Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 5

УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ И ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

УДК 539.3:517.958

Н. И. Остросаблин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Условия совместности Сен-Венана и функции напряжений Максвелла и Мореры известны еще с прошлого века и приводятся в учебниках по теории упругости, но в данном вопросе нет полной определенности. На эту тему существует многочисленная литература (см., например, [1–23]), в которой обсуждаются число независимых условий совместности, общность и полнота функций напряжений, постановки задачи теории упругости в напряжениях.

В данной работе показано, что существует 17 эквивалентных форм по три условия совместности малых деформаций, которым соответствуют 17 форм представлений напряжений через три функции напряжений. Доказано, что любая из 17 форм представлений напряжений есть общее и полное решение уравнений равновесия. Дана новая формулировка уравнений теории упругости в напряжениях, и установлено, что возможно 289 вариантов систем уравнений для трех функций напряжений. Из результатов работы следует, что вместо постановки задачи для уравнений в смещениях или напряжениях допустима постановка краевой задачи для системы шести уравнений для трех функций напряжений и трех смещений.

При отсутствии объемных сил имеем в декартовых прямоугольных координатах x_1, x_2, x_3 уравнения равновесия

$$\partial_j \sigma_{ij} = 0, \tag{1}$$

которым удовлетворяют напряжения $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, выраженные через тензор функций напряжений $\gamma_{pq} = \gamma_{qp}$ [3, 4]:

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{imp}\varepsilon_{jnq}\partial_{mn}\gamma_{pq}. \tag{2}$$

Здесь ∂_j — производные по координате x_j; ε_{imp} — символы Леви-Чевита; повторяющиеся индексы означают суммирование. Малые деформации $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ выражаются через смещения u_j:

$$\varepsilon_{ij} = (\partial_j u_i + \partial_i u_j)/2. \tag{3}$$

Условия совместности деформаций обычно записывают в виде

$$s_{ij} = \varepsilon_{imp}\varepsilon_{jnq}\partial_{mn}\varepsilon_{pq} = 0, \tag{4}$$

причем для так называемого тензора несовместности $s_{ij} = s_{ji}$ выполняются тождества

$$\partial_j s_{ij} = \varepsilon_{imp}\varepsilon_{jnq}\partial_{mnj}\varepsilon_{pq} \equiv 0.$$

Выведем условия совместности деформаций не так, как в учебниках по теории упругости. Запишем (3) подробнее:

$$\begin{aligned}
&\partial_1 u_1 = \varepsilon_{11} = \varepsilon_1, \qquad && \partial_3 u_2 + \partial_2 u_3 = 2\varepsilon_{23} = \sqrt{2}\varepsilon_4,\\
&\partial_2 u_2 = \varepsilon_{22} = \varepsilon_2, && \partial_3 u_1 + \partial_1 u_3 = 2\varepsilon_{13} = \sqrt{2}\varepsilon_5,\\
&\partial_3 u_3 = \varepsilon_{33} = \varepsilon_3, && \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 = 2\varepsilon_{12} = \sqrt{2}\varepsilon_6.
\end{aligned} \tag{5}$$

Если деформации ε_i заданы, то для трех смещений u_i есть шесть уравнений (5). Так как уравнений больше, чем неизвестных, то нужно проверить совместность системы (5).

Выберем из (5) линейно независимые подсистемы трех уравнений, из которых будут определяться три смещения, и запишем оставшиеся три уравнения. Возможны следующие варианты группировки уравнений (5) по три:

$$
\begin{array}{llll}
1)\ (1,2,3;\ 4,5,6), & 6)\ (\underline{1,3,5};\ 2,4,6), & 11)\ (\underline{2,3,4};\ 1,5,6), & 16)\ (2,5,6;\ 1,3,4),\\
2)\ (1,2,4;\ 3,5,6), & 7)\ (1,3,6;\ 2,4,5), & 12)\ (2,3,5;\ 1,4,6), & 17)\ (3,4,5;\ 1,2,6),\\
3)\ (1,2,5;\ 3,4,6), & 8)\ (1,4,5;\ 2,3,6), & 13)\ (2,3,6;\ 1,4,5), & 18)\ (3,4,6;\ 1,2,5),\\
4)\ (\underline{1,2,6};\ 3,4,5), & 9)\ (1,4,6;\ 2,3,5), & 14)\ (2,4,5;\ 1,3,6), & 19)\ (3,5,6;\ 1,2,4),\\
5)\ (1,3,4;\ 2,5,6), & 10)\ (1,5,6;\ 2,3,4), & 15)\ (2,4,6;\ 1,3,5), & 20)\ (4,5,6;\ 1,2,3).
\end{array} \tag{6}
$$

Здесь первые три числа в круглых скобках означают номера строк (деформаций), которые берутся за независимые. Для подчеркнутых вариантов строки (деформации) линейно зависимы, и определители матриц этих подсистем равны нулю. Таким образом, остается 17 вариантов (6) подсистем, из которых можно найти три смещения, при этом вместо (5) будем иметь 17 вариантов систем вида

$$A_1 u = a, \quad B_1 u = b, \quad |A_1| \neq 0. \tag{7}$$

Для совместности системы (7) соответствующие окаймляющие миноры расширенной матрицы должны равняться нулю [24]. Например, для варианта 1 (см. (6)) матрицы A_1, B_1 имеют вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Приравняем к нулю окаймляющие миноры расширенной матрицы:

$$
\begin{gathered}
M_{(1,2,3,4)} = \begin{vmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \varepsilon_3 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 & \sqrt{2}\varepsilon_4 \end{vmatrix} = \partial_1(\partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_4 - \partial_{33}\varepsilon_2 - \partial_{22}\varepsilon_3) = 0,\\
M_{(1,2,3,5)} = \begin{vmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \varepsilon_3 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 & \sqrt{2}\varepsilon_5 \end{vmatrix} = \partial_2(\partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_5 - \partial_{33}\varepsilon_1 - \partial_{11}\varepsilon_3) = 0,\\
M_{(1,2,3,6)} = \begin{vmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \varepsilon_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 & \sqrt{2}\varepsilon_6 \end{vmatrix} = \partial_3(\partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_6 - \partial_{22}\varepsilon_1 - \partial_{11}\varepsilon_2) = 0.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Множители ∂_i в (9), не равные нулю, можно опустить и записать условия совместности в форме

$$\partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_4 = \partial_{33}\varepsilon_2 + \partial_{22}\varepsilon_3, \quad \partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_5 = \partial_{33}\varepsilon_1 + \partial_{11}\varepsilon_3, \quad \partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_6 = \partial_{22}\varepsilon_1 + \partial_{11}\varepsilon_2, \quad C_1 b = D_1 a,$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} \partial_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{13} & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{12} \end{bmatrix}, \qquad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & \partial_{33} & \partial_{22} \\ \partial_{33} & 0 & \partial_{11} \\ \partial_{22} & \partial_{11} & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Из (7), (8), (10) видно, что выполняется соотношение $C_1B_1 = D_1A_1$.

Таким образом, условия совместности системы (7) имеют вид $C_1b = D_1a$, где C_1, D_1 — операторы с минимально возможным порядком производных, причем $C_1B_1 = D_1A_1$. Для уравнений с постоянными коэффициентами матрицы C_1, D_1 получаются приравниванием к нулю окаймляющих миноров расширенной матрицы (см. (9), (10)). Если в C_1, D_1 оказывается общий множитель, то его следует опустить (см. (9), (10)), так как в условии совместности, очевидно, надо брать C_1, D_1 минимальной степени по ∂_i и нет смысла повышать порядок этих операторов. С другой стороны, если $C_1b = D_1a$, $C_1B_1 = D_1A_1$, то существует u такое, что $a = A_1u$, $b = B_1u$.

Действительно, общее решение линейной системы (7) имеет вид $u = u^{(1)} + u^{(0)}$, где $u^{(1)}$ — частное решение (если оно есть) неоднородной системы $A_1u^{(1)} = a$, $B_1u^{(1)} = b$, а $u^{(0)}$ — общее решение однородных уравнений $A_1u^{(0)} = 0$, $B_1u^{(0)} = 0$. По существу, второе уравнение $B_1u^{(1)} = b$ есть условие совместности. Исключим из него $u^{(1)}$. Пусть $C_1B_1 = D_1A_1$ (C_1, D_1 — операторы минимально возможного порядка). Тогда, умножая $B_1u^{(1)} = b$ на C_1, последовательно получим $C_1B_1u^{(1)} = C_1b$, $D_1A_1u^{(1)} = C_1b$, $D_1a = C_1b$, т. е. последнее соотношение есть необходимое условие совместности. Но оно же является и достаточным условием совместности системы $A_1u^{(1)} = a$, $B_1u^{(1)} = b$. В [25] доказано, что общее решение соотношения $D_1a = C_1b$ следующее: $a = A_1\varphi$, $b = B_1\varphi + \psi$, $C_1\psi = 0$, причем $C_1B_1 = D_1A_1$, т. е. при любых конкретных a, b, удовлетворяющих условию $D_1a = C_1b$, существуют φ, ψ такие, что a и b представляются в приведенном виде. Подставим эти a и b в нашу систему: $A_1u^{(1)} = A_1\varphi$, $B_1u^{(1)} = B_1\varphi + \psi$. Тогда из первого уравнения $u^{(1)} = \varphi$, а из второго получим, что $\psi = 0$. Таким образом, лишние функции ψ, $C_1\psi = 0$ писать не нужно, а соотношение $D_1a = C_1b$ — необходимое и достаточное условие совместности системы $A_1u^{(1)} = a$, $B_1u^{(1)} = b$.

Проделаем все выкладки для остальных вариантов (6) и выпишем соответствующие условия совместности, из записи которых видно, чему равны матрицы C_1, D_1. В результате получим

1) (1, 2, 3; 4, 5, 6)

$$\partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_4 = \partial_{33}\varepsilon_2 + \partial_{22}\varepsilon_3,$$
$$\partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_5 = \partial_{33}\varepsilon_1 + \partial_{11}\varepsilon_3,$$
$$\partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_6 = \partial_{22}\varepsilon_1 + \partial_{11}\varepsilon_2;$$

20) (4, 5, 6; 1, 2, 3)

$$2\partial_{23}\varepsilon_1 = -\partial_{11}\sqrt{2}\varepsilon_4 + \partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_5 + \partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_6,$$
$$2\partial_{13}\varepsilon_2 = \partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_4 - \partial_{22}\sqrt{2}\varepsilon_5 + \partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_6,$$
$$2\partial_{12}\varepsilon_3 = \partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_4 + \partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_5 - \partial_{33}\sqrt{2}\varepsilon_6;$$

2) (1, 2, 4; 3, 5, 6)

$$\partial_{22}\varepsilon_3 = -\partial_{33}\varepsilon_2 + \partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_4,$$
$$\partial_{122}\sqrt{2}\varepsilon_5 = \partial_{223}\varepsilon_1 - \partial_{113}\varepsilon_2 + \partial_{112}\sqrt{2}\varepsilon_4,$$
$$\partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_6 = \partial_{22}\varepsilon_1 + \partial_{11}\varepsilon_2;$$

19) (3, 5, 6; 1, 2, 4)

$$\partial_{33}\varepsilon_1 = -\partial_{11}\varepsilon_3 + \partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_5,$$
$$\partial_{133}\varepsilon_2 = \partial_{122}\varepsilon_3 - \partial_{223}\sqrt{2}\varepsilon_5 + \partial_{233}\sqrt{2}\varepsilon_6,$$
$$\partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_4 = 2\partial_{12}\varepsilon_3 - \partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_5 + \partial_{33}\sqrt{2}\varepsilon_6;$$

3) (1, 2, 5; 3, 4, 6)

$$\partial_{11}\varepsilon_3 = -\partial_{33}\varepsilon_1 + \partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_5,$$
$$\partial_{112}\sqrt{2}\varepsilon_4 = -\partial_{223}\varepsilon_1 + \partial_{113}\varepsilon_2 + \partial_{122}\sqrt{2}\varepsilon_5,$$
$$\partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_6 = \partial_{22}\varepsilon_1 + \partial_{11}\varepsilon_2;$$

18) (3, 4, 6; 1, 2, 5)

$$\partial_{233}\varepsilon_1 = \partial_{112}\varepsilon_3 - \partial_{113}\sqrt{2}\varepsilon_4 + \partial_{133}\sqrt{2}\varepsilon_6,$$
$$\partial_{33}\varepsilon_2 = -\partial_{22}\varepsilon_3 + \partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_4,$$
$$\partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_5 = 2\partial_{12}\varepsilon_3 - \partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_4 + \partial_{33}\sqrt{2}\varepsilon_6;$$

4) $(\underline{1,2,6};\ 3,4,5)$

$$|A_1| = 0;$$

5) $(1,3,4;\ 2,5,6)$

$$\partial_{33}\varepsilon_2 = -\partial_{22}\varepsilon_3 + \partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_4,$$
$$\partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_5 = \partial_{33}\varepsilon_1 + \partial_{11}\varepsilon_3,$$
$$\partial_{133}\sqrt{2}\varepsilon_6 = \partial_{233}\varepsilon_1 - \partial_{112}\varepsilon_3 + \partial_{113}\sqrt{2}\varepsilon_4;$$

6) $(\underline{1,3,5};\ 2,4,6)$

$$|A_1| = 0;$$

7) $(1,3,6;\ 2,4,5)$

$$\partial_{11}\varepsilon_2 = -\partial_{22}\varepsilon_1 + \partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_6,$$
$$\partial_{113}\sqrt{2}\varepsilon_4 = -\partial_{233}\varepsilon_1 + \partial_{112}\varepsilon_3 + \partial_{133}\sqrt{2}\varepsilon_6,$$
$$\partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_5 = \partial_{33}\varepsilon_1 + \partial_{11}\varepsilon_3;$$

8) $(1,4,5;\ 2,3,6)$

$$\partial_{113}\varepsilon_2 = \partial_{223}\varepsilon_1 + \partial_{112}\sqrt{2}\varepsilon_4 - \partial_{122}\sqrt{2}\varepsilon_5,$$
$$\partial_{11}\varepsilon_3 = -\partial_{33}\varepsilon_1 + \partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_5,$$
$$\partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_6 = 2\partial_{23}\varepsilon_1 + \partial_{11}\sqrt{2}\varepsilon_4 - \partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_5;$$

9) $(1,4,6;\ 2,3,5)$

$$\partial_{11}\varepsilon_2 = -\partial_{22}\varepsilon_1 + \partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_6,$$
$$\partial_{112}\varepsilon_3 = \partial_{233}\varepsilon_1 + \partial_{113}\sqrt{2}\varepsilon_4 - \partial_{133}\sqrt{2}\varepsilon_6,$$
$$\partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_5 = 2\partial_{23}\varepsilon_1 + \partial_{11}\sqrt{2}\varepsilon_4 - \partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_6;$$

10) $(1,5,6;\ 2,3,4)$

$$\partial_{11}\varepsilon_2 = -\partial_{22}\varepsilon_1 + \partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_6,$$
$$\partial_{11}\varepsilon_3 = -\partial_{33}\varepsilon_1 + \partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_5,$$
$$\partial_{11}\sqrt{2}\varepsilon_4 = -2\partial_{23}\varepsilon_1 + \partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_5 + \partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_6;$$

17) $(3,4,5;\ 1,2,6)$

$$\partial_{33}\varepsilon_1 = -\partial_{11}\varepsilon_3 + \partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_5,$$
$$\partial_{33}\varepsilon_2 = -\partial_{22}\varepsilon_3 + \partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_4,$$
$$\partial_{33}\sqrt{2}\varepsilon_6 = -2\partial_{12}\varepsilon_3 + \partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_4 + \partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_5;$$

16) $(2,5,6;\ 1,3,4)$

$$\partial_{22}\varepsilon_1 = -\partial_{11}\varepsilon_2 + \partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_6,$$
$$\partial_{122}\varepsilon_3 = \partial_{133}\varepsilon_2 + \partial_{223}\sqrt{2}\varepsilon_5 - \partial_{233}\sqrt{2}\varepsilon_6,$$
$$\partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_4 = 2\partial_{13}\varepsilon_2 + \partial_{22}\sqrt{2}\varepsilon_5 - \partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_6;$$

15) $(2,4,6;\ 1,3,5)$

$$\partial_{22}\varepsilon_1 = -\partial_{11}\varepsilon_2 + \partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_6,$$
$$\partial_{22}\varepsilon_3 = -\partial_{33}\varepsilon_2 + \partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_4, \tag{11}$$
$$\partial_{22}\sqrt{2}\varepsilon_5 = -2\partial_{13}\varepsilon_2 + \partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_4 + \partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_6;$$

14) $(2,4,5;\ 1,3,6)$

$$\partial_{223}\varepsilon_1 = \partial_{113}\varepsilon_2 - \partial_{112}\sqrt{2}\varepsilon_4 + \partial_{122}\sqrt{2}\varepsilon_5,$$
$$\partial_{22}\varepsilon_3 = -\partial_{33}\varepsilon_2 + \partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_4,$$
$$\partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_6 = 2\partial_{13}\varepsilon_2 - \partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_4 + \partial_{22}\sqrt{2}\varepsilon_5;$$

13) $(2,3,6;\ 1,4,5)$

$$\partial_{22}\varepsilon_1 = -\partial_{11}\varepsilon_2 + \partial_{12}\sqrt{2}\varepsilon_6,$$
$$\partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_4 = \partial_{33}\varepsilon_2 + \partial_{22}\varepsilon_3,$$
$$\partial_{223}\sqrt{2}\varepsilon_5 = -\partial_{133}\varepsilon_2 + \partial_{122}\varepsilon_3 + \partial_{233}\sqrt{2}\varepsilon_6;$$

12) $(2,3,5;\ 1,4,6)$

$$\partial_{33}\varepsilon_1 = -\partial_{11}\varepsilon_3 + \partial_{13}\sqrt{2}\varepsilon_5,$$
$$\partial_{23}\sqrt{2}\varepsilon_4 = \partial_{33}\varepsilon_2 + \partial_{22}\varepsilon_3,$$
$$\partial_{233}\sqrt{2}\varepsilon_6 = \partial_{133}\varepsilon_2 - \partial_{122}\varepsilon_3 + \partial_{223}\sqrt{2}\varepsilon_5;$$

11) $(\underline{2,3,4};\ 1,5,6)$

$$|A_1| = 0.$$

Таким образом, получили 17 вариантов условий совместности (11). В каждом варианте три условия совместности, а не шесть, как в классических условиях Сен-Венана (4). Все 17 вариантов эквивалентны, так как соответствуют одной и той же исходной (переопределенной) системе (5) и получаются друг из друга, если разрешить их относительно любой тройки деформаций, дополняющий определитель которых $|A_1|$ не равен нулю.

Отметим еще условия совместности, внешне различные. Это первые шесть условий (11) и условия, которые не были известны ранее, где участвуют третьи производные. Как видно из (11), с третьими производными условий только три, т. е. всего внешне различных условий девять; запишем их в матричной форме:

$$\begin{array}{l}1)\\2)\\3)\end{array}\begin{bmatrix}\partial_{23} & 0 & 0\\0 & \partial_{13} & 0\\0 & 0 & \partial_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\varepsilon_4\\\sqrt{2}\varepsilon_5\\\sqrt{2}\varepsilon_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \partial_{33} & \partial_{22}\\\partial_{33} & 0 & \partial_{11}\\\partial_{22} & \partial_{11} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\end{bmatrix},$$

$$\begin{array}{l}4)\\5)\\6)\end{array}\begin{bmatrix}2\partial_{23} & 0 & 0\\0 & 2\partial_{13} & 0\\0 & 0 & 2\partial_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\partial_{11} & \partial_{12} & \partial_{13}\\\partial_{12} & -\partial_{22} & \partial_{23}\\\partial_{13} & \partial_{23} & -\partial_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\varepsilon_4\\\sqrt{2}\varepsilon_5\\\sqrt{2}\varepsilon_6\end{bmatrix}, \qquad (12)$$

$$\begin{array}{l}7)\\8)\\9)\end{array}\begin{bmatrix}0 & -\partial_{133} & \partial_{122}\\\partial_{233} & 0 & -\partial_{112}\\-\partial_{223} & \partial_{113} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \partial_{223} & -\partial_{233}\\-\partial_{113} & 0 & \partial_{133}\\\partial_{112} & -\partial_{122} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\varepsilon_4\\\sqrt{2}\varepsilon_5\\\sqrt{2}\varepsilon_6\end{bmatrix}.$$

Здесь первые шесть уравнений — это обычные условия Сен-Венана (4), а три последних — дополнительные условия, не известные ранее, но они не являются вместе условиями совместности, как уравнения 1–3 или 4–6 из (12). Они входят только в состав других троек условий совместности. Выпишем все эти 17 троек возможных условий совместности (см. (11), (12)):

1) (1,2,3), 2) (4,5,6), 3) (1,9,3), 4) (2,7,6), 5) (2,9,3), 6) (8,1,6), 7) (2,1,6), 8) (1,2,8), 9) (3,7,5), 10) (3,1,5), 11) (3,8,2), 12) (9,1,5), 13) (9,2,4), 14) (3,1,7), 15) (3,8,4), 16) (2,1,7), 17) (3,2,4).

Эти тройки условий можно получить и не формальным путем, а непосредственным интегрированием уравнений (5). Пусть имеем вариант 1) (1,2,3), тогда из первых трех уравнений (5) интегрированием находим

$$\begin{aligned}u_1^{(1)} &= \partial_1^{-1}\varepsilon_1 + \varphi_1(x_2, x_3),\\ u_2^{(1)} &= \partial_2^{-1}\varepsilon_2 + \varphi_2(x_1, x_3), \qquad \partial_j^{-1} = \int(\ldots)\,dx_j.\\ u_3^{(1)} &= \partial_3^{-1}\varepsilon_3 + \varphi_3(x_1, x_2),\end{aligned} \qquad (13)$$

Подставим (13) в последние три уравнения (5):

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\varepsilon_4 &= \partial_3(\partial_2^{-1}\varepsilon_2 + \varphi_2(x_1, x_3)) + \partial_2(\partial_3^{-1}\varepsilon_3 + \varphi_3(x_1, x_2)),\\ \sqrt{2}\varepsilon_5 &= \partial_3(\partial_1^{-1}\varepsilon_1 + \varphi_1(x_2, x_3)) + \partial_1(\partial_3^{-1}\varepsilon_3 + \varphi_3(x_1, x_2)),\\ \sqrt{2}\varepsilon_6 &= \partial_2(\partial_1^{-1}\varepsilon_1 + \varphi_1(x_2, x_3)) + \partial_1(\partial_2^{-1}\varepsilon_2 + \varphi_2(x_1, x_3)).\end{aligned} \qquad (14)$$

Соотношения (14) и есть условия совместности, т. е. если взять ε_1, ε_2, ε_3 независимыми функциями, то ε_4, ε_5, ε_6 не могут быть произвольными функциями, а должны иметь вид (14), для того чтобы система (5) была совместна. Чтобы получить из (14) условия (10), продифференцируем каждое уравнение (14) соответственно по ∂_{23}, ∂_{13}, ∂_{12}. Видно, что функции φ_1, φ_2, φ_3 при дифференцировании аннулируются и получаются три уравнения (10), как и должно быть, т. е. условий совместности (14) или (10) только три, а не шесть, как считается традиционно (см. (4)). Подобным образом можно поступать и в других вариантах. Аналогичный подход и вывод уравнений вида (14) приведен в [9, 14, 15].

Общее решение линейных уравнений (5) состоит из частного решения неоднородных уравнений и общего решения однородных, т. е. когда $\varepsilon_i = 0$. Найдем это последнее решение.

Из (13), (14) при $\varepsilon_i = 0$ получим

$$\begin{aligned} u_1^{(0)} &= \varphi_1^{(0)}(x_2, x_3), & \partial_3\varphi_2^{(0)}(x_1, x_3) + \partial_2\varphi_3^{(0)}(x_1, x_2) &= 0, \\ u_2^{(0)} &= \varphi_2^{(0)}(x_1, x_3), & \partial_3\varphi_1^{(0)}(x_2, x_3) + \partial_1\varphi_3^{(0)}(x_1, x_2) &= 0, \\ u_3^{(0)} &= \varphi_3^{(0)}(x_1, x_2), & \partial_2\varphi_1^{(0)}(x_2, x_3) + \partial_1\varphi_2^{(0)}(x_1, x_3) &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Из (15) следует, что $\varphi_i^{(0)}$ могут быть только линейными функциями:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(0)}(x_2, x_3) &= \alpha_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, \\ \varphi_2^{(0)}(x_1, x_3) &= \alpha_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3, \qquad \alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0. \\ \varphi_3^{(0)}(x_1, x_2) &= \alpha_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2, \end{aligned} \tag{16}$$

Выражения (16) определяют смещения тела как твердого целого. Формулы (13), (16) есть выражение смещений через деформации (и нет необходимости в формулах Чезаро), а функции φ_i находятся из (14). Таким образом, весь произвол при интегрировании системы (5) определяется линейными функциями (16). Поэтому достаточно найти только частное решение неоднородной системы (5).

Рассмотрим теперь уравнения (1). Обозначим $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sqrt{2}\sigma_{23}, \sqrt{2}\sigma_{13}, \sqrt{2}\sigma_{12})$ и запишем (1), (3) и обобщенный закон Гука в матричном виде:

$$C\sigma = 0, \quad \sigma = A\varepsilon, \quad \varepsilon = C'u, \tag{17}$$

где $A = A'$ — матрица модулей упругости;

$$C = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & (1/\sqrt{2})\partial_3 & (1/\sqrt{2})\partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & (1/\sqrt{2})\partial_3 & 0 & (1/\sqrt{2})\partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & (1/\sqrt{2})\partial_2 & (1/\sqrt{2})\partial_1 & 0 \end{bmatrix}; \tag{18}$$

штрих означает траспонирование матрицы.

Так как уравнений (1) три, а неизвестных σ_i шесть, то, группируя величины σ_i по три, можно переписать (1) в виде условий совместности (см. (10)):

$$A_1'v = B_1'w, \quad |\,A_1'\,| \neq 0. \tag{19}$$

Здесь A_1', B_1' — транспонированные матрицы A_1, B_1 из (7). Возможные варианты группировки величин σ_i по три выписаны выше (см. (6)). Из соотношения $D_1A_1 = C_1B_1$ следует, что

$$A_1'D_1' = B_1'C_1'. \tag{20}$$

С учетом (20) находим общее решение [25] уравнений (19) через три произвольные функции напряжений φ_1, φ_2, φ_3:

$$v = D_1'\varphi, \qquad w = C_1'\varphi. \tag{21}$$

В [25] общее решение уравнений вида (19) представляется так: $v = D_1'\varphi$, $w = C_1'\varphi + \psi$, $B_1'\psi = 0$, но если все операторы линейные и выполняется соотношение $C_1'\mathrm{Ker}\,D_1' = \mathrm{Ker}\,B_1'$ (Ker означает ядро оператора), то общее решение есть $v = D_1'\varphi$, $w = C_1'\varphi$.

Как показывает непосредственная проверка, условие $C_1'\mathrm{Ker}\,D_1' = \mathrm{Ker}\,B_1'$ для операторов из (19), (20) выполняется, это обеспечивает общность решения (21). Общность решений Максвелла 1) и Мореры 20) (см. ниже (22)) доказана в [1].

Проверим выполнение условия $C_1'\mathrm{Ker}\,D_1' = \mathrm{Ker}\,B_1'$, например, для решения 2) из (22). Ядро оператора B_1' находится из уравнений $\partial_3\psi_2 + \partial_2\psi_3 = 0$, $\partial_1\psi_3 = 0$, $\partial_3\psi_1 + \partial_1\psi_2 = 0$, решение которых имеет вид $\psi_1 = g_3(x_1, x_2) - \partial_1 f_3(x_1, x_2)x_3$, $\psi_2 = f_3(x_1, x_2) - \partial_2 f_1(x_2, x_3)$, $\psi_3 = \partial_3 f_1(x_2, x_3)$, где f_i, g_3 — произвольные функции соответствующих аргументов. Ядро оператора D_1' определяется из уравнений $\partial_{223}\varphi_2 + \partial_{22}\varphi_3 = 0$, $-\partial_{33}\varphi_1 - \partial_{113}\varphi_2 + \partial_{11}\varphi_3 = 0$, $\partial_{23}\varphi_1 + \partial_{112}\varphi_2 = 0$, решение которых следующее:

$$\varphi_1 = 2\partial_{11}\gamma_2(x_1,x_3) - \partial_{11}[\alpha_2(x_1,x_3) + \beta_2(x_1,x_3)x_2] - \partial_{11}\gamma_3(x_1,x_2)x_3 + h_3(x_1,x_2),$$
$$\varphi_2 = -\partial_3\gamma_2(x_1,x_3) + \partial_3[\alpha_2(x_1,x_3) + \beta_2(x_1,x_3)x_2] + \gamma_3(x_1,x_2) - \alpha_1(x_2,x_3) - \beta_1(x_2,x_3)x_1,$$
$$\varphi_3 = \partial_{33}\gamma_2(x_1,x_3) + \partial_3[\alpha_1(x_2,x_3) + \beta_1(x_2,x_3)x_1]$$

(α_i, β_i, γ_i, h_3 — произвольные функции соответствующих аргументов). Умножим функции φ_i на оператор C_1':

$$p_1 = \partial_{22}\varphi_1 = \partial_{22}[h_3(x_1,x_2) - \partial_{11}\gamma_3(x_1,x_2)x_3],$$
$$p_2 = \partial_{122}\varphi_2 = \partial_{122}\gamma_3(x_1,x_2) - \partial_{22}\beta_1(x_2,x_3),$$
$$p_3 = \partial_{12}\varphi_3 = \partial_{23}\beta_1(x_2,x_3).$$

Обозначая $\partial_{22}h_3(x_1,x_2) = g_3(x_1,x_2)$, $\partial_{122}\gamma_3(x_1,x_2) = f_3(x_1,x_2)$, $\partial_2\beta_1(x_2,x_3) = f_1(x_2,x_3)$, видим, что выражения для p_i и ψ_i совпадают. Это показывает, что условие $C_1' \operatorname{Ker} D_1' = \operatorname{Ker} B_1'$ выполняется и решение 2) из (22) является общим. Аналогично проверяется выполнение этого условия для всех остальных решений (22).

Теперь в соответствии с вариантами (6) выпишем 17 форм общего решения уравнений равновесия (1), т. е. 17 форм представлений напряжений через три функции напряжений:

1) (1, 2, 3; 4, 5, 6) (решение Максвелла)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_{33} & \partial_{22} \\ \partial_{33} & 0 & \partial_{11} \\ \partial_{22} & \partial_{11} & 0 \\ -\partial_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_{13} & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix},$$

20) (4, 5, 6; 1, 2, 3) (решение Мореры)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_{11} & \partial_{12} & \partial_{13} \\ \partial_{12} & -\partial_{22} & \partial_{23} \\ \partial_{13} & \partial_{23} & -\partial_{33} \\ -2\partial_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -2\partial_{13} & 0 \\ 0 & 0 & -2\partial_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix},$$

2) (1, 2, 4; 3, 5, 6)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_3 \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_{223} & \partial_{22} \\ -\partial_{33} & -\partial_{113} & \partial_{11} \\ \partial_{23} & \partial_{112} & 0 \\ -\partial_{22} & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_{122} & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix},$$

19) (3, 5, 6; 1, 2, 4)

$$\begin{bmatrix} \sigma_3 \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_{11} & \partial_{122} & 2\partial_{12} \\ \partial_{13} & -\partial_{223} & -\partial_{23} \\ 0 & \partial_{233} & \partial_{33} \\ -\partial_{33} & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_{133} & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix},$$

3) (1, 2, 5; 3, 4, 6)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{13} \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_{33} & -\partial_{223} & \partial_{22} \\ 0 & \partial_{113} & \partial_{11} \\ \partial_{13} & \partial_{122} & 0 \\ -\partial_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_{112} & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix},$$

18) (3, 4, 6; 1, 2, 5)

$$\begin{bmatrix} \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{112} & -\partial_{22} & 2\partial_{12} \\ -\partial_{113} & \partial_{23} & -\partial_{13} \\ \partial_{133} & 0 & \partial_{33} \\ -\partial_{233} & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_{33} & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix},$$

4) $(\underline{1,2,6};\ 3,4,5)$

$$|A_1'| = 0,$$

5) $(1,3,4;\ 2,5,6)$

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_3\\ \sigma_{23}\\ \sigma_2\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_{33} & \partial_{233}\\ -\partial_{22} & \partial_{11} & -\partial_{112}\\ \partial_{23} & 0 & \partial_{113}\\ -\partial_{33} & 0 & 0\\ 0 & -\partial_{13} & 0\\ 0 & 0 & -\partial_{133}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix},$$

6) $(\underline{1,3,5};\ 2,4,6)$

$$|A_1'| = 0,$$

7) $(1,3,6;\ 2,4,5)$

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_3\\ \sigma_{12}\\ \sigma_2\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_{22} & -\partial_{233} & \partial_{33}\\ 0 & \partial_{112} & \partial_{11}\\ \partial_{12} & \partial_{133} & 0\\ -\partial_{11} & 0 & 0\\ 0 & -\partial_{113} & 0\\ 0 & 0 & -\partial_{13}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix},$$

8) $(1,4,5;\ 2,3,6)$

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{223} & -\partial_{33} & 2\partial_{23}\\ \partial_{112} & 0 & \partial_{11}\\ -\partial_{122} & \partial_{13} & -\partial_{12}\\ -\partial_{113} & 0 & 0\\ 0 & -\partial_{11} & 0\\ 0 & 0 & -\partial_{13}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix},$$

17) $(3,4,5;\ 1,2,6)$

$$\begin{bmatrix}\sigma_3\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_{11} & -\partial_{22} & -2\partial_{12}\\ 0 & \partial_{23} & \partial_{13}\\ \partial_{13} & 0 & \partial_{23}\\ -\partial_{33} & 0 & 0\\ 0 & -\partial_{33} & 0\\ 0 & 0 & -\partial_{33}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix},$$

16) $(2,5,6;\ 1,3,4)$

$$\begin{bmatrix}\sigma_2\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_1\\ \sigma_3\\ \sigma_{23}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_{11} & \partial_{133} & 2\partial_{13}\\ 0 & \partial_{223} & \partial_{22}\\ \partial_{12} & -\partial_{233} & -\partial_{23}\\ -\partial_{22} & 0 & 0\\ 0 & -\partial_{122} & 0\\ 0 & 0 & -\partial_{12}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix},$$

(22)

15) $(2,4,6;\ 1,3,5)$

$$\begin{bmatrix}\sigma_2\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_1\\ \sigma_3\\ \sigma_{13}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_{11} & -\partial_{33} & -2\partial_{13}\\ 0 & \partial_{23} & \partial_{12}\\ \partial_{12} & 0 & \partial_{23}\\ -\partial_{22} & 0 & 0\\ 0 & -\partial_{22} & 0\\ 0 & 0 & -\partial_{22}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix},$$

14) $(2,4,5;\ 1,3,6)$

$$\begin{bmatrix}\sigma_2\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_1\\ \sigma_3\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{133} & -\partial_{33} & 2\partial_{13}\\ -\partial_{112} & \partial_{23} & -\partial_{12}\\ \partial_{122} & 0 & \partial_{22}\\ -\partial_{223} & 0 & 0\\ 0 & -\partial_{22} & 0\\ 0 & 0 & -\partial_{23}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix},$$

13) $(2,3,6;\ 1,4,5)$

$$\begin{bmatrix}\sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_{12}\\ \sigma_1\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_{11} & \partial_{33} & -\partial_{133}\\ 0 & \partial_{22} & \partial_{122}\\ \partial_{12} & 0 & \partial_{233}\\ -\partial_{22} & 0 & 0\\ 0 & -\partial_{23} & 0\\ 0 & 0 & -\partial_{223}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix},$$

9) $(1,4,6;\ 2,3,5)$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_{22} & \partial_{233} & 2\partial_{23} \\ 0 & \partial_{113} & \partial_{11} \\ \partial_{12} & -\partial_{133} & -\partial_{13} \\ -\partial_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_{112} & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix},$$

12) $(2,3,5;\ 1,4,6)$

$$\begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{13} \\ \sigma_1 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_{33} & \partial_{133} \\ -\partial_{11} & \partial_{22} & -\partial_{122} \\ \partial_{13} & 0 & \partial_{223} \\ -\partial_{33} & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_{23} & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_{233} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix},$$

10) $(1,5,6;\ 2,3,4)$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_{22} & -\partial_{33} & -2\partial_{23} \\ 0 & \partial_{13} & \partial_{12} \\ \partial_{12} & 0 & \partial_{13} \\ -\partial_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix},$$

11) $(\underline{2,3,4};\ 1,5,6)$

$$|A'_1| = 0.$$

Как доказано выше, каждая из этих 17 форм представлений напряжений через три функции напряжений φ_i — общее решение уравнений равновесия (1), и очевидно, что все эти формы эквивалентны между собой, т. е. любая из них дает все решения уравнений (1).

Решения Максвелла 1) и Мореры 20) известны с прошлого века, а остальные решения (22) являются новыми. Представление Бельтрами — Круткова — Блоха [3, 4] напряжений через так называемый тензор функций напряжений в виде (2) есть просто сумма решений Максвелла 1) и Мореры 20). Но так как любое из решений (22) по доказанному является общим, а уравнения (1) линейны, то суммирование этих решений не дает нам какой-либо дополнительной общности или полноты. Поэтому попытки во многих работах (см., например, [2–5, 10, 12, 13]) доказать общность или полноту решения (2), согласно вышеизложенному, не совсем правомерны.

Итак, из (22) следует, что напряжения выражаются через функции напряжений в виде $\sigma = B\varphi$, где B — матрицы, приведенные в (22), но с другой стороны, $\sigma = AC'u$ (см. (17)), т. е.

$$B\varphi = AC'u, \tag{23}$$

причем имеют место соотношения

$$CB = 0, \qquad B'C' = 0. \tag{24}$$

Используя (17), (23), (24), можно поставить задачу теории упругости в смещениях или напряжениях или рассматривать (23) как шесть уравнений для шести функций: φ_1, φ_2, φ_3, u_1, u_2, u_3. С учетом (17), (24) из (23) получим уравнения в смещениях (см. [26])

$$CB\varphi = CAC'u = 0; \tag{25}$$

условия совместности деформаций (см. (11))

$$B'C'u = B'\varepsilon = 0; \tag{26}$$

уравнения в напряжениях

$$\varepsilon = A^{-1}\sigma \to B'A^{-1}\sigma = 0; \tag{27}$$

уравнения для функций напряжений

$$\sigma = B\varphi \to B'A^{-1}B\varphi = 0. \tag{28}$$

Запишем уравнения (17), (27) в напряжениях (ср. с [11, 26, 29])

$$C\sigma = 0, \qquad B'A^{-1}\sigma = 0 \tag{29}$$

или (17), (26) в деформациях

$$CA\varepsilon = 0, \qquad B'\varepsilon = 0. \tag{30}$$

В (29), (30), очевидно, шесть уравнений для шести неизвестных σ_i или ε_i, а не девять уравнений, как в традиционной системе Бельтрами — Мичелла для изотропного материала.

Как видно из (22), матрицы B и B' имеют 17 возможных форм. В (29), (30) можно использовать любую из этих форм, т. е. уравнений в напряжениях или деформациях может быть также 17 форм. В уравнения (28) можно подставлять B' и B разных форм, т. е. получается $17 \cdot 17 = 289$ различных вариантов уравнений для функций напряжений φ_i. Но так как все уравнения (17), (25)–(30) сводятся к (23), то, видимо, целесообразно в конкретных задачах исходить из системы (23).

В [27, 28] путем замены символов дифференцирования на параметры преобразования Фурье доказывается, что первые три условия совместности Сен-Венана и следующие три (см. (12)) получаются друг из друга. Это соответствует частному случаю результатов данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кузьмин Р. О.** О формулах Максвелла и Мореры в теории упругости // Докл. АН СССР. Нов. сер. 1945. Т. 49, № 5. С. 335–337.
2. **Weber C.** Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums // ZAMM. 1948. Bd 28, H. 7/8. S. 193–197.
3. **Крутков Ю. А.** Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949.
4. **Блох В. И.** Функции напряжений в теории упругости // ПММ. 1950. Т. 14, вып. 4. С. 415–422.
5. **Schaefer H.** Die Spannunqsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers // ZAMM. 1953. Bd 33, H. 10/11. S. 356–362.
6. **Langhaar H. L., Stippes M.** Three-dimensional stress functions // J. Franklin Inst. 1954. V. 258, N 5. P. 371–382.
7. **Kröner E.** Die Shannungsfunktionen der dreidimensionalen anisotropen Elastizitätstheorie // Zeitschr. Phys. 1955. Bd 141, H. 3. S. 386–398.
8. **Washizu K.** A note on the conditions of compatibility // J. Math. and Phys. 1958. V. 36, N 4. P. 306–312.
9. **Прошко В. М.** Вариант вывода уравнений совместности Сен-Венана // Исследования по теории сооружений. М.: Госстройиздат, 1959. Вып. 8. С. 579–580.
10. **Truesdell C.** Invariant and complete stress functions for general continua // Arch. Rat. Mech. Anal. 1959. V. 4, N 1. P. 1–29.
11. **Победря Б. Е.** О задаче в напряжениях // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240, № 3. С. 564–567.
12. **Stippes M.** On stress functions in classical elasticity // Quart. Appl. Math. 1966. V. 24, N 2. P. 119–125.

13. **Carlson D. E.** A note on the Beltrami stress functions // ZAMM. 1967. Bd 47, H. 3. S. 206–207.
14. **Власов Б. Ф.** Об интегрировании уравнений неразрывности деформаций в форме Сен-Венана // Прикл. механика. 1969. Т. 5, вып. 12. С. 35–38.
15. **Власов Б. Ф.** Об уравнениях неразрывности деформаций // Прикл. механика. 1970. Т. 6, вып. 11. С. 85–90.
16. **Власов Б. Ф.** Об уравнениях для определения функций напряжений Мореры и Максвелла // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 1. С. 56–58.
17. **Калинин В. С.** К решению прямой задачи линейной теории упругости в напряжениях // Проблемы строительной механики корабля. Л.: Судостроение, 1973. С. 105–112.
18. **Киселев В. А.** О некоторых соотношениях в условиях неразрывности деформаций сплошной среды // Тр. Моск. автомоб.-дор. ин-та. 1973. Вып. 61. С. 126–131.
19. **Лихачев В. А., Флейшман Н. П.** Уравнения совместности Бельтрами — Мичелла // Докл. АН УССР. Сер. А. 1984. № 9. С. 45–47.
20. **Розин Л. А.** О новых постановках задач теории упругости в напряжениях // Изв. ВНИИ гидротехн. 1985. Т. 180. С. 75–84.
21. **Сайфуллин Э. Г., Саченков А. В., Тимербаев Р. М.** Основные уравнения теории упругости в напряжениях и перемещениях // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань, 1985. Вып. 18, ч. 1. С. 66–79.
22. **Малый В. И.** Об одном представлении условий совместности деформаций // ПММ. 1986. Т. 50, вып. 5. С. 872–875.
23. **Малый В. И.** Независимые условия совместности напряжений для упругого изотропного тела // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 7. С. 43–46.
24. **Курош А. Г.** Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз, 1962.
25. **Zhang Hong-qing, Yang Guang.** Constructions of the general solution for a system of partial differential equations with variable coefficients // Appl. Math. and Mech. 1991. V. 12, N 2. P. 149–153.
26. **Коновалов А. Н., Сорокин С. Б.** Структура уравнений теории упругости. Статическая задача. Новосибирск, 1986 (Препр. / ВЦ СО АН СССР; № 665).
27. **Бородачев Н. М.** Пространственная задача теории упругости в деформациях // Пробл. прочности. 1995. № 5–6. С. 69–73.
28. **Бородачев Н. М.** Об одном подходе к решению пространственной задачи теории упругости в напряжениях // Прикл. механика. 1995. Т. 31, № 12. С. 38–44.
29. **Васильев В. В., Федоров Л. В.** К задаче теории упругости, сформулированной в напряжениях // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 82–92.

Поступила в редакцию 1/III 1995 г.,
в окончательном варианте — 15/II 1996 г.