$r \gg R$. Кривые $V/E$ на рис. 4, *б*, как и на рис. 3, *б*, имеют максимумы, определяющие оптимальное время нагрева.

**Выводы.** Выполнено численное исследование на двумерной модели с учетом нелинейной зависимости теплоемкости $c(T)$ процесса нагрева нефтяного пласта. Показано, что эффективность прогрева существенно зависит от правильного выбора параметров, в частности от коэффициента поглощения $\alpha$, определяемого частотой излучения. Определены оптимальные значения $\alpha$, а также оптимальные времена прогрева. Выполненные расчеты подтверждают возможность применения высокочастотного электромагнитного прогрева нефтяных пластов для интенсификации добычи высоковязкой нефти и борьбы с осложнениями в скважинах и могут быть использованы для разработки практических рекомендаций.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Саяхов Ф. Л., Чистяков С. И., Бабалян Г. А., Федоров Б. Н.** Расчет прогрева призабойной зоны нефтяных скважин высокочастотными электромагнитными полями // Изв. вузов. Нефть и газ.— 1972.— № 2.
2. **Саяхов Ф. Л., Фатыхов М. А., Кузнецов О. Л.** Исследование электромагнитно-акустического воздействия на распределение температуры в нефтеводонасыщенной горной породе // Изв. вузов. Нефть и газ.— 1981.— № 3.
3. **Зыонг Нгок Хай, Кутушев А. Г., Нигматулин Р. И.** К теории фильтрации жидкости в пористой среде при объемном нагреве высокочастотным электромагнитным полем // ПММ.— 1987.— Т. 51, вып. 1.
4. **Зыонг Нгок Хай, Мусаев Н. Д., Нигматулин Р. И.** Автомодельные решения задачи тепло- и массопереноса в насыщенной пористой среде с объемным источником тепла // ПММ.— 1987.— Т. 51, вып. 6.
5. **Самарский А. А.** Теория разностных схем.— М.: Наука, 1977.
6. **Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А.** Численное моделирование процессов тепло- и массообмена.— М.: Наука, 1984.


*г. Тюмень* *Поступила 21/II 1989 г.*

---

УДК 517.95

*С. Е. Михайлов*

# ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

В настоящее время широкое распространение получили численные методы решения краевых задач для уравнений математической физики, основанные на использовании фундаментальных решений, т. е. решений, описывающих реакцию бесконечного пространства или плоскости на сосредоточенное воздействие. К таким методам можно отнести прямой и непрямой методы граничных интегральных уравнений [1], а также метод источников, в котором решение краевой задачи строится путем суперпозиции сосредоточенных воздействий в пространстве, располагаемых на некоторой поверхности, охватывающей исследуемую область [2]. Для уравнений стационарной и нестационарной теплопроводности изотропной среды подобные решения известны (см. [1] и имеющиеся там ссылки) как для двумерного и трехмерного случаев, так и для осесимметричной задачи. К изотропному случаю могут быть сведены плоские и пространственные уравнения теплопроводности для прямолинейно-анизотропной среды. Известны трехмерные фундаментальные решения уравнений теории упругости для среды с прямолинейной анизотропией [3] и для прямолинейно-анизотропной наследственно-упругой среды [4, 5].

В данной работе строятся осесимметричные фундаментальные решения стационарных и нестационарных уравнений теплопроводности для цилиндрически-анизотропных сред путем сведения их к соответствующим уравнениям для изотропной среды. Представлены предельные соотношения для характеристических значений параметров. В качестве одного из предельных случаев получены фундаментальные решения стационарных и нестационарных уравнений плоских задач теплопроводности для прямолинейно-анизотропной среды.

Уравнения нестационарной теплопроводности в произвольной анизотропной среде имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{q} + cT_{,t} = Q, \quad \mathbf{q} = -\chi\nabla T. \tag{0.1}$$

Здесь $T$ — температура; $\mathbf{q}$ — вектор теплового потока; $Q$ — заданное тепловыделение; $c$ — коэффициент теплоемкости; $\chi$ — симметричный тензор теплопроводности; $t$ — время. Индекс после запятой обозначает производную по соответствующей координате; суммирование по повторяющимся индексам далее не предполагается.

Пусть среда обладает цилиндрической анизотропией и пусть $(r,\ \theta,\ z)$ — цилиндрическая система координат, ось $z$ которой совпадает с осью анизотропии. Тогда в этой системе координат компоненты тензора теплопроводности $\chi_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\ \beta = r,\ \theta,\ z)$ постоянны, и подстановка второго из уравнений (0.1) в первое дает

(0.2) $$\chi_{rr}(T_{,rr} + T_{,r}/r) + \chi_{\theta\theta}T_{,\theta\theta}/r^2 + \chi_{zz}T_{,zz} + 2\chi_{r\theta}T_{,r\theta}/r + \chi_{rz}(2T_{,rz} + T_{,z}/r) + 2\chi_{z\theta}T_{,\theta z}/r - cT_{,t} = -Q(r,\ \theta,\ z,\ t).$$

**1. Осесимметричное фундаментальное решение стационарного уравнения.** Будем искать решение (0.2) с правой частью $Q = Q_0\delta(r - r_0)\delta(z - z_0)$ ($\delta$ — дельта-функция Дирака, $Q_0$ — константа, $(r_0,\ z_0)$ — координата источника). Так как правая часть от $\theta$ и $t$ не зависит, то эта зависимость исчезает и в (0.2). Если среда изотропна, то $\chi_{rr} = \chi_{zz}$, $\chi_{rz} = 0$ и уравнение (0.2) переходит в осесимметричное уравнение Лапласа

(1.1) $$T_{,rr} + T_{,zz} + T_{,r}/r = F,\ F = (-Q_0/\chi_{rr})\delta(r - r_0)\delta(z - z_0),$$

решение которого известно [1]*:

(1.2) $$T^*(r,\ z;\ r_0,\ z_0) = \frac{Q_0 r_0 \mathbf{K}(\mu)}{\pi\chi_{rr}\sqrt{a + b}} = \frac{Q_0}{2\pi\chi_{rr}}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\,Q_{-1/2}\left(\frac{a}{b}\right),$$

где $\mathbf{K}(\mu) = \int\limits_0^{\pi/2}(1 - \mu^2\sin^2\theta)^{-1/2}\,d\theta$ — полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода; $Q_{-1/2}$ — функция Лежандра второго рода;

(1.3) $$a = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2,\ b = 2rr_0,\ \mu = \sqrt{2b/(a + b)}.$$

Приведем осесимметричное стационарное уравнение к виду (1.1), для чего от переменных $(r,\ z)$ перейдем к переменным $(r,\ \zeta)$:

(1.4) $$\zeta = (z - \chi_1 r)/\xi,\ \chi_1 = \chi_{rz}/\chi_{rr},\ \xi = \sqrt{\chi_{zz}/\chi_{rr} - (\chi_{rz}/\chi_{rr})^2},$$

и после подстановки в (0.2) получим осесимметричное уравнение Лапласа (1.1) по $r$, $\zeta$ относительно $T^0$ с правой частью

$$F^0(r,\ \zeta;\ r_0,\ \zeta_0) = (-Q_0/\chi_{rr})\,\delta(r - r_0)\,\delta\,[\xi(\zeta - \zeta_0) + \chi_1(r - r_0)].$$

Используя (1.2) в качестве ядра объемного потенциала с плотностью $F^0$, имеем искомое фундаментальное решение осесимметричного стационарного уравнения (0.2)

(1.5) $$T(r,\ z;\ r_0,\ z_0) = \frac{Q_0 r_0 \mathbf{K}(\mu^0)}{\pi\xi\chi_{rr}\sqrt{a^0 + b}} = \frac{Q_0}{2\pi\xi\chi_{rr}}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\,Q_{-1/2}\left(\frac{a^0}{b}\right);$$

(1.6) $$a^0 = r^2 + r_0^2 + \zeta_\Delta^2,\ \mu^0 = \sqrt{2b/(a^0 + b)}.$$

Здесь и далее $r_\Delta = r - r_0$; $z_\Delta = z - z_0$; $\zeta_\Delta = \zeta - \zeta_0 = (z_\Delta - \chi_1 r_\Delta)/\xi$; $R = \sqrt{r_\Delta^2 + \zeta_\Delta^2}$. Учитывая свойства функции Лежандра второго рода и их связь с эллиптическими интегралами [6, 7], можно из второго ра-

---

* Отметим, что в [1] для эллиптического интеграла используется, видимо, определение $K(m) = \int\limits_0^{\pi/2}(1 - m\sin^2\theta)^{-1/2}\,d\theta$ и поэтому в выражении типа (1.2) фигурирует вместо $\mu$ параметр $m = \mu^2$. В выражении для аргумента функции Лежандра есть опечатка.

венства (1.5) получить выражения градиента фундаментального решения

$$\nabla T = T_{,r}(r, z; r_0, z_0)\,\mathbf{e}_r + T_{,z}(r, z; r_0, z_0)\,\mathbf{e}_z =$$

$$= \frac{-Q_0 r_0}{\pi\xi\chi_{rr}\sqrt{a^0+b}}\left\{\frac{1}{2r}\left[\left(r^2 - r_0^2 - \zeta_\Delta^2 - 2\frac{\chi_1}{\xi} r\zeta_\Delta\right)\frac{\mathbf{E}(\mu^0)}{R^2} + \mathbf{K}(\mu^0)\right]\mathbf{e}_r + \right.$$

$$\left. + \frac{\zeta_\Delta}{\xi R^2}\mathbf{E}(\mu^0)\,\mathbf{e}_z\right\} = \frac{Q_0}{2\pi\xi\chi_{rr}}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}\left\{\frac{1}{(a^{02}-b^2)}\left[-a^0 Q_{-1/2}\left(\frac{a^0}{b}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + bQ_{1/2}\left(\frac{a^0}{b}\right)\right]\left[\frac{1}{2r}\left(r^2 - r_0^2 - \zeta_\Delta^2 - 2\frac{\chi_1}{\xi} r\zeta_\Delta\right)\mathbf{e}_r + \frac{\zeta_\Delta}{\xi}\mathbf{e}_z\right] - \frac{1}{2r} Q_{1/2}\left(\frac{a_0}{b}\right)\mathbf{e}_r\right\}$$

$\left(\mathbf{E}(\mu) = \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \mu^2 \sin^2\theta)^{1/2}\, d\theta\right.$ — полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода).

Остановимся еще на предельных свойствах фундаментального решения при $r/r_0 \to 0$, $r_0/R \to 0$, $R/r_0 \to 0$:

$$\frac{r}{r_0} \to 0 \Rightarrow T \to \frac{Q_0}{2\xi\chi_{rr}}\left(1 + \frac{\zeta_\Delta^2}{r_0^2}\right)^{-1/2}, \quad \nabla T \to \frac{Q_0}{2\xi^2\chi_{rr}}\frac{\zeta_\Delta}{r_0^2}\left(1 + \frac{\zeta_\Delta^2}{r_0^2}\right)^{-3/2}(\chi_1\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_z);$$

$$(1.7) \qquad \frac{r_0}{R} \to 0 \Rightarrow T \to \frac{Q_0}{2\xi\chi_{rr}}\frac{r_0}{R}, \quad \nabla T \to \frac{-Q_0}{2\xi^3\chi_{rr}^2 R^2}\frac{r_0}{R}[(\chi_{zz}r_\Delta - \chi_{rz}z_\Delta)\,\mathbf{e}_r -$$

$$- (\chi_{rz}r_\Delta - \chi_{rr}z_\Delta)\,\mathbf{e}_z].$$

Эти предельные значения получены из представления решения через эллиптические интегралы. Для их получения при $R/r_0 \to 0$ воспользуемся представлениями решения через функции Лежандра и учтем, что $a^0/b = 1 + (R/r_0)^2/2 + O(R^3/r_0^3)$, а для малых $\eta$ [6]

$$Q_\nu(1 + \eta) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\eta}{2}\right) - \gamma - \psi(1 + \nu) + O(\eta \ln \eta)$$

($\psi$ — логарифмическая производная Г-функции, $\gamma$ — постоянная Эйлера — Маскерони). Тогда, если обозначить $c_1 = \gamma + \psi(1/2)$, то

$$(1.8) \qquad \frac{R}{r_0} \to 0 \Rightarrow T \to \frac{-Q_0}{2\pi\xi\chi_{rr}}[\ln R - \ln(2r_0) + c_1] + O\left[\left(\frac{R}{r_0}\right)^2 \ln\frac{R}{r_0}\right],$$

$$\nabla T \to \frac{-Q_0}{4\xi^3\chi_{rr}^2 R^2}[(\chi_{zz}r_\Delta - \chi_{rz}z_\Delta)\,\mathbf{e}_r - (\chi_{rz}r_\Delta - \chi_{rr}z_\Delta)\,\mathbf{e}_z] + \frac{1}{r_0} O\left[\frac{R}{r_0}\ln\left(\frac{R}{r_0}\right)\right].$$

Соотношения (1.8) не только дают главные члены фундаментального решения при малом расстоянии между источником и точкой наблюдения, но и позволяют получить фундаментальное решение в плоской задаче с прямолинейной анизотропией, в которую вырождается цилиндрическая анизотропия при $r$, $r_0 \to \infty$. Однако нужно иметь в виду, что в осесимметричной задаче значение функции $T$, как следует из (1.7), отсчитывается от ее значения на бесконечности, тогда как в плоских задачах фундаментальное решение на бесконечности может быть неограниченным. Поэтому будем отсчитывать $T$ от некоторой фиксированной точки $r_1$, $z_1$:

$$T^{(p)}(r_\Delta, z; 0, z_0) = \lim_{r_0 \to \infty}[T(r_0 + r_\Delta, z; r_0, z_0) - T(r_0 + r_{1\Delta}, z_1; r_0, z_0)].$$

С учетом (1.8) фундаментальное решение $T^{(p)}$ плоской стационарной задачи теплопроводности для прямолинейно-анизотропной среды имеет вид

$$T^{(p)}(r_\Delta, z; 0, z_0) = -Q_0(2\pi\xi\chi_{rr})^{-1}\ln R + c_0,$$

где постоянная $c_0 = Q_0(\pi\xi\chi_{rr})^{-1}\ln\left(r_{1\Delta}^2 + \zeta_{1\Delta}^2\right)$ и ее можно отбросить. Представления для $T^{(p)}_{,r}$, $T^{(p)}_{,z}$ даются соответствующими соотношениями (1.8), если опустить в них последние слагаемые.

**2. Осесимметричное фундаментальное решение нестационарного уравнения теплопроводности.** Будем искать решение уравнения (0.2) с правой частью $Q(r, \theta; z, t) = Q_0\delta(r - r_0)\delta(z - z_0)\delta(t - t_0)$. Так как правая часть от $\theta$ не зависит, то эта зависимость исчезает и в (0.2).

Для изотропной среды аналогичное уравнение имеет вид

$$T_{,rr} + T_{,zz} + T_{,r}/r - (c/\chi_{rr})T_{,t} = F,\ F = (-Q_0/\chi_{rr})\,\delta(r - r_0)\,\delta(z - z_0)\,\delta(t - t_0). \tag{2.1}$$

Решение (2.1) известно [1]:

$$T^*(r, z, t; r_0, z_0, t_0) = \frac{2\pi Q_0 r_0}{c\,(4\pi k t_\Delta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{a}{4kt_\Delta}\right) I_0\left(\frac{b}{4kt_\Delta}\right) H(t_\Delta). \tag{2.2}$$

Здесь $t_\Delta = t - t_0$; $k = \chi_{rr}/c$; $a$ и $b$ представлены соотношениями (1.3); $H(\tau)$ — функция Хевисайда; $I_0$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Делая, как и в п. **1**, замену переменных (1.4) в уравнении (0.2), приходим к (2.1), откуда, используя (2.2), запишем искомое фундаментальное решение нестационарного осесимметричного уравнения (0.2)

$$\overline{T}(r, z, t; r_0, z_0, t_0) = \frac{2\pi Q_0 r_0}{c\xi\,(4\pi k t_\Delta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{a^0}{4kt_\Delta}\right) I_0\left(\frac{b}{4kt_\Delta}\right) H(t_\Delta)$$

($a_0$ определено соотношением (1.6)). После дифференцирования получим градиент фундаментального решения

$$\nabla\overline{T} = \overline{T}_{,r}\mathbf{e}_r + \overline{T}_{,z}\mathbf{e}_z = \frac{4Q_0 r_0}{c\xi\sqrt{\pi}\,(4kt_\Delta)^{5/2}} \exp\left(-\frac{a^0}{4kt_\Delta}\right) \times$$
$$\times \left\{\left[-\left(r - \zeta_\Delta\frac{\chi_1}{\xi}\right) I_0\left(\frac{b}{4kt_\Delta}\right) + r_0 I_1\left(\frac{b}{4kt_\Delta}\right)\right]\mathbf{e}_r - \frac{\zeta_\Delta}{\xi} I_0\left(\frac{b}{4kt_\Delta}\right)\mathbf{e}_z\right\} H(t_\Delta).$$

Для пределов при $rr_0/(kt_\Delta) \to 0$, $kt_\Delta/R^2 \to 0$, $kt_\Delta/(rr_0)$, $R/r_0 \to 0$ имеем

$$\frac{rr_0}{kt_\Delta} \to 0 \Rightarrow \overline{T} \to \frac{2\pi Q_0 r_0}{c\xi\,(4\pi k t_\Delta)^{3/2}} \exp\left(\frac{-R^2}{4kt_\Delta}\right) H(t_\Delta),$$
$$\nabla\overline{T} \to \frac{4Q_0 r_0 \zeta_\Delta}{c\xi^2\sqrt{\pi}\,(4kt_\Delta)^{5/2}} \exp\left(-\frac{R^2}{4kt_\Delta}\right) [\chi_1\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_z]\,H(t_\Delta),$$
$$\frac{kt_\Delta}{R^2} \to 0 \Rightarrow T = O\left(\exp\left(-\frac{R^2}{4kt_\Delta}\right)\right),\quad \nabla T = O\left(\exp\left(-\frac{R^2}{4kt_\Delta}\right)\right);$$
$$\frac{kt_\Delta}{rr_0} \to 0,\quad \frac{R}{r_0} \to 0 \Rightarrow \overline{T} = \frac{Q_0}{c\xi 4\pi k t_\Delta}\left[\exp\left(-\frac{R^2}{4kt_\Delta}\right) + O\left(\frac{kt_\Delta}{rr_0}\right)\right], \tag{2.3}$$
$$\nabla T \to \frac{2Q_0}{\pi c\xi^2\chi_{rr}\,(4kt_\Delta)^2} \exp\left(-\frac{R^2}{4kt_\Delta}\right)\Big\{(-\chi_{zz}r_\Delta + \chi_{rz}z_\Delta)\,\mathbf{e}_r +$$
$$+ (\chi_{rz}r_\Delta - \chi_{rr}z_\Delta)\,\mathbf{e}_z + \chi_{rr}RO\left(\frac{kt_\Delta}{rr_0}\right)\Big\}.$$

Как и для нестационарной теплопроводности, соотношения (2.3) дают не только асимптотику фундаментального решения при малых временах и на малом расстоянии между источником и точкой наблюдения, но и фундаментальное решение плоской нестационарной задачи теплопроводности для прямолинейно-анизотропной среды, если отбросить в этих формулах последние слагаемые.

### ЛИТЕРАТУРА


1. **Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.** Методы граничных элементов.— М.: Мир, 1987.
2. **Patterson C., Sheikh M. A.** A modified Trefftz method for three dimensional elasticity // Boundary Elements: Proc. Vth Intern. conf., Hiroshima, 1983.— Berlin: Springer, 1983.

3. **Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.** О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упруго-анизотропной среды // ЖЭТФ.— 1947.— Т. 17, вып. 9.
4. **Михайлов С. Е., Осокин А. Е.** Построение фундаментального решения для анизотропной стареющей среды наследственного типа // ДАН СССР.— 1984.— Т. 274, № 2.
5. **Михайлов С. Е., Осокин А. Е.** Построение фундаментальных решений пространственной и плоской задач для анизотропной наследственно-упругой стареющей среды // Изв. АН СССР. МТТ.— 1986.— № 5.
6. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функция Лежандра).— М.: Физматгиз, 1973.
7. **Справочник** по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовиц, М. Стиган.— М.: Наука, 1979.

*Москва* *Поступила 10/X 1988 г., в окончательном варианте—15/II 1989 г.*

---

**УДК 539.3**

*А. Н. Бурмистров*

# КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ УЗКИХ ОБЛАСТЕЙ С УЧЕТОМ ИЗНОСА

1. Рассматривается пространственная стационарная контактная задача теории упругости при наличии износа. Пусть тело *1* скользит относительно тела *2*, при этом оно не изнашивается, а линейный износ $j$ тела *2* пропорционален работе сил трения [1]

$$j = K^*\mu l p_1,$$

где $p_1$ — давление; $\mu$ и $K^*$ — коэффициенты трения и пропорциональности между работой сил трения и объемом удаленного материала; $l$ — путь трения.

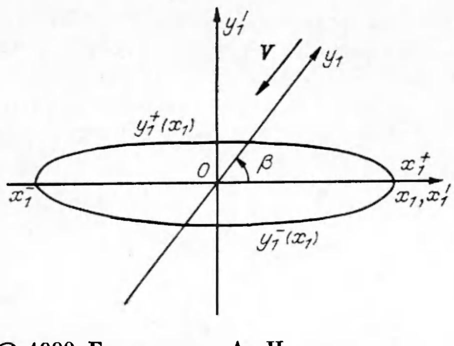
Выберем аффинную систему координат $Ox_1y_1z_1$, связанную с контактом (ось $Oz_1$ перпендикулярна контакту и направлена в сторону тела *1*), причем $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ имеют единичную длину, угол между $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ равен $\beta$ (см. рисунок).

Пусть поле вектора скорости скольжения является однородным плоскопараллельным: $\mathbf{V} = -v\mathbf{e}_y$, область контакта $G_1 = \{(x_1, y_1)\colon\ x_1^- \leqslant x_1 \leqslant x_1^+,\ y_1^-(x_1) \leqslant y_1 \leqslant y_1^+(x_1)\}$ ($y_1^\pm(x_1)$— непрерывные функции). Форма тел и контакта не зависит от времени. Это предположение верно, например, в следующих случаях: а) *2* — полупространство, б) *1* — тело качения, *2* — кольцо подшипника.

Уравнение теории упругости с учетом износа имеет вид

$$\theta \iint\limits_{G_1} \frac{p_1(\xi_1, \eta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1 \sin\beta}{r(\xi_1, \eta_1, x_1, y_1)} = w_1(x_1, y_1) - K^*\mu \int\limits_{y}^{y_1^+(x_1)} p_1(x_1, \eta_1)\, d\eta_1. \tag{1.1}$$

Здесь $\theta = \theta_1 + \theta_2$, $\theta_n = (1 - \nu_n^2)/(\pi E_n)$ ($\nu_n$, $E_n$ — коэффициенты Пуассона и модули упругости тел); $w_1$ — суммарное упругое перемещение; $r(\xi_1, \eta_1, x_1, y_1)$— расстояние между точками $\xi_1$, $\eta_1$ и $x_1$, $y_1$; $n = 1$ (2) отвечает телу *1* (*2*).




Предположим, что характерный размер $B$ контакта по оси $Oy_1$ много меньше соответствующего размера $L$ по оси $Ox_1$. Введем малый параметр $\varepsilon = B/L$ и безразмерные координаты и переменные: $x = x_1/L$, $\xi =$