_{\xi_0}^{t}\gamma(\tau)\sin(v(\tau) + \beta(\tau))\,d\tau}\,dt, \qquad \xi\in[-1, 1]$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (2.12).

3.3. Струйные течения с прямолинейными границами при наличии действия капиллярных сил. Рассмотрим течение невесомой жидкости, границы которой состоят из конечного числа n прямолинейных твердых стенок и одной свободной поверхности, на которую действуют капиллярные силы. Каноническую область и соответствие точек выберем так же, как и в предыдущем течении. Положим $\omega_0 = -i$ в равенстве (1.2) и подчиним функцию $F^\circ(\zeta)$ условиям

$$\operatorname{Re}F^\circ(\xi) = -\vartheta_\nu, \quad \xi\in\sigma_\nu\ (\nu = 1,\ldots,n); \qquad \operatorname{Im}F^\circ(\xi) = 0, \quad \xi\in[-1, 1]$$

Здесь ϑ_ν и σ_ν то же, что и в (3.7). Введем функции

$$\gamma(\xi) = f'(\xi), \qquad \delta(\xi) = \operatorname{Re}F^{\circ\prime}(\xi), \qquad \xi\in[-1, 1]$$

и параметры λ и μ, определяемые равенствами (1.19). Используя введенные обозначения и учитывая условие (1.20), получим для определения $F(\zeta)$ краевую задачу

$$u = 0, \quad |\xi|\in[1, \infty]; \qquad \frac{du}{d\xi} = -\lambda\gamma(\xi)\left(\operatorname{sh}v - \frac{1}{2}\mu e^{-v}\right) + \delta(\xi), \quad \xi\in[-1, 1] \tag{3.12}$$

Полученная задача является частным случаем основной задачи, когда $\varkappa = -1$, $U(u + \alpha)\equiv 1$, $V(v + \beta) = -\operatorname{sh}v + {}^1\!/_2\mu e^{-v}$. В этом случае для функции $F(\zeta)$ имеет место интегральное представление $F(\zeta) = \Phi(u\mid\zeta)$, откуда $v = -J(u\mid\xi)$, $\xi\in[-1, 1]$, и, следовательно, решение задачи (3.12) сводится к решению уравнения

$$u'(\xi) = \lambda\gamma(\xi)\left(\operatorname{sh}J(u\mid\xi) + {}^1\!/_2\,\mu e^{J(u\mid\xi)}\right) + \delta(\xi), \qquad \xi\in[-1, 1] \tag{3.13}$$

при условии (2.9). Дополнительные условия на параметры λ, ε для задачи (3.12) будут такого же типа, как и условия (3.5), (3.11) для задач (3.1), (3.8). Предположим, что искомая функция $u(\xi)$ уравнения (3.13) обращается в нуль на концах отрезка $[-1, 1]$. В этом случае после интегрирования по частям будем иметь для $J(u\mid\xi)$ формулу

$$J(u\mid\xi) = -\int\limits_{-1}^{1}u'(t)\ln|\xi - t|\,dt \tag{3.14}$$

Подставим в равенство (3.6) $u'(t)$ из уравнения (3.13) и введем функцию $v(\xi) = -J(u\mid\xi)$. Тогда получим интегральное уравнение

$$v(\xi) = \lambda\int\limits_{-1}^{1}\gamma(t)\left(\frac{1}{2}\mu e^{-v(t)} - \operatorname{sh}v(t)\right)\ln|\xi - t|\,dt + \delta^*(\xi), \qquad \xi\in[-1, 1]$$

$$\delta^*(\xi) = -\int\limits_{-1}^{1}\delta(t)\ln|\xi - t|\,dt.$$

Интегральное представление, выражающее функцию Жуковского через функцию $v(\xi)$, в данном случае имеет вид $F(\zeta) = i\Psi(v\mid\zeta)$.

Поступила 6 IX 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. Физматгиз, 1961.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
4. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.