

УДК 531.01+531.552

К ЗАДАЧЕ О СВОБОДНОМ ТОРМОЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

М. В. Шамолин

Институт механики Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова, 119192 Москва, Россия
E-mail: shamolin@rambler.ru

С учетом дополнительной зависимости момента силы воздействия среды от угловой скорости тела исследуется математическая модель воздействия среды на твердое тело, часть внешней поверхности которого является плоской. Приводится полная система уравнений движения в условиях квазистационарности, динамическая часть которой образует независимую систему третьего порядка, с выделением из нее независимой подсистемы второго порядка. Получено новое семейство фазовых портретов на фазовом цилиндре квазискоростей. Показано, что полученные результаты позволяют сконструировать полые круговые цилиндры — “гильзы”, использование которых может обеспечить необходимую устойчивость при проведении дополнительных натуральных экспериментов.

Ключевые слова: твердое тело, сопротивляющаяся среда, уравнения движения, фазовый портрет.

DOI: 10.15372/PMTF20160405

Введение. Задача о движении тела в сопротивляющейся среде (например, о падении тела в воздухе) вызывает интерес исследователей на протяжении нескольких столетий. Так, опыты по исследованию движения тела в воздухе и жидкости позволили Х. Гюйгенсу установить эмпирический закон, в котором сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости движения тела в воздухе. И. Ньютон на основе опытов создал математическую теорию движения тел в воздухе при наличии сопротивления, разработку которой продолжили в XVIII в. П. Вариньон, Д. Бернулли, Ж. Д’Аламбер, Л. Эйлер и др.

Н. Е. Жуковский в предположении, что кинетическая энергия падающего тела расходуется на образование вихревых движений воздуха, а также на преодоление молекулярных сил прилипания воздуха к движущемуся телу, что сопротивление зависит не только от скоростей движения точек тела, но и от формы самого тела, совершенствовал модель взаимодействия движущегося тела со средой. В работе [1] Н. Е. Жуковский на основе экспериментальных данных предпринял попытку моделировать движение вращающихся падающих в воздухе пластин. В работах [2, 3] С. А. Чаплыгин исследовал задачу о движении тяжелого тела в несжимаемой жидкости, а также задачу о движении пластины бесконечной длины в условиях струйного обтекания, послужившую основой для дальнейшего исследования движения тела, взаимодействующего со средой через плоский участок [4, 5]. В указанных работах решения получены в явном виде.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-01-00848-а).

© Шамолин М. В., 2016

Динамические эффекты, связанные с влиянием присоединенных масс (классическая задача Кирхгофа), обсуждаются в [6] на примере движения тела в виде пластины в жидкости. Большой интерес представляет изучение условий интегрируемости нелинейной системы уравнений движения и существования ее первых интегралов в задаче Кирхгофа [4, 5, 7].

Также представляет интерес анализ систем дифференциальных уравнений, описывающих движение твердых тел (расслоение фазового пространства, качественное расположение фазовых траекторий и т. д.).

Заметим, что трудности при исследовании движения тела под действием силы сопротивления обусловлены отсутствием полного описания силы, поскольку она зависит и от обобщенных скоростей. Поэтому в динамических уравнениях возможно наличие членов, характеризующих как рассеяние энергии (диссипацию), так и ее подкачку.

Случай, когда тело взаимодействует со средой через плоскую поверхность, анализировался ранее. Так, в [8] построен фазовый портрет физического маятника, помещенного в поток среды. Динамическая система, описывающая движение маятника, обладает нелинейными свойствами, что определяет необходимость ее полного нелинейного анализа и создания методики исследования. В работах [9, 10] исследовалась устойчивость прямолинейных движений свободного тела при струйном обтекании.

1. Постановка задачи. В настоящей работе изучается задача о движении тела в силовом поле, в котором линия действия силы, приложенной к телу, не меняет свою ориентацию относительно тела. Подобные условия возникают при движении тела с так называемыми большими углами атаки в среде при струйном [2, 11] или отрывном [12] обтекании. Основным объектом исследования является семейство тел, на поверхности которых имеется плоский участок, обтекаемый средой по законам струйного обтекания. При этом поток среды полагается однородным.

Предположим, что однородное твердое тело массой m совершает плоскопараллельное движение в среде и некоторая часть внешней поверхности тела является плоской и находится в условиях струйного обтекания средой. Это означает, что среда воздействует на тело с силой \mathbf{S} , приложенной в точке N (рис. 1). Остальная часть поверхности тела может быть размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края пластины, и не испытывает воздействия среды.

Свяжем с телом систему координат Dxy (см. рис. 1). Предположим, что координата y_N точки N приложения силы воздействия среды определяется, по крайней мере, одним параметром — углом атаки α , измеряемым между вектором скорости точки D относительно потока и осью симметрии Dx : $y_N = R(\alpha, \dots)$. Будем полагать, что сила сопротивления \mathbf{S} (см. рис. 1) пропорциональна квадрату скорости точки D : $\mathbf{S} = s(\alpha)v^2\mathbf{e}_x$, $|\mathbf{v}_D| = v$. Таким образом, пара функций R, s определяет воздействие среды на твердое тело в условиях квазистационарности [2, 11].

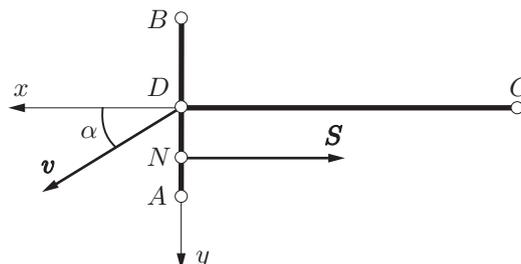


Рис. 1. Схема воздействия среды на твердое тело

2. Основной режим движения. Предположим, что среди режимов движения тела существует режим прямолинейного поступательного движения с торможением. Это возможно при выполнении двух условий: 1) векторы скорости всех точек тела параллельны оси Dx ; 2) перпендикуляр, опущенный из центра масс C тела на ось Dy , принадлежит линии действия силы \mathbf{S} . Если провести ось Dz перпендикулярно плоскости рис. 1 и считать Dzx плоскостью геометрической симметрии тела, то это обеспечит выполнение условия 2 при движении, удовлетворяющем условию 1.

Для построения динамической модели введем первые три фазовые координаты: v — величина скорости точки D относительно потока (см. рис. 1), α — угол (атаки) между вектором \mathbf{v}_D скорости точки D и осью Dx , Ω — проекция абсолютной угловой скорости тела на ось Dz .

Коэффициент лобового сопротивления s обычно представляется в виде $s = (1/2)\rho P c_x$, где c_x — безразмерный коэффициент лобового сопротивления; ρ — плотность среды; P — площадь пластины. Эти коэффициенты зависят от угла атаки, числа Струхала и других величин, которые в статических моделях обычно считаются параметрами задачи. В настоящей работе вводится безразмерная фазовая переменная типа переменной Струхала $\omega = \Omega D_1/v$ (D_1 — характерный размер). Таким образом, в дальнейшем в уравнениях движения появляются две функции фазовых переменных R и s , которые назовем функциями воздействия среды.

Ограничимся зависимостью коэффициента c_x от угла атаки, т. е. будем считать величину s функцией α , а величину R — функцией безразмерных переменных α, ω .

Задача о движении тела в режиме, близком к основному режиму, т. е. с малыми углами атаки, описывается нелинейными динамическими системами, исследуемыми далее. Поскольку основной режим задается уравнениями $\alpha(t) \equiv 0, \omega(t) \equiv 0$, функцию R при малых α, ω примем в виде $R = D_1(k\alpha - h\omega)$, где k, h — некоторые постоянные; D_1 — характерный размер. Зависимостью $s(\alpha)$, в силу геометрической симметрии тела обеспечивающей четность функции s , пренебрегаем. Таким образом, линеаризованная модель силового воздействия среды содержит параметры s, k, h , которые определяются формой плоского участка поверхности, взаимодействующего со средой. Коэффициент s является размерным, параметры k, h — безразмерными в силу способа их введения.

Заметим, что параметры s, k можно определить экспериментально путем измерений в установках типа гидро- или аэродинамических труб. В литературе имеется также информация о теоретическом определении этих величин для отдельных случаев, позволяющая считать $k > 0$ (см., например, [9–11, 13]). Необходимость введения в модель параметра h , который вносит в систему дополнительную зависимость момента силы от угловой скорости, априори не очевидна [14].

Начало изучению свойств движения рассматриваемых классов тел в Институте механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова было положено экспериментами по регистрации движения в воде однородных круговых цилиндров [15, 16]. Результаты этих экспериментов позволили определить безразмерные параметры воздействия среды на твердое тело и сделать следующие выводы. Режим прямолинейного поступательного движения с торможением тела (в воде) неустойчив, по крайней мере относительно угла ориентации тела. При моделировании воздействия среды на тело необходимо учитывать дополнительный параметр, эквивалентный так называемой вращательной производной момента аэрогидродинамических сил по угловой скорости тела. Этот параметр вносит в систему диссипацию.

В работе [17] дана оценка коэффициента демпфирующего момента для тел с передним плоским участком для некоторых случаев движения в воде, свидетельствующая о неустойчивости по углу атаки и угловой скорости невозмущенного движения в воде. Увеличивая

коэффициент демпфирования, можно добиться устойчивости данного движения. При этом согласно экспериментальным данным [18] прямолинейное движение твердого тела в некоторых средах (например, в глине) является устойчивым, что обусловлено значительным демпфированием со стороны среды или наличием в системе сил, касательных к пластине.

Для конусов различной формы углы атаки могут принимать практически любое значение из интервала $(0, \pi/2)$, и лишь при углах, близких к $\pi/2$, неизбежен так называемый замыв боковой поверхности. Поэтому возникает необходимость продолжения функций R и s воздействия среды по крайней мере на конечные углы атаки, т. е. “расширения” их области определения на интервал $(0, \pi/2)$. В настоящей работе данные функции будем продолжать на всю числовую прямую [4, 5].

В соответствии с [3] если бесконечная пластина движется в среде по законам струйного обтекания, то сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости центра пластины с коэффициентом пропорциональности, пропорциональным косинусу угла атаки, и расстоянием от центра давления до центра пластины, пропорциональным его синусу.

3. Динамические уравнения и функции воздействия среды. Нелинейные динамические уравнения плоскопараллельного движения тела представим в виде

$$\dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha + \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 = -s(\alpha)v^2/m; \quad (1)$$

$$\dot{v} \sin \alpha + \dot{\alpha} v \cos \alpha - \Omega v \cos \alpha + \sigma \dot{\Omega} = 0; \quad (2)$$

$$I \dot{\Omega} = -F(\alpha)v^2 - h_1 \Omega v, \quad (3)$$

где I , m — центральный момент инерции и масса тела; σ — расстояние CD (C — центр масс) (см. рис. 1); $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$; коэффициент $h_1 > 0$ характеризует дополнительный момент, зависящий от угловой скорости [15–17].

Для качественного описания пары функций $R(\alpha)$, $s(\alpha)$ используем экспериментальную информацию о свойствах струйного обтекания. Вводимые классы достаточно широки и состоят из достаточно гладких 2π -периодических функций (s — четная, R — нечетная), удовлетворяющих следующим условиям: $R(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причем $R'(0) > 0$, $R'(\pi) < 0$ (класс функций $\{R\}$); $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причем $s(0) > 0$, $s'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{s\}$). При замене α на $\alpha + \pi$ R и s меняют знак, таким образом, $R \in \{R\}$, $s \in \{s\}$. Аналитические функции

$$R = R_0(\alpha) = A \sin \alpha \in \{R\}, \quad s = s_0(\alpha) = B \cos \alpha \in \{s\}, \quad A, B > 0 \quad (4)$$

являются типичными функциями описанных выше классов.

В дальнейшем в рассматриваемых динамических системах появляется произведение $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$. Из указанных выше условий следует, что F — достаточно гладкая нечетная π -периодическая функция, удовлетворяющая условиям: $F(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $F'(0) > 0$, $F'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{F\}$). Таким образом, $F \in \{F\}$.

Итак, для исследования обтекания средой тела конусообразной формы используются классы динамических систем, определенные с помощью пары функций воздействия среды, что значительно усложняет проведение качественного анализа.

У системы (1)–(3) третьего порядка возможно отщепление независимой подсистемы второго порядка. Действительно, система (1)–(3) является эйлеровой однородной системой второй степени относительно квазискоростей (Ω, v) , поскольку после замены независимой переменной (времени t) по формуле $dq = v dt$, $v \neq 0$ ($\langle \cdot \rangle = d/dt = v d/dq = v \langle' \rangle$) получаем новую систему, эквивалентную (1)–(3) ($\varphi' = \omega$):

$$v' = v \Psi_1(\alpha, \omega); \quad (5)$$

$$\alpha' = \omega + \frac{\sigma}{I} \psi(\alpha, \omega) \cos \alpha + \sigma \omega^2 \sin \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha; \quad (6)$$

$$\omega' = -\frac{1}{I} \psi(\alpha, \omega) - \omega \Psi_1(\alpha, \omega); \quad (7)$$

$$\psi(\alpha, \omega) = F(\alpha) + h_1 \omega, \quad \Psi_1(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I} \psi(\alpha, \omega) \sin \alpha - \sigma \omega^2 \cos \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha.$$

В системе (5)–(7) третьего порядка появляется независимая подсистема (6), (7) второго порядка, которую можно рассматривать отдельно на ее фазовом цилиндре $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$.

4. Трехпараметрическое семейство систем в пространстве квазискоростей.

Исследуем систему

$$\begin{aligned} \alpha' &= \omega + \frac{\sigma}{I} AB \sin \alpha \cos^2 \alpha + \frac{\sigma}{I} h_1 \omega \cos \alpha + \sigma \omega^2 \sin \alpha + \frac{B}{m} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \omega' &= -\frac{AB}{I} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{h_1}{I} \omega - \frac{\sigma}{I} AB \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha - \\ &\quad - \frac{\sigma}{I} h_1 \omega^2 \sin \alpha + \sigma \omega^3 \cos \alpha + \frac{B}{m} \omega \cos^2 \alpha, \end{aligned} \quad (8)$$

полученную из (6), (7) при условиях (4).

Переходя к безразмерным параметрам $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и дифференцированию в соответствии с формулами $q = Q\sigma, \bar{\omega} = \omega\sigma, d/dQ = \sigma d/dq, [Q] = [\bar{\omega}] = 1, \beta_1 = \sigma^2 AB/I, \beta_2 = \sigma h_1/I, \beta_3 = B\sigma/m$, опуская черту над безразмерной переменной $\bar{\omega}$ и обозначая штрихом производную по безразмерной величине Q , систему (8) запишем в виде

$$\begin{aligned} \alpha' &= \omega + \beta_1 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \beta_2 \omega \cos \alpha + \omega^2 \sin \alpha + \beta_3 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \omega' &= -\beta_1 \sin \alpha \cos \alpha - \beta_2 \omega - \beta_1 \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha - \beta_2 \omega^2 \sin \alpha + \omega^3 \cos \alpha + \beta_3 \omega \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (9)$$

Безразмерные параметры $\beta_k, k = 1, 2, 3$ назовем следующим образом: β_1 — параметр момента силы (лобового) сопротивления, β_2 — параметр дополнительного демпфирующего момента, β_3 — параметр силы (лобового) сопротивления. Таким образом, имеем трехпараметрическое семейство систем (9) на двумерном фазовом цилиндре $\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: \alpha \bmod 2\pi\}$.

В фазовом пространстве системы (9) точки покоя могут являться проекциями неособых фазовых траекторий трехмерного фазового пространства системы (5)–(7), у которой имеются положения равновесия, заполняющие одномерные многообразия.

Определение точек покоя предполагает определение точек покоя соответствующей системы третьего порядка в фазовом пространстве $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ и точек покоя укороченной системы (9) на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ или на двумерном цилиндре $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$.

Система (9) имеет точки покоя на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$, которые задаются следующими соотношениями:

$$\alpha = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \omega = 0; \quad (10)$$

$$\alpha = (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \omega = 0; \quad (11)$$

$$\alpha = \pi/2 + l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \omega = 0; \quad (12)$$

$$\alpha = \pi/2 + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \omega = -1; \quad (13)$$

$$\alpha = -\pi/2 + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \omega = 1. \quad (14)$$

Системы (10), (11) (и только они) задают точки, в которые ортогонально проецируются частные решения системы (5)–(7) вида

$$v(q) = v^0 \exp(-\varkappa q), \quad \varkappa > 0, \quad \alpha(q) \equiv s\pi, \quad s \in \mathbb{Z}, \quad \omega(q) \equiv 0,$$

при четном s соответствующие прямолинейному поступательному движению с торможением.

Точки покоя (см. (10)–(14)) назовем явными положениями равновесия (ЯПР). Наряду с ЯПР могут существовать точки покоя, соответствующие нетривиальным частным решениям системы (5)–(7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Неявными положениями равновесия (НПР) системы (9) на плоскости называются точки покоя, не лежащие на прямых

$$\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: \omega \sin \alpha \cos \alpha = 0\}.$$

Предложение 1. При

$$\beta_1 < 4 \tag{15}$$

и достаточно малом β_2 НПР не существуют.

При $\beta_1 \geq 4$ НПР могут существовать. При выполнении неравенства (15) справедливы следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. У системы (5)–(7) при условиях (4) существуют частные решения вида

$$\begin{aligned} v(q) &= v^0 \exp(-\varkappa q), \quad \varkappa > 0, \quad v^0 = v(0), \\ \alpha(q) &\equiv \alpha^0 = \alpha(0) \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \omega(q) \equiv \omega^0 \neq 0. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2. У системы (1)–(3) при условиях (4) существуют частные решения вида

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{v_0}{1 + v_0 \varkappa t}, \quad \varkappa > 0, \quad v_0 = v(0), \\ \alpha(t) &\equiv \alpha_0 = \alpha(0) \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \Omega(t) &= \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\Omega_0}{1 + v_0 \varkappa t}, \quad \Omega_0 = \Omega(0), \end{aligned} \tag{16}$$

при этом

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0 + \frac{\Omega_0}{v_0 \varkappa} \ln(1 + v_0 \varkappa t), \\ x(t) &= x_0 + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\alpha_0 + \varphi_0) - \frac{v_0}{\omega_0} \sin\left(\alpha_0 + \varphi_0 + \frac{\Omega_0}{v_0 \varkappa} \ln(1 + v_0 \varkappa t)\right), \\ y(t) &= y_0 - \frac{v_0}{\omega_0} \cos(\alpha_0 + \varphi_0) + \frac{v_0}{\omega_0} \cos\left(\alpha_0 + \varphi_0 + \frac{\Omega_0}{v_0 \varkappa} \ln(1 + v_0 \varkappa t)\right), \\ x_0 &= x(0), \quad y_0 = y(0). \end{aligned} \tag{17}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Траектория движущейся на плоскости $\mathbb{R}^2\{x, y\}$ точки D , соответствующая частным решениям (16), (17) системы (1)–(3), представляет собой окружность с центром в точке

$$\left(x_0 + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\alpha_0 + \varphi_0), y_0 - \frac{v_0}{\omega_0} \cos(\alpha_0 + \varphi_0)\right)$$

и радиусом v_0/Ω_0 .

Предложение 2. При достаточно малом $\beta_2 > 0$:

1) точки покоя (10) являются отталкивающими точками;

2) точки покоя (11) при $\beta_1 > 2\beta_4$ являются притягивающими, при $\beta_1 < 2\beta_4$ — отталкивающими;

3) точки покоя (12) являются седлами;

4) точки покоя (13), (14) являются притягивающими точками.

Поскольку от системы третьего порядка (5)–(7) отделяется независимая подсистема второго порядка (6), (7) (а в дальнейшем и система (9)), фазовые траектории в $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ лежат на поверхностях, являющихся двумерными цилиндрами. В частности, если первый интеграл системы (9) существует во всем фазовом пространстве, то он является функцией переменных (α, ω) и задает семейство цилиндров в $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$.

Вследствие вышеописанной редукции фазовый портрет системы (6), (7) (а в дальнейшем и системы (9)) удобнее строить в $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ с помощью фазового портрета системы (9) в $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$, который не является частью портрета в $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ в теоретико-множественном смысле, а представляет собой ортогональную проекцию портрета на плоскость $\{v = \text{const}\}$. Поэтому возможны поднятие фазовых траекторий с плоскостей в пространство $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ и получение фазовых портретов системы третьего порядка.

Поскольку $v > 0$, движение возможно лишь в области $B' = \{(\alpha, \omega, v) \in \mathbb{R}^3: v > 0\}$. Выполняя замену переменных в области B' по формуле $\bar{p} = \ln v$, получаем векторное поле в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3\{\alpha, \omega, \bar{p}\}$, которое не зависит от \bar{p} и ортогонально проецируется на все семейство плоскостей $\{v = \text{const}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для полного решения задачи о поднятии траекторий в трехмерное фазовое пространство необходимо определить знак проекции векторного поля в $\mathbb{R}^3\{\alpha, \omega, \bar{p}\}$ на \bar{p} -ось либо на v -ось в области B' .

Рассмотрим поверхность $M = \{(\alpha, \omega, v) \in B': \Psi_1(\alpha, \omega) = 0\}$ (функция Ψ_1 определена в (5)). Данная поверхность является цилиндром, разрезающим фазовое пространство на области, в каждой из которых проекция векторного поля на v -ось имеет определенный знак. Непосредственно на поверхности M (и только на ней) проекция векторного поля на v -ось обращается в нуль.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для любых $R \in \{R\}$, $s \in \{s\}$ векторное поле системы (6), (7) (или (9)) обладает свойством центральной симметрии относительно точек $(\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. в координатах (α, ω) векторное поле системы меняет направление при замене

$$\begin{pmatrix} \alpha + \pi k \\ \omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\alpha + \pi k \\ -\omega \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Исследуем динамические системы, для которых выполняется равенство (15), при этом будем полагать, что параметр β_2 достаточно мал. Таким образом, сначала рассмотрим случай отсутствия НПР. В общем пространстве физически допустимых параметров $M^3 = \{(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3: \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \beta_3 > 0\}$ прежде всего будем изучать область $J^3 = \{(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in M^3: \beta_1 < 4\}$, при этом параметр $\beta_2 > 0$ достаточно мал.

Введем семейство полос на плоскости: $\Pi_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\}$, при этом $\Pi_{(-\pi/2, \pi/2)} = \Pi$, $\Pi_{(\pi/2, 3\pi/2)} = \Pi'$. У системы (9) существуют уходящие на бесконечность на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ траектории, α - и ω -предельными множествами которых являются бесконечно удаленные точки $(-(2k + 1)\pi + 0, +\infty)$, $(2k\pi - 0, +\infty)$, $((2k + 1)\pi - 0, -\infty)$, $(-2k\pi + 0, -\infty)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим систему (9) на множестве $\Pi_{(-\pi, 0)} \cap \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: \omega > 0\}$. Тогда существует единственная траектория, имеющая в качестве ω -предельного множества точку $(-0, +\infty)$, а также существует единственная траектория, имеющая в качестве α -предельного множества точку $(-\pi + 0, +\infty)$.

При достаточно малом $\beta_2 > 0$ у системы (9) отсутствуют замкнутые фазовые характеристики, охватывающие фазовый цилиндр $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$ [4, 5]. Заметим, что в

силу 2π -периодичности векторного поля системы по α последняя задача сводится к отысканию замкнутых траекторий или замкнутых кривых из траекторий лишь вокруг точек покоя с индексом 1. Таким образом, предельные циклы могут существовать только лишь вокруг точек покоя (10), (11), (13), (14).

Вокруг точек покоя (10), (13), (14) не существует замкнутых кривых, составленных из траекторий системы (9). Наличие замкнутых кривых вокруг точек покоя (11) свидетельствует о том, что при некоторых условиях такие кривые существуют, а при некоторых — нет. При этом пространство параметров J^3 системы (9) разбивается на два множества: $J^3 = J_0 \cup J_1$ относительно предельного цикла в полосе Π' . Для параметров из множества J_0 у системы (9) не существует замкнутых кривых, составленных из траекторий системы (9), для параметров из множества J_1 у системы (9) могут существовать предельные циклы. Оба множества имеют конечную меру.

Рассмотрим систему (9) для случая параметров из множества J_0 при выполнении неравенства

$$\beta_1 < 2\beta_3. \quad (18)$$

Устойчивая сепаратриса в полосе Π для точки $(-\pi/2, 0)$ в качестве α -предельного множества имеет начало координат.

При рассматриваемых условиях у системы (9) в полосе Π не существует замкнутых кривых, составленных из траекторий.

В предположении, что выполнено неравенство (18), а β_2 достаточно мало, сепаратриса, входящая в точку $(-\pi/2, 0)$ в полосе Π' , имеет в качестве α -предельного множества точку $(-\pi, 0)$.

Рассмотрим поведение сепаратрис, выходящих из точки $(-\pi/2, 0)$ в полосу Π и из точки $(\pi/2, 0)$ в полосу $\Pi_{(\pi/2, \pi)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Индексом сепаратрисного поведения (ИСП) называется пара $k = (k_1, k_2)$, где $k_1 \in \mathbb{N}_0 \cup \{l + 1/4, l \in \mathbb{N}_0\}$; значение k_2 выбирается неоднозначно и может быть равно

$$k_2 = \begin{cases} k_1 - 1/2, & k_1 \in \mathbb{N}, \\ k_1 + 1/2, & k_1 \in \mathbb{N}_0, \\ k_1 - 1/4, & k_1 \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$k_2 = k_1 + 1/4$ при $k_1 \notin \mathbb{N}_0$. По определению $k = (k_1, k_2)$, если сепаратриса, выходящая из точки $(-\pi/2, 0)$ в полосу Π , имеет в качестве ω -предельного множества точку, отстоящую от точки $(-\pi/2, 0)$ на $2\pi k_1$ по оси α , а сепаратриса, выходящая из точки $(\pi/2, 0)$ в полосу $\Pi_{(\pi/2, \pi)}$, имеет в качестве ω -предельного множества точку, отстоящую от точки $(\pi/2, 0)$ на $2\pi k_2$ по оси α .

Теорема. *Определение для ИСП корректно, т. е. для любого k из области определения возможно соответствующее поведение рассматриваемых сепаратрис.*

В силу теоремы можно провести полную классификацию фазовых портретов системы (9), когда ее параметры пробегают рассматриваемую выше область. Таких портретов бесконечно много. Укажем первые десять значений индекса k : $(0, 1/2)$, $(1/4, 1/2)$, $(1, 1/2)$, $(1, 3/4)$, $(1, 3/2)$, $(5/4, 3/2)$, $(2, 3/2)$, $(2, 7/4)$, $(2, 5/2)$, $(9/4, 5/2)$. Первые три из них приведены на рис. 2.

5. Подготовка данных для проведения натуральных экспериментов. В задаче о входе в воду однородных круговых цилиндров значения их физических параметров, при которых основной режим может стать устойчивым, связаны соотношением

$$h \frac{mD^2}{I} - 2 - k \frac{m\sigma D}{I} > 0, \quad (19)$$

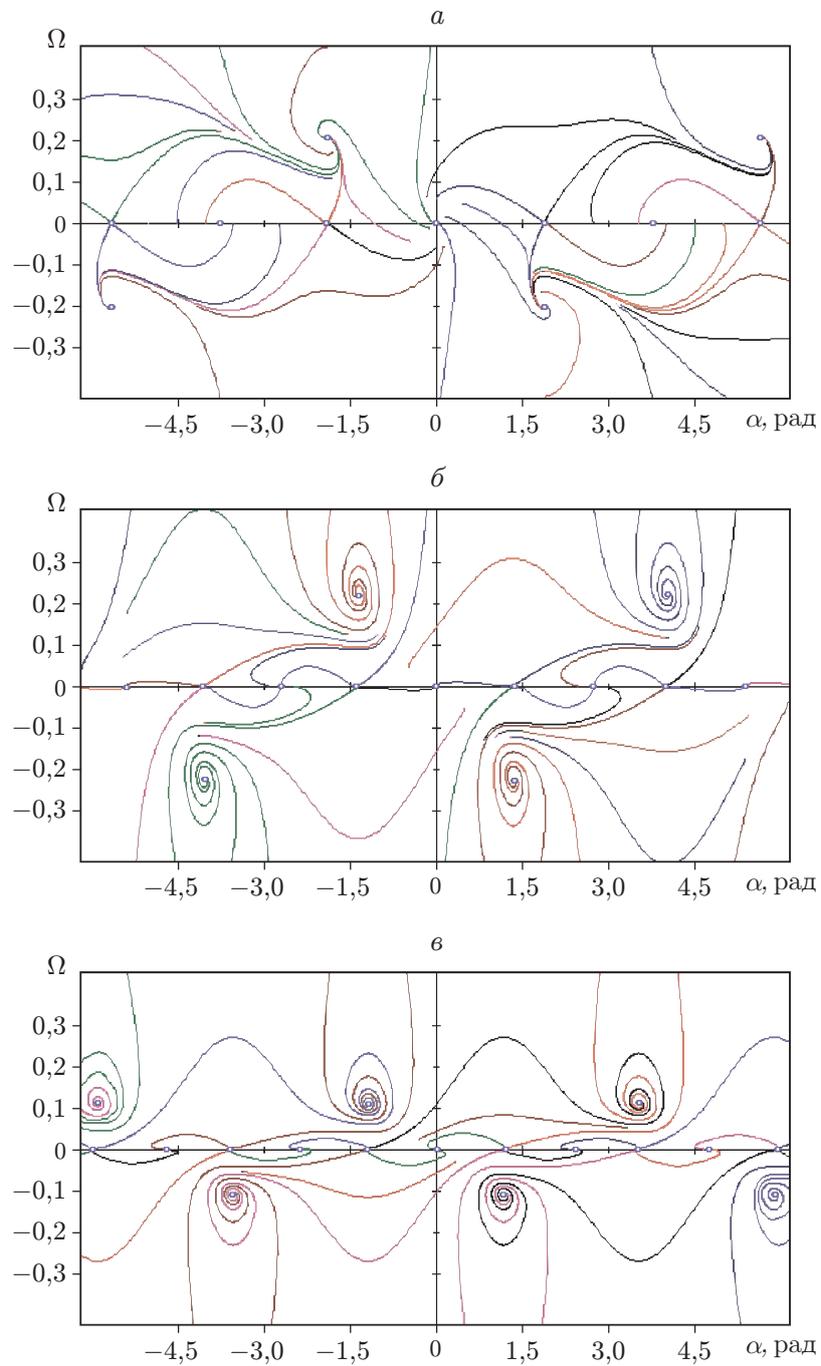


Рис. 2. Фазовые портреты системы (9) при различных значениях ИСП:
a — $k = (0, 1/2)$, *б* — $k = (1/4, 1/2)$, *в* — $k = (1, 1/2)$

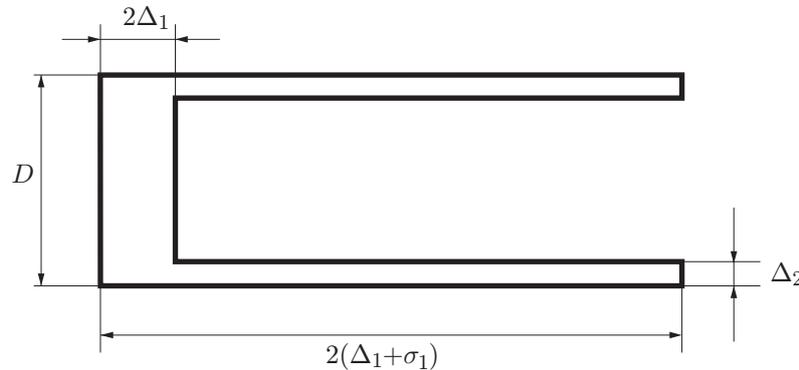


Рис. 3. Сечение полого цилиндра (“гильзы”)

где D — диаметр кругового цилиндра; σ — расстояние от центра масс до переднего торца; постоянные k, h — безразмерные параметры воздействия среды на цилиндр (см. [15, 16]). При этом если величина в левой части неравенства (19) равна нулю, имеет место критический случай.

Для параметров k, h воздействия воды на тело с передним круглым торцом была принята оценка $k = h = 0,1$. Таким образом, условие (19) позволяет “сконструировать” твердое тело — круговой цилиндр, для которого основной режим может стать устойчивым. Для этого необходимо выбрать параметры σ, D, I, m цилиндра исходя из условия (19).

Из неравенства (19) можно сделать следующий вывод: инерционно-массовые параметры однородных цилиндров таковы, что при $h = 0,1$ неравенство (19) не выполняется. Действительно, при $h = 0,1$ левая часть (19) имеет вид

$$F_1(k, h, m, I, \sigma, D)|_{k=h=0,1} = h \frac{mD^2}{I} - 2 - k \frac{m\sigma D}{I}|_{k=h=0,1} = F_2(\sigma, D),$$

а правая часть с точностью до положительного множителя принимает отрицательное значение $-3D^2 - 12\sigma D - 80\sigma^2$, что соответствует экспоненциальной неустойчивости основного режима.

Более того, при изменении значения h левая часть (19) может быть равна нулю лишь при наименьшем критическом значении h_* :

$$\left(10h_* - \frac{5}{4}\right) - \bar{\sigma} - \frac{20}{3}\bar{\sigma}^2 = 0, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{D}, \quad (20)$$

превышающем принятое ранее значение $h = 0,1$ и равном

$$h_* = 0,125. \quad (21)$$

Из условий (20), (21) можно сделать следующий промежуточный вывод. Прямолинейное поступательное торможение однородного кругового цилиндра в воде не может быть устойчивым относительно возмущений угла атаки и угловой скорости.

Рассмотрим задачу определения геометрических и инерционно-массовых параметров составного твердого тела — полого цилиндра — для достижения указанной устойчивости. Пусть некоторый полый цилиндр, “гильза” (рис. 3), имеет геометрические и инерционно-массовые характеристики, при которых выполняется искомое неравенство при фиксированном значении $h = 0,1$.

Исследуемое твердое тело состоит из передней однородной части (цилиндра) диаметром D и высотой $2\Delta_1$ и боковых стенок длиной $2\sigma_1$ и шириной Δ_2 (см. рис. 3).

Входящие в неравенство (19) параметры составного тела: расстояние от центра масс до переднего круглого торца σ и центральный радиус инерции тела ρ — вычислим по формулам

$$\sigma = \frac{\Delta_1^2 D^2 + 4\sigma_1 \Delta_2 (D - \Delta_2)(\sigma_1 + 2\Delta_1)}{\Delta_1^2 D^2 + 4\sigma_1 \Delta_2 (D - \Delta_2)}; \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \rho^2 = & \frac{\Delta_1^2 D^2}{\Delta_1^2 D^2 + 4\sigma_1 \Delta_2 (D - \Delta_2)} \left(\frac{4}{3} \Delta_1^2 + \frac{D^2}{16} - 2\Delta_1 \sigma + \sigma^2 \right) + \\ & + \frac{4\sigma_1 \Delta_2 (D - \Delta_2)}{\Delta_1^2 D^2 + 4\sigma_1 \Delta_2 (D - \Delta_2)} \left(\frac{\sigma_1^2}{3} + \frac{D^2}{8} - \frac{\Delta_2 (D - \Delta_2)}{4} + \frac{D^4 \Delta_1^2 (\sigma_1 + \Delta_1)^2}{\Delta_1^2 D^2 + 4\sigma_1 \Delta_2 (D - \Delta_2)} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Можно использовать равенства (22), (23), но достаточно принять следующие допущения:

$$\Delta_1^2 \approx \Delta_2^2 \approx \Delta_2 \Delta_1 \approx 0. \quad (24)$$

Далее все геометрические параметры будем считать безразмерными: $\bar{\Delta}_1 = \Delta_1/D$, $\bar{\Delta}_2 = \Delta_2/D$, $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1/D$, при этом черта опускается.

С учетом допущений (24) при $h = 0,1$ в критическом случае из левой части (19) получаем равенство

$$-\frac{1}{4} \Delta_1 + \frac{7}{2} \sigma_1 \Delta_2 - 4\sigma_1^2 \Delta_2 = 0. \quad (25)$$

Критическое значение σ_1^* безразмерной длины боковых стенок составного тела находим из выражения

$$\sigma_1^* = \frac{7}{16} + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{49}{4} - 4 \frac{\Delta_1}{\Delta_2}}. \quad (26)$$

Из (26) следует, что величина Δ_1/Δ_2 может изменяться в диапазоне

$$0 < \frac{\Delta_1}{\Delta_2} < \frac{49}{16} = 3,0625.$$

При $\Delta_1 \rightarrow 0$ (передняя часть рассматриваемого тела стремится к форме бесконечно тонкого диска) искомое критическое значение стремится к значению $\sigma_1^* = 0,875$. В частном случае при $\Delta_1 = \Delta_2$ критическое значение равно

$$\sigma_1^* = \frac{1}{16} (7 + \sqrt{33}) \approx 0,797,$$

при $\Delta_1/\Delta_2 \rightarrow 49/16$ искомое критическое значение стремится к значению

$$\sigma_1^* = 0,4375.$$

Таким образом, значение σ_1^* можно выбирать в диапазоне

$$0,4375 \leq \sigma_1^* \leq 0,8750.$$

В частности, если принять $\Delta_1 = \Delta_2 = 0,1$ (если $D = 30$ мм, то $\Delta_1 = \Delta_2 = 3$ мм), длина боковых стенок должна быть равна $2\sigma_1 \approx 1,6D \approx 47,8$ мм, а общая “критическая” длина составного тела составит $47,8 + 6 \approx 54$ мм.

Заметим, что если для проведения эксперимента потребуется “скорректировать” значение постоянной h воздействия среды на тело, то искомое выражение для величины σ_1^*

находится следующим образом. Линеаризованное критическое равенство (25) запишем в виде

$$\Delta_1 \left(10h - \frac{5}{4}\right) + \sigma_1 \Delta_2 \left(40h - \frac{1}{2}\right) - 4\sigma_1^2 \Delta_2 = 0,$$

а величину σ_1^* найдем из равенства

$$\sigma_1^* = \frac{1}{8} \left[\left(40h - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(40h - \frac{1}{2}\right)^2 + 16 \left(10h - \frac{5}{4}\right) \frac{\Delta_1}{\Delta_2}} \right].$$

В случае если параметры задачи допускают наличие критического случая (левая часть равенства (19) равна нулю), в зависимости от старших производных функций воздействия среды y_N и s прямолинейное поступательное движение с торможением тела может быть устойчивым или неустойчивым по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости.

Выше определены достаточные условия для такой устойчивости или неустойчивости, включающие ограничения на старшие производные функций воздействия среды в виде неравенств. Основная трудность заключается в том, что измерить в эксперименте данные производные в явном виде невозможно.

Используя экспериментальные данные, исследуем поведение тела вблизи режима прямолинейного поступательного движения с торможением (т. е. устойчивые или неустойчивые угловые колебания), таким образом неявно оценивая старшие производные функций воздействия среды.

Заметим, что неравенство

$$\frac{DI\rho_0}{m^2} < \frac{8k}{c_x\pi}, \quad (27)$$

гарантирующее колебательную устойчивость или неустойчивость, по крайней мере для указанных выше изделий, выполняется (можно изменить массу тела, изготавливая изделия из металлов различной плотности). В (27) ρ_0 — плотность жидкости (в данном случае воды); $c_x = 0,82$ — безразмерный коэффициент лобового сопротивления.

При проведении эксперимента в случае колебательного характера движения необходимо получить информацию не менее чем о трех полуколебаниях с амплитудами a_1, a_2, a_3 (т. е. о полутора периодах колебаний). Исследуя значения параметров, близкие к критическим, из теоремы о рождении предельных циклов получаем два вывода: 1) об устойчивости основного режима — прямолинейного поступательного движения с торможением; 2) о характере угловых колебаний тела.

Пусть после проведения натурального эксперимента с параметрами, соответствующими критическому случаю, наблюдаются устойчивые колебания относительно угла отклонения. Тогда при незначительном уменьшении длины тела в продольном направлении угловые колебания могут затухать.

Также при незначительном увеличении длины тела в продольном направлении угловые колебания могут увеличиваться и в дальнейшем возможны устойчивые угловые автоколебания тела. При этом следует учитывать скорость изменения амплитуды колебаний. Более того, результаты повторного эксперимента для изделия длиной 60 мм при достаточно больших возмущениях начального угла атаки и (или) угловой скорости показали, что возможен переход к устойчивым угловым автоколебаниям с конечными амплитудами.

Пусть после проведения натурального эксперимента с параметрами, соответствующими критическому случаю, наблюдаются угловые колебания. Тогда при незначительном уменьшении длины тела в продольном направлении (до 50 мм) также возможны устойчивые колебания с ограниченной амплитудой (т. е. переход от неустойчивых угловых автоколебаний тела). При этом следует учитывать скорость изменения амплитуды колебаний.

Более того, результаты повторного эксперимента для изделия длиной 50 мм при конечных возмущениях начального угла атаки и (или) угловой скорости свидетельствуют о возможности перехода от неустойчивых автоколебаний к колебаниям с возрастающей амплитудой. Также при незначительном увеличении продольной длины тела (≈ 60 мм) возможно увеличение амплитуды угловых колебаний.

Заключение. С использованием разработанной методики исследования диссипативных динамических систем в задаче о свободном торможении тела получено новое многопараметрическое семейство фазовых портретов на двумерном цилиндре квазискоростей, состоящее из бесконечного множества топологически неэквивалентных портретов, топологический тип которых меняется при изменении параметров системы. Область физических параметров при этом является множеством конечной меры во всем бесконечномерном пространстве параметров системы.

Полученные результаты позволяют сконструировать полые круговые цилиндры — “гильзы”, использование которых может обеспечить необходимую устойчивость при проведении дополнительных натуральных экспериментов.

Автор выражает благодарность А. П. Чухахину за ценные замечания и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О падении легких, продолговатых тел, вращающихся вокруг своей продольной оси // Полн. собр. соч.: В 9 т. М.: Физматгиз, 1937. Т. 5. С. 72–80, 100–115.
2. Чаплыгин С. А. Избр. тр.: В 3 т. М.: Наука, 1976.
3. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полное собрание сочинений. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Т. 1. С. 133–135.
4. Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007.
5. Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. математика. 2008. Т. 14, вып. 3. С. 3–237.
6. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Физматгиз, 1947.
7. Шамолин М. В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Итоги науки и техники. Сер. Современ. математика и ее прил. Темат. обзоры. 2013. Т. 125. С. 3–251.
8. Локшин Б. Я. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде / Б. Я. Локшин, В. А. Привалов, В. А. Самсонов. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1986.
9. Ерошин В. А., Константинов Г. А., Романенков Н. И., Якимов Ю. Л. Экспериментальное определение давления на диске при погружении в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1988. № 2. С. 21–25.
10. Ерошин В. А., Константинов Г. А., Романенков Н. И., Якимов Ю. Л. Экспериментальное определение момента гидродинамических сил при несимметричном проникании диска в сжимаемую жидкость // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 5. С. 88–94.
11. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.
12. Табачников В. Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Тр. Центр. аэрогидродинам. ин-та. 1974. Вып. 1621. С. 18–24.
13. Prandtl L. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Gottingen / L. Prandtl, A. Betz. München; Berlin: Aerodynam. Versuchsanstalt zu Gottingen, 1932.

14. **Бюшгенс Г. С.** Динамика самолета. Пространственное движение / Г. С. Бюшгенс, Р. В. Студнев. М.: Машиностроение, 1988.
15. **Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.** Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 3. С. 23–27.
16. **Самсонов В. А., Шамолин М. В., Ерошин В. А., Макашкин В. М.** Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании: Науч. отчет / Ин-т механики Моск. гос. ун-та. № 4396. М., 1995.
17. **Ерошин В. А.** Экспериментальное исследование входа упругого цилиндра в воду с большой скоростью // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1992. № 5. С. 20–30.
18. **Бивин Ю. К., Викторов В. В., Степанов Л. П.** Исследование движения твердого тела в глинистой среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 2. С. 159–165.

Поступила в редакцию 24/II 2015 г.
