УДК 533.951

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ ПУЧОК С ПЕРЕМЕННОЙ СТЕПЕНЬЮ КОМПЕНСАЦИИ ЗАРЯДА

А. В. Жаринов, Д. Н. Новичков, А. С. Чихачев

(*Москва*)

В настоящее время существует достаточно большое количество теоретических работ, посвященных изучению стационарных состояний однородных вдоль оси релятивистских пучков (см. обзоры [1, 2]).

В то же время в условиях реальных экспериментов степень нейтрализации заряда пучка может заметно изменяться вдоль оси трубы. В частности, в квазистационарных и стационарных системах плотность ионов по длине может заметно изменяться при наличии продольных стоков [3]. Кроме того, в ряде работ (см., например, [4]) рассматриваются условия фокусировки пучков в трубопроводе, обеспечиваемые градиентом давления вдоль пучка. В связи с этим интересно рассмотреть задачу о равновесном состоянии пучка при наличии переменной степени компенсации вдоль трубы, через которую распространяется квазистационарный пучок.

Допустим, что вдоль оси металлической трубы с плотностью нейтральных частиц $n_0(z)$ длиной $2L$ инжектируется пучок с током I. Плотность ионов $n_i(z)$, возникающих в результате ионизации, также будет переменной. Ради простоты положим, что пучок является достаточно тонким, так что можно считать n_0, n_i, n_e не зависящими от радиуса ρ. Характерный масштаб неоднородности распределения n_i обозначим через l, $l \leqslant L$.

Будем считать, что плотность нейтральных атомов и, следовательно, ионов максимальна при $z = 0$ $(-L \leqslant z \leqslant L)$. Состояние пучка по предположению изменяется от близкого к бессиловому, на концах трубы к квазинейтральному, не достигая, однако, точного выполнения условия квазинейтральности так же, как и условия бессилового движения ($n_e > n_i \geqslant n_e/\gamma^2$, γ — отношение полной энергии электрона и энергии покоя). В этих условиях требуется найти характеристики аксиально-симметричного пучка ($n_e(z)$, $n_i(z)$ и $\gamma(z)$) с учетом воздействия собственных полей на движение частиц пучка.

Если $\mathbf{v}$ — скорость электрона, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, то уравнения движения электрона можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{e}{m\gamma}\left\{\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}(\mathbf{vE}) + \frac{1}{c^2}[\mathbf{vH}]\right\}, \tag{1}$$

где e — заряд; m — масса электрона; c — скорость света.

Будем использовать адиабатическое приближение для решения (1), т. е. считать, что $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и γ достаточно медленно меняются вдоль оси. Тогда можно положить $E_z \approx 0$.

Проекция (1) на направление радиуса ρ цилиндрических координат дает

$$\ddot{\rho} + \frac{e}{m\gamma}\left\{E_\rho\left(1 - \frac{\dot{\rho}^2}{c^2}\right) - \frac{\dot{z}}{c}H_\theta\right\} = 0. \tag{2}$$

Для компонент полей E_ρ и H_θ можно получить $E_\rho = 2\pi e\rho(n_i - n_e)$, $H_\theta = -2\pi e\rho n_e\beta_z$, где $n_e(z)$— плотность электронов пучка; $\beta_z = v_z/c$;

v_z — средняя продольная скорость электронов. Тогда (2) можно представить в виде

$$\ddot\rho + \rho\Omega_0^2 - \rho\frac{\dot\rho^2}{c^2}\Omega_1^2 = 0, \tag{3}$$

$$\Omega_0^2 = \frac{2\pi e^2}{m\gamma}\left(n_i - \frac{n_e}{\gamma^2}\right), \qquad \Omega_1^2 = \frac{2\pi e^2 n_i}{m\gamma}.$$

Если считать постоянными Ω_0 и Ω_1, то уравнение (3) можно проинтегрировать

$$\frac{\Omega_1^2}{c^2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = \Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_1^2}{c^2}\dot\rho_0^2 - \Omega_0^2\right)e^{\frac{\Omega_1^2}{c^2}(\rho^2-\rho_0^2)} \tag{4}$$

(ρ_0 и $\dot\rho_0$ — начальный радиус и начальная поперечная скорость электрона).

Соотношение (4) позволяет оценить роль нелинейного члена в (3). Действительно, если показатель экспоненты мал, то ее разложение и последующее усреднение решения по осцилляциям при больших Ω_0 дает

$$\overline{\rho^2} = \frac{1}{2}\left(\rho_0^2 + \frac{\dot\rho_0^2}{\Omega_0^2 - \frac{\Omega_1^2}{c^2}\dot\rho_0^2}\right), \qquad \overline{\dot\rho^2} = \frac{1}{2}\left\{\rho_0^2\left(\Omega_0^2 - \frac{\Omega_1^2}{c^2}\dot\rho_0^2\right) + \dot\rho_0^2\right\}.$$

Из этих соотношений видно, что если радиус начального распределения мал $\left(\rho_0^2\frac{\Omega_1^2}{c^2} \ll 1\right)$, а начальные скорости частиц параллельны оси ($\dot\rho_0 = 0$), то, во-первых, радиус остается малым всегда, медленно меняясь лишь с изменением Ω_0, во-вторых, поперечные скорости также остаются малыми. Действительно, условие $\dot\rho \ll c$ означает $\rho_0 \ll c/\Omega_0$. Для выполнения этого неравенства необходимы не слишком большие концентрации электронов, т. е. не слишком большие токи пучка. Используя для оценки максимальное значение Ω_0 при $z = 0$, имеем

$$\rho_0^2 \ll \gamma mc^2/2\pi e^2 n_e,$$

т. е. достаточным является условие

$$i \ll \gamma/2, \tag{5}$$

где $i = eI/mc^3$, $I = \pi e\rho_0^2 n_e c$ — ток пучка. Отметим также, что в интересующей нас области параметров можно полагать $\Omega_0 \approx \Omega_1$.

Таким образом, будем считать условие (5) выполненным, т. е. нелинейный член в (3) дает лишь малую поправку к получаемым результатам.

Если выполнено условие $\gamma \gg 1$, то $\beta_z \approx 1$ для всех частиц пучка. Тогда в (3) можно перейти от переменной t к z:

$$\rho'' + \Omega^2(z)\rho = 0, \tag{6}$$

причем здесь Ω зависит в общем случае и от $\dot\rho$:

$$\Omega^2 = \frac{2\pi e^2}{\gamma mc^2}\left(n_i\left(1 - \frac{\dot\rho^2}{c^2}\right) - \frac{n_e}{\gamma^2}\right). \tag{7}$$

Рассмотрим случай, когда (6) может быть решено в ВКБ-приближении, т. е. выполнено условие $\Omega^2 \gg \Omega'$. Так как Ω можно оценить как

$\Omega \approx \omega_e/c$, где $\omega_e^2 = 2\pi e^2 n_e/m\gamma$, а $\Omega' \approx \Omega/l$, то достаточным условием применимости ВКБ-приближения являются $l \gg c/\omega_e$, что выполняется в весьма широкой области параметров.

Решение (6) имеет вид

$$\rho = \frac{A_1}{\sqrt{\Omega}} \cos\theta(z) + \frac{A_2}{\sqrt{\Omega}} \sin\theta(z), \quad \frac{d\theta}{dz} = \Omega(z). \tag{8}$$

Вследствие больших значений θ имеют физический смысл только величины, усредненные по колебаниям. Для средних квадратичных из (8) можно получить

$$\overline{\rho^2}(z) = C_0/\Omega(z), \quad \overline{\dot{\rho}^2}(z) = C_1\Omega(z). \tag{9}$$

При этом отметим, что должны быть выполнены неравенства

$$C_0 > 0, \; C_1 > 0, \; \Omega(z) > 0.$$

Выражение (7) для $\Omega(z)$, содержащее нелинейный член, также может быть усреднено по осцилляциям, так что получим

$$\Omega^2(z) = \frac{2\pi e^2}{\gamma m c^2}\left(n_i(1 - C_1\Omega(z)) - \frac{n_e}{\gamma^2}\right). \tag{10}$$

Равенство (10) учитывает нелинейный характер поперечных колебаний электрона, однако оно может быть справедливым лишь в том случае, когда поправка, связанная с константой C_1, является малой, что необходимо для выполнения неравенства $\overline{\Delta\Omega^2} \ll \overline{\Omega}^2$.

Отметим также, что Ω в (10) зависит от начальных условий, что и должно быть, вообще говоря, для нелинейных колебаний.

Уравнение (10) связывает, таким образом, между собой функции $\Omega(z)$, $\gamma(z)$, $n_i(z)$ и $n_e(z)$. Можно получить соотношение для $\gamma(z)$. Действительно, $\gamma(z) = \gamma_R + e\Phi/mc^2$, где γ_R определяется через потенциал стенки трубы.

Следует отметить, что степень нейтрализации пучка (по предположению возрастающая от концов трубы к середине) не должна достигать единицы, так как в рассматриваемом случае заряд пучка должен быть достаточно велик для того, чтобы вторичные электроны, возникающие в результате ионизации, выбрасывались на стенку трубы.

Для потенциала $\Phi(z)$ в случае весьма тонкого пучка ($\ln(R/a) \gg 1/2$) имеем соотношение

$$\Phi(z) = -2\pi e a^2(z)(n_e(z) - n_i(z))\ln(R/a(z)),$$

так что для $\gamma(z)$ справедливо равенство

$$\gamma(z) = \gamma_R - \frac{2\pi e^2 a^2(z)}{mc^2}(n_e(z) - n_i(z)) \ln\frac{R}{a(z)}. \tag{11}$$

Из соотношений (9) для радиуса пучка следует

$$a^2(z) = C_3/\Omega(z).$$

Для замыкания системы необходимо использовать постоянство тока пучка

$$I = \pi a^2(z) e n_e(z) c = \text{const},$$

откуда

$$n_e = C_4/a^2(z), \tag{12}$$

а также

$$n_e = C_5\Omega(z). \tag{13}$$

Можно исключить $\Omega(z)$ из (13), (10)

$$n_e(z) = \sqrt{\frac{(C_5C_6)^2}{4\gamma^6} + \frac{C_6 n_i}{\gamma}} - \frac{C_5C_6}{2\gamma^3} \tag{14}$$

(C_1, ..., C_5 — положительные константы, зависящие от начальных условий, $C_6 = 2\pi e^2/mc^2$).

Таким образом, достаточно уравнения (11) (с учетом (12) и (13)) для определения плотности электронов пучка и распределения потенциала при заданной плотности ионов $n_i(z)$. Из-за наличия множителя $\ln(R/a)$, однако, невозможно выразить эти зависимости в явном виде.

Можно сделать один общий вывод о характере функций $n_e(z)$ и $\gamma(z)$, а именно, если n_i симметрична относительно $z = 0$, то n_e и γ также будут симметричны.

Полученные выше соотношения выражают в принципе γ и n_e через плотность ионов, которая может быть определена, если известны плотности n_0 и n_e и распределение потенциала.

Ради простоты будем считать, что z изменяется от 0 до L. Тогда для $n_i(z)$ имеем уравнение

$$n_i(z) = \int_0^z \frac{\nu_i(\xi)\, n_e(\xi)\, d\xi}{c\sqrt{2\frac{m}{M}(\gamma(\xi) - \gamma(z))}}, \tag{15}$$

где M — масса иона; $\nu_i(z)$— частота соударений электронов пучка с нейтральными атомами, приводящих к образованию ионов:

$$\nu_i(z) = n_0(z)\sigma_i c$$

(σ_i — сечение ионизации).

Выражение (15), являющееся следствием уравнения непрерывности для ионов, справедливо только при монотонной функции $\gamma(z)$, входящей в подынтегральное выражение.

В дальнейшем будем в основном интересоваться областью параметров, соответствующих характеристикам пучка вблизи $z = 0$. При этом опустим слагаемое n_e/γ^2 в правой части (10), так что вместо (14) получим более простое выражение

$$n_e(z) \simeq n_e(0)\left(\frac{n_i(z)\,\gamma(0)}{n_i(0)\,\gamma(z)}\right)^{1/2}. \tag{16}$$

Уравнение (11) можно представить в виде

$$\gamma(z) = \gamma_R - i\Lambda(z)(1 - n_i(z)/n_e(z)), \tag{17}$$

$\Lambda(z) = 2\ln(R/a(z))$, причем из-за весьма медленного изменения логарифмической функции можно положить $\Lambda \approx \text{const} = \Lambda_0$. Соотношения (15)—(17) образуют самосогласованную систему уравнений, однозначно определяющих входящие в них искомые величины через плотность нейтральных атомов $n_0(z)$.

Удобно ввести новую функцию

$$n_i(z)/n_e(z) = 1 - \alpha(z),\ n_i(0)/n_e(0) = 1 - \alpha_0,$$
$$\alpha(z) = \alpha_0 + \alpha_1(z).$$

Через $\alpha(z)$ можно выразить все искомые характеристики n_i, n_e, γ:

$$n_i(z) = \frac{(1-\alpha)^2}{1 - \frac{i\Lambda\alpha_1(z)}{\gamma_0}} \frac{n_e(0)}{(1-\alpha_0)}; \tag{18}$$

$$n_e(z) = \frac{1-\alpha}{1 - \frac{i\Lambda\alpha_1(z)}{\gamma_0}} \frac{n_e(0)}{(1-\alpha_0)}; \tag{19}$$

$$\gamma(z) = \gamma_0 - i\Lambda\alpha_1(z). \tag{20}$$

При этом функция $\alpha(z)$ определяется из нелинейного интегрального уравнения (15). В общем случае решение весьма затруднительно, однако, если использовать условие $\alpha_1(z) \ll 1 - \alpha_0$, справедливое при малых z, а также считать $i\Lambda/\gamma_0 \ll 1$, то уравнение примет более простой вид

$$1 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{i\Lambda}} \int_0^z \frac{n_0(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\alpha_1(z) - \alpha_1(\xi)}} \frac{1}{1-\alpha_0}, \quad \sigma_0 = \sigma_i \sqrt{\frac{M}{2m}}.$$

Использование разложения $\alpha_1(\xi) = \alpha_1(z) + (\xi - z)\alpha_1'(z)$ дает

$$\alpha_1(z) = \frac{\sigma_0^2}{i\Lambda} \int_0^z K_1^2(\xi)\, d\xi \frac{1}{(1-\alpha_0)^2},$$

где

$$K_1(z) = \int_0^z \frac{n_0(\xi)\, d\xi}{\sqrt{z-\xi}}.$$

На основании уравнений (18)— (20) можно теперь дать качественный анализ поведения $n_i(z)$, $n_e(z)$ и $\gamma(z)$ вблизи точки $z = 0$. Все три функции имеют максимум при $z = 0$, причем ионная плотность убывает вдвое быстрее электронной, самым медленным (из-за условия $i\Lambda/\gamma_0 \ll 1$) является относительное убывание $\gamma(z)$.

Более точный анализ требует привлечения численного счета приведенных уравнений.

Кратко суммируя результаты данной работы, следует сказать, что получена самосогласованная система уравнений, определяющая состояние неоднородного вдоль оси аксиально-симметричного релятивистского электронного пучка с учетом процессов ионизации остаточного газа.

Поступила 7 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Benford G., Book D. L.** The equilibrium of the relativistic beam.— In: Advances in Plasma Physics. Vol. 4. Ed. A. Simon, W. B. Thongon. N. Y. a. o., Interscience, 1971. Рус. пер. В кн.: Достижения физики плазмы. М., «Мир», 1974.
2. **Валлис Г., Зауэр К., Зюндер Ф., Росинский С. Е., Рухадзе А. А., Рухлин В. Г.** Инжекция сильноточных релятивистских электронных пучков в плазму и газ.— УФН, 1974, т. 113, вып. 3.
3. **Field L. M., Spangenberg K., Helm R.** Control of electron beam dispersion at high vacuum by ions.— «Electrical Communication», 1947, vol. 24, N 1, p. 108.
4. **Olson C. L.** Pressure gradient focusing of intense beams.— «Phys. Fluids», 1973, vol. 16, N 12, p. 2224.