УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НАГРУЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ ВНУТРЕННЕМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ

С. А. Бочкарев, В. П. Матвеенко

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь
E-mails: bochkarev@icmm.ru, mvp@icmm.ru

Для исследования динамического поведения нагруженных оболочек вращения, содержащих неподвижную или текущую сжимаемую жидкость, предложен смешанный конечно-элементный алгоритм. Поведение жидкости описывается потенциальной теорией, уравнения которой сводятся к интегральному виду с помощью метода Галеркина. Динамика оболочки анализируется с использованием вариационного принципа возможных перемещений, в который включается линеаризованное уравнение Бернулли для вычисления гидродинамического давления, действующего со стороны жидкости на оболочку. Решение задачи сводится к вычислению и анализу собственных значений связанной системы уравнений. В качестве примера исследовано влияние гидростатического давления на динамическое поведение оболочек вращения при различных граничных условиях в случае внутреннего течения жидкости.

Ключевые слова: теория оболочек, сжимаемая жидкость, потенциальная теория, дивергенция, флаттер.

Введение. При значительной скорости потока жидкости может происходить статическая (дивергенция) или динамическая (флаттер) потеря устойчивости системы труба — жидкость. В свою очередь статическая нагрузка (осевое растяжение (сжатие) или гидростатическое (внешнее) давление) также может приводить к статической потере устойчивости упругого тонкостенного тела. Поэтому совместное влияние гидродинамической и статической нагрузок может оказывать стабилизирующее или дестабилизирующее влияние на рассматриваемую систему, повышая или понижая критические скорости потока жидкости.

В теоретических исследованиях (аналитических и численных) упругая труба моделируется как круговая балка [1], оболочка вращения [2–5] или трехмерное тело [6]. Для описания внутреннего потока жидкости используется потенциальная теория [2–5] или уравнения Эйлера [6].

Широкие возможности для моделирования динамики поведения системы труба — подвижная жидкость с точки зрения выбора возможного аппарата, используемого для описания упругого тела и потока жидкости, предоставляет метод конечных элементов [4–6]. Однако количество теоретических работ, посвященных изучению влияния статической нагрузки на динамические характеристики систем труба — подвижная жидкость, невелико. В [5] учтено влияние осевого сжатия и гидростатического давления. В рамках потенциальной теории для давления текущей несжимаемой жидкости методом разделения переменных получено аналитическое выражение, а входящие в него характеристические показатели определены из системы уравнений теории оболочек Сандерса, записанных в форме уравнений Ламе. В [6] исследуется влияние гидростатического давления в рамках конечно-элементного алгоритма, в котором цилиндрическая оболочка описывается трехмерной теорией упругости, а гидродинамическое давление определяется из уравнений Эйлера с динамическими граничными условиями, учитывающими течение жидкости.

В данной работе для исследования влияния статической нагрузки на динамические характеристики системы труба — подвижная жидкость предлагается смешанный конечно-элементный алгоритм. В этом алгоритме система уравнений для жидкости, полученная в результате применения метода Галеркина к уравнениям потенциальной теории, объединяется с системой уравнений для оболочки, полученных на основе принципа возможных перемещений. Предварительное напряженное состояние определяется из решения статической задачи.

1. Постановка задачи. Уравнения движения оболочек вращения. Рассматривается упругая оболочка вращения длиной L и толщиной h с наименьшим радиусом R. Внутри оболочки находится идеальная сжимаемая жидкость, которая течет со скоростью U. На оболочку действует гидростатическое давление жидкости p. Необходимо найти такую скорость потока, при которой невозмущенная форма предварительно нагруженной оболочки теряет устойчивость.

В рамках классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа — Лява, компоненты вектора деформации в криволинейной системе координат (α_1, α_2, z) могут быть записаны следующим образом [7]:

$$\varepsilon_{11} = E_{11} + zk_{11}, \qquad \varepsilon_{22} = E_{22} + zk_{22}, \qquad \varepsilon_{12} = E_{12} + zk_{12}. \tag{1}$$

Здесь

$$\begin{gathered} E_{11} = \varepsilon_1 + (\varepsilon_1^2 + \omega_1^2 + \theta_1^2)/2, \qquad E_{12} = \omega_1 + \omega_2 + \varepsilon_1\omega_2 + \varepsilon_2\omega_1 + \theta_1\theta_2, \\ k_{11} = k_1 + \varepsilon_1 k_1 + \omega_1\tau, \qquad k_{12} = 2\tau + \tau(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2; \end{gathered} \tag{2}$$

$$\varepsilon_1 = u' + \psi_1 v + r_1 w, \quad \omega_1 = v' + \psi_1 u, \quad \theta_1 = w' - r_1 u, \quad k_1 = \theta_1' + \psi_1\theta_2, \quad \tau = t_1 + t_2,$$

$$t_1 = \theta_2' + \psi_1\theta_1, \quad (\,\cdot\,)' = \frac{1}{A_1}\,\frac{\partial\,(\,\cdot\,)}{\partial\alpha_1}, \quad r_1 = \frac{1}{R_1} \quad (1 \rightleftarrows 2), \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = \frac{A_2'}{A_2},$$

u, v, w — меридиональная, окружная и нормальная составляющие вектора перемещений; θ_i — углы поворота недеформируемой нормали; R_i — главные радиусы кривизн; A_i — параметры Ламе; запись $1 \rightleftarrows 2$ подразумевает наличие уравнений и соотношений, которые получаются из предыдущих заменой индекса 1 на 2, а индекса 2 на 1.

Компоненты деформаций оболочки (2) можно представить в матричной форме:

$$\varepsilon = \varepsilon_* + Ee/2. \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon = \{E_{11}, E_{22}, E_{12}, k_{11}, k_{22}, k_{12}\}^{\text{т}}$; $\varepsilon_* = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega_1 + \omega_2, k_1, k_2, 2\tau\}^{\text{т}}$ — линейная часть деформации; $e = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega_1, \omega_2, \theta_1, \theta_2, k_1, k_2, \tau\}^{\text{т}}$; E — матрица линейных множителей.

Соотношения упругости также можно записать в матричном виде:

$$T = \{T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^{\text{т}} = D\varepsilon. \tag{4}$$

Здесь T — вектор усилий и моментов; D — матрица жесткостей. Матрицы E и D имеют вид

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \omega_1 & 0 & \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \omega_2 & 0 & \theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_2 & \omega_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & \theta_2 & \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 & \omega_1 \\ 0 & k_2 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 & \omega_2 \\ \tau & \tau & k_1 & k_2 & 0 & 0 & \omega_1 & \omega_2 & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & b_{11} & b_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & b_{12} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & b_{44} \\ b_{11} & b_{12} & 0 & c_{11} & c_{12} & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 & c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты, входящие в матрицу жесткостей D, определяются следующим образом:

$$(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \int\limits_h (1, z, z^2) B_{ij}\, dz \qquad (i, j = 1, 2, 4)$$

(B_{ij} — известные коэффициенты, входящие в закон Гука для изотропного материала).

Для математической формулировки задачи используется принцип возможных перемещений, дополненный работой сил инерции, который может быть записан в матричной форме:

$$\int\limits_S \delta\varepsilon^{\mathrm{т}}\, T\, dS + \int\limits_V \delta d^{\,\mathrm{т}}\, \rho_m \ddot{d}\, dV - \int\limits_S \delta d^{\,\mathrm{т}}\, P\, dS = 0. \tag{5}$$

Здесь ε, T, d, P — векторы обобщенных деформаций, обобщенных усилий и моментов, перемещений, поверхностных нагрузок соответственно; ρ_m — удельная плотность материала оболочки.

Рассмотрим начальное равновесное состояние, определяемое вектором перемещения d^0, вектором деформации ε^0 и т. д. Величины, характеризующие состояние с малым отклонением от положения равновесия, можно представить в виде $d = d^0 + d^1$ и т. д. Тогда с учетом (3), (4) и предположения о линейности начального равновесного состояния векторы деформации, вариаций деформаций, усилий и моментов записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}
\varepsilon = \varepsilon_*^0 + \varepsilon_*^1 + E^0 e^1 + E^1 e^1/2, \\
\delta\varepsilon = \delta\varepsilon_*^1 + E^0 \delta e^1 + E^1 \delta e^1, \qquad T = T^0 + T^1 + T^2, \\
T^0 = D\varepsilon_*^0, \qquad T^1 = D(\varepsilon_*^1 + E^0 e^1), \qquad T^2 = DE^1 e^1/2.
\end{gathered} \tag{6}$$

Подставив соотношения (6) в (5) с учетом равновесности начального состояния и опуская члены третьего и четвертого порядка малости, после несложных преобразований получим условие равновесия состояния, близкого к начальному:

$$\begin{multline}
\int\limits_S \delta(\varepsilon_*^1)^{\mathrm{т}}\, D\varepsilon_*^1\, dS + \int\limits_V \delta(d^1)^{\mathrm{т}}\, \rho_m \ddot{d}^1\, dV - \int\limits_S \delta(d^1)^{\mathrm{т}}\, P^1\, dS + \int\limits_S \delta(e^1)^{\mathrm{т}}\, \sigma_0 e^1\, dS + \\
+ \int\limits_S \delta(\varepsilon_*^1)^{\mathrm{т}}\, DE^0 e^1\, dS + \int\limits_S \delta(e^1)^{\mathrm{т}}\, DE^0 \varepsilon_*^1\, dS = 0.
\end{multline} \tag{7}$$

Здесь матрица σ_0, элементы которой находятся из условия $(E^1)^{\mathrm{т}} D\varepsilon_*^0 = \sigma_0 e^1$ (вектор ε_*^0 является решением соответствующей статической задачи), записывается следующим образом:

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix}
T_{11} & 0 & 0 & T_{12} & 0 & 0 & M_{11} & 0 & M_{12} \\
0 & T_{22} & T_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{22} & M_{12} \\
0 & T_{12} & T_{11} & 0 & 0 & 0 & M_{12} & 0 & M_{11} \\
T_{12} & 0 & 0 & T_{22} & 0 & 0 & 0 & M_{12} & M_{22} \\
0 & 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{12} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & T_{12} & T_{22} & 0 & 0 & 0 \\
M_{11} & 0 & M_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & M_{22} & 0 & M_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
M_{12} & M_{12} & M_{11} & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.$$

В представленных ниже примерах два последних интеграла в (7) не учитываются, что соответствует гипотезе напряженного недеформированного состояния.

2. Уравнения движения жидкости и численная реализация задачи. Движение идеальной сжимаемой жидкости, находящейся внутри оболочки и занимающей объем V_f, в случае потенциального течения описывается волновым уравнением, которое в цилиндрических координатах (r, θ, x) записывается в виде [8]

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\Big(\frac{\partial}{\partial t} + U\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)^2 \phi \qquad (8)$$

(ϕ — потенциал возмущений скорости; c — скорость звука в жидкости). Давление жидкости P_f на упругую конструкцию ($S_\sigma = S_f \cap S_s$) вычисляется по линеаризованной формуле Бернулли

$$P_f = p - \rho_f\Big(\frac{\partial \phi}{\partial t} + U\,\frac{\partial \phi}{\partial s}\Big). \qquad (9)$$

Здесь ρ_f — удельная плотность жидкости; s — меридиональная координата оболочки; S_f, S_s — площади поверхностей, ограничивающих объемы жидкости и оболочки соответственно. На поверхности раздела оболочка — жидкость S_σ задается условие непроницаемости

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t} + U\,\frac{\partial w}{\partial s}, \qquad (10)$$

где n — нормаль к поверхности. Потенциал возмущений скорости на входе в оболочку и выходе из нее подчиняется следующим граничным условиям:

$$x = 0\colon \quad \phi = 0, \qquad x = L\colon \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \qquad (11)$$

Применение метода Галеркина к уравнению в частных производных для потенциала возмущения скорости (8) с граничными условиями (10), (11) позволяет получить интегральное соотношение [9]

$$\sum_{l=1}^{m_\phi}\Big[\int\limits_{V_f}\Big(\frac{\partial F_l}{\partial r}\,\frac{\partial F_k}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial F_l}{\partial \theta}\,\frac{\partial F_k}{\partial \theta} + (1 - \mathrm{M}^2)\,\frac{\partial F_l}{\partial x}\,\frac{\partial F_k}{\partial x}\Big)dV\Big]\phi_{al} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{m_\phi}\Big(\int\limits_{V_f}\frac{2U}{c^2}\,\frac{\partial F_l}{\partial x}\,F_k\,dV\Big)\dot{\phi}_{al} + \sum_{l=1}^{m_\phi}\Big(\int\limits_{V_f}\frac{1}{c^2}\,F_l F_k\,dV\Big)\ddot{\phi}_{al} -$$

$$- \sum_{i=1}^{m_s}\Big(\int\limits_{S_\sigma} N_i^w F_k\,dS\Big)\dot{w}_{ai} - \sum_{i=1}^{m_s}\Big(\int\limits_{S_\sigma} U\,\frac{\partial N_i^w}{\partial s}\,F_k dS\Big)w_{ai} = 0, \quad k = 1, m_\phi.$$

Здесь m_ϕ, m_s — число конечных элементов, на которые разбиваются области, занятые жидкостью (V_f) и оболочкой (V_s); ϕ_{al}, w_{ai} — узловые значения для жидкости и оболочки; $\mathrm{M} = U/c$ — число Маха; F, N_i^w — функции формы для потенциала возмущений скорости и нормальной составляющей вектора перемещения.

Полученное уравнение можно представить в матричном виде

$$(K_\phi - A_\phi^c)\phi_a + M_\phi \ddot{\phi}_a - C_\phi^c \dot{\phi}_a - C_\phi w_a - A_\phi w_a = 0, \qquad (12)$$

где

$$K_\phi = \sum_{m_\phi}\int\limits_{V_f}\Big(\frac{\partial F^{\mathrm{T}}}{\partial r}\,\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial F^{\mathrm{T}}}{\partial \theta}\,\frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial F^{\mathrm{T}}}{\partial x}\,\frac{\partial F}{\partial x}\Big)\,dV, \qquad M_\phi = \sum_{m_\phi}\int\limits_{V_f}\frac{1}{c^2}\,F^{\mathrm{T}} F\,dV,$$

$$C_\phi = \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} F^{\mathrm{T}} N_w \, dS, \qquad C_\phi^c = -\sum_{m_\phi} \int_{V_f} \frac{2U}{c^2} \frac{\partial F^{\mathrm{T}}}{\partial x} F \, dV,$$

$$A_\phi = \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} U F^{\mathrm{T}} \frac{\partial N_w}{\partial s} \, dS, \qquad A_\phi^c = \sum_{m_\phi} \int_{V_f} \mathrm{M}^2 \frac{\partial F^{\mathrm{T}}}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial s} \, dV.$$

Используя для (7) с учетом (9) стандартные процедуры метода конечных элементов, получим следующее матричное соотношение:

$$(K_s + K_g) d + M_s \ddot{d} + \rho_f C_\phi^{\mathrm{T}} \dot{\phi}_a + \rho_f A_s \phi_a = 0. \tag{13}$$

Здесь $K_s = \sum_{m_s} \int_{S_s} B^{\mathrm{T}} D B \, dS$; B — матрица связи вектора деформаций ε_* с вектором узловых перемещений конечного элемента оболочки; $K_g = \sum_{m_s} \int_{S_s} G^{\mathrm{T}} \sigma_0 G \, dS$ — матрица геометрической жесткости; G — матрица связи деформаций e с вектором узловых перемещений; $M_s = \sum_{m_s} \int_{V_s} N^{\mathrm{T}} \rho_m N \, dV$; N — матрица функций формы элемента оболочки; $A_s = \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} U N_w^{\mathrm{T}} \frac{\partial F}{\partial s} \, dS$.

Исследование динамики поведения нагруженных оболочек вращения при внутреннем течении жидкости сводится к совместному решению двух систем уравнений (12) и (13). Объединенная система уравнений может быть записана в виде

$$K \begin{Bmatrix} d \\ \phi_a \end{Bmatrix} + M \begin{Bmatrix} \ddot{d} \\ \ddot{\phi}_a \end{Bmatrix} + \rho_f C \begin{Bmatrix} \dot{d} \\ \dot{\phi}_a \end{Bmatrix} + \rho_f A \begin{Bmatrix} d \\ \phi_a \end{Bmatrix} = 0,$$

где K — матрица жесткости; M — матрица масс; C — матрица демпфирования; A — матрица аэродинамической жесткости:

$$K = \begin{bmatrix} K_s + K_g & 0 \\ 0 & -\rho_f K_\phi \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} M_s & 0 \\ 0 & -\rho_f M_\phi \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & C_\phi^{\mathrm{T}} \\ C_\phi & C_\phi^c \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & A_s \\ A_\phi & A_\phi^c \end{bmatrix}.$$

Представляя выражения для возмущенного движения оболочки и жидкости в виде

$$d = q \exp(i^* \lambda t), \qquad \phi_a = \phi \exp(i^* \lambda t),$$

где q, ϕ — некоторые функции координат; $i^* = \sqrt{-1}$; $\lambda = \lambda_1 + i^* \lambda_2$ — характеристический показатель, окончательно получим

$$(K - \lambda^2 M + i^* \lambda \rho_f C + \rho_f A) \begin{Bmatrix} q \\ \phi \end{Bmatrix} = 0. \tag{14}$$

Решение задачи о динамическом поведении нагруженных оболочек вращения, заполненных жидкостью, сводится к вычислению и анализу собственных значений λ системы (14). Для неподвижной жидкости ($A = C_\phi^c = 0$) собственные значения системы (14) являются действительными. При скорости потока $U > 0$ собственные значения системы (14) в зависимости от граничных условий для оболочки являются комплексными или действительными. При достижении в системе оболочка — жидкость некоторых критических значений скорости потока в зависимости от граничных условий для оболочки возможны два типа потери устойчивости: статический (дивергенция) и динамический (флаттер). Неустойчивость первого типа характеризуется появлением у одного из собственных значений нулевой действительной части λ_1. Неустойчивость второго типа проявляется в "слиянии" двух форм колебаний и появлении отрицательной мнимой части λ_2 у одного из собственных значений.

Для вычисления комплексных собственных значений системы (14) используется метод Мюллера (метод парабол) [10].

Для численной реализации поставленной задачи применяется полуаналитический вариант метода конечных элементов, основанный на представлении решения в виде ряда Фурье по окружной координате θ. В этом случае исходная двумерная задача сводится к совокупности одномерных задач для каждой из гармоник ряда Фурье.

Для оболочки использован конечный элемент в виде усеченного конуса с аппроксимацией меридиональной и окружной компонент вектора перемещений линейным полиномом, а нормальной компоненты — кубическим полиномом. Для жидкости использовался треугольный конечный элемент с линейной аппроксимацией потенциала возмущений скорости.

В расчетах использовались 40 элементов для оболочки и 25 элементов (по радиусу) для жидкости, т. е. общее число степеней свободы равно 718 (без учета граничных условий).

3. Примеры численной реализации. Рассматриваются собственные колебания конической оболочки (модуль упругости $E = 6{,}77 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}29$, $\rho_m = 2648$ кг/м^3, $R = 0{,}15$ м, $L = 0{,}56$ м, $h = 5{,}3 \cdot 10^{-4}$ м, угол конусности равен 15°), жестко закрепленной с обоих торцов и заполненной неподвижной жидкостью. В таблице представлены низшие собственные частоты колебаний f_0 для различных номеров гармоник j. Результаты, полученные в данной работе, хорошо согласуются как с численными, так и с экспериментальными результатами (с погрешностью не более 2,5 %) работ [11, 12].

Рассмотрим резиновую цилиндрическую оболочку, жестко закрепленную с двух торцов ($u = v = w = \partial w/\partial s = 0$), внутри которой движется поток газа, рассматриваемый как несжимаемая среда. Расчеты выполнялись при $L/R = 25{,}9$, $h/R = 0{,}0227$, $\rho_f/\rho_m = 0{,}001\,36$, $j = 2$, $\nu = 0{,}5$. На рис. 1 представлена зависимость первых четырех безразмерных частот $\omega = \lambda/U_0$ от безразмерной скорости потока $\Lambda = U/U_0$, где $U_0 = \{E/[\rho_m(1-\nu^2)]\}^{1/2} = 36{,}73$.

При достижении скорости потока $\Lambda_D = 0{,}601$ происходит статическая потеря устойчивости (дивергенция), а при $\Lambda_F = 0{,}625$ возникает флаттер. При еще больших скоростях имеет место дивергенция для третьей и четвертой форм колебаний. Результаты расчетов, полученные в данной работе, хорошо согласуются с результатами расчетов в работе [13], где используется четыре члена разложения Галеркина, только для первых трех частот.

В ряде работ исследовано динамическое поведение цилиндрических оболочек вращения при внутреннем течении жидкости для различных граничных условий с учетом гидростатического давления жидкости. Обнаружено, что в случае двустороннего свободного опирания [2] или защемления [3] потеря устойчивости происходит в виде дивергенции, а в случае оболочки, защемленной на торце, в который втекает поток, и свободной на другом, — в виде флаттера с одной степенью свободы [3]. Кроме того, в работах [14, 15] обсуждается возможность аэродинамического демпфирования на докритических скоростях при несимметричном закреплении оболочек.

В настоящей работе также выполнены расчеты для цилиндрической оболочки при несимметричных граничных условиях, в частности для оболочки, свободно опертой на одном торце ($v = w = 0$ при $x = 0$) и жестко закрепленной на другом. При этом параметры

Собственные частоты колебаний конической оболочки, заполненной несжимаемой жидкостью, при различных значениях гидростатического давления

j	f_0, Гц			
	Результаты расчетов в данной работе	Результаты расчетов [11]	Результаты расчетов [12]	Экспериментальные данные [12]
		$p = 0$		
3	100,86	96,34	101,0	100,0
4	78,70	75,50	78,7	76,0
5	63,55	61,07	63,6	—
6	54,23	53,22	54,4	—
7	50,52	50,12	50,8	51,0
8	52,24	52,14	52,8	54,0
9	58,20	58,21	—	—
		$p = 0{,}1$ атм		
3	101,48	96,95	101,8	100,6
4	80,70	77,50	80,9	80,0
5	68,38	66,41	68,5	70,0
6	63,62	62,42	63,7	65,2
7	65,52	64,62	65,5	67,0
8	72,47	71,57	72,4	74,4
9	82,51	81,52	—	—
		$p = 0{,}3$ атм		
3	102,70	98,14	103,0	101,0
4	84,53	81,33	84,7	83,7
5	77,08	75,03	77,2	79,0
6	78,97	77,44	78,8	80,7
7	87,73	86,18	87,3	89,2
8	100,61	98,82	99,7	102,8
9	115,60	113,60	—	—
		$p = 0{,}5$ атм		
3	103,90	99,31	104,3	101,0
4	88,18	84,97	88,4	87,0
5	84,85	82,70	84,9	86,0
6	91,61	89,79	91,3	93,0
7	104,94	102,90	104,1	106,5
8	121,72	119,33	120,3	123,5
9	140,35	137,63	—	—

имели следующие значения: $\nu = 0{,}3$, $L = 6{,}7$, $\mu = \rho_f R/(\rho_m h) = 3{,}21$, $k = h^2/(12R^2) = 1{,}51 \cdot 10^{-7}$, $P = pR/(Eh) = 5{,}2 \cdot 10^{-6}$.

На рис. 2 представлены зависимости первых двух безразмерных частот $\omega = \lambda R/U_0$ ($\omega_1 = \mathrm{Re}\,(\omega)$, $\omega_2 = \mathrm{Im}\,(\omega)$, $U_0 = (E/\rho_m)^{1/2}$) от безразмерной скорости $\Lambda = U/U_0$ при $j = 6$. Действительные части собственных значений, полученные в данной работе, хорошо согласуются с результатами расчетов [14]. В [14] при несимметричных граничных условиях установлено наличие аэродинамического демпфирования (в докритической области $\omega_2 \neq 0$). Результаты настоящей работы не подтверждают наличие аэродинамического демпфирования в диапазоне докритических скоростей при рассмотренных симметричных и несимметричных граничных условиях.

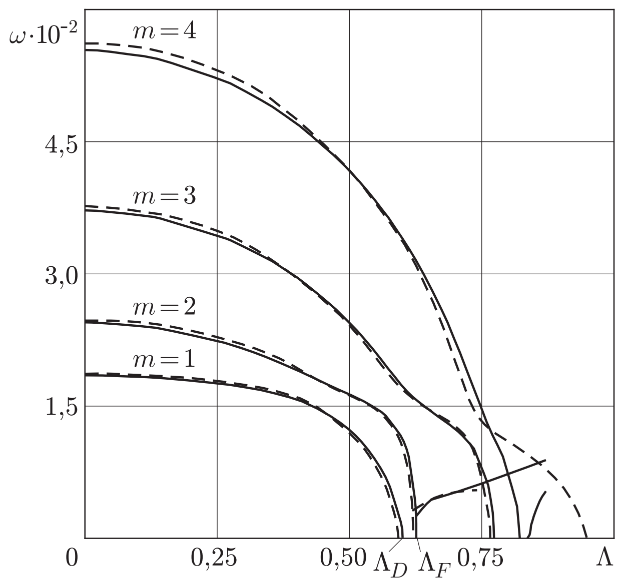

Рис. 1. Зависимость безразмерных собственных значений ω от безразмерной скорости потока воздуха Λ для резиновой оболочки, жестко закрепленной с двух торцов:
сплошные линии — результаты расчетов в данной работе; штриховые — результаты расчетов [13]

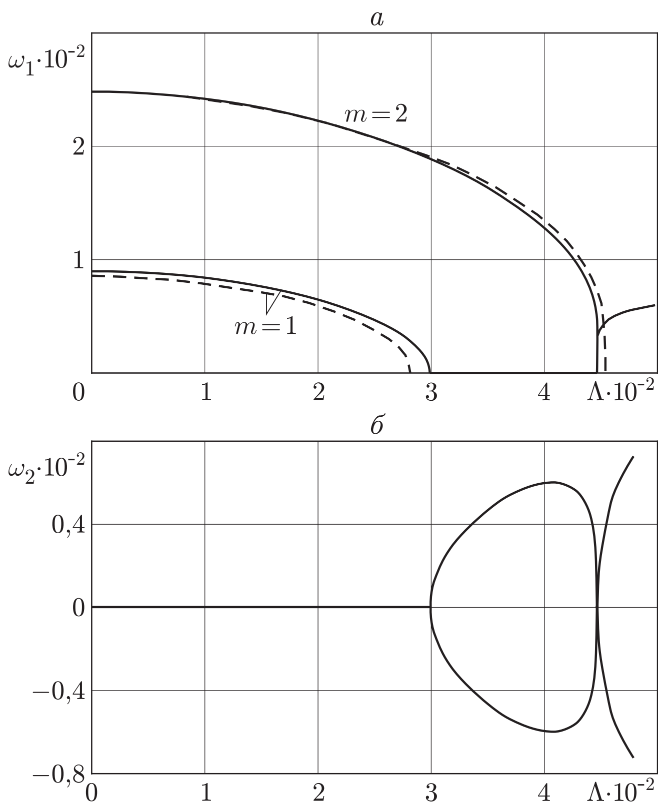

Рис. 2. Зависимости действительной (*а*) и мнимой (*б*) частей первых двух безразмерных собственных значений от безразмерной скорости жидкости Λ для цилиндрической оболочки, свободно опертой на одном торце и жестко закрепленной на другом:
сплошные линии — результаты расчетов в данной работе; штриховые — результаты расчетов [14]

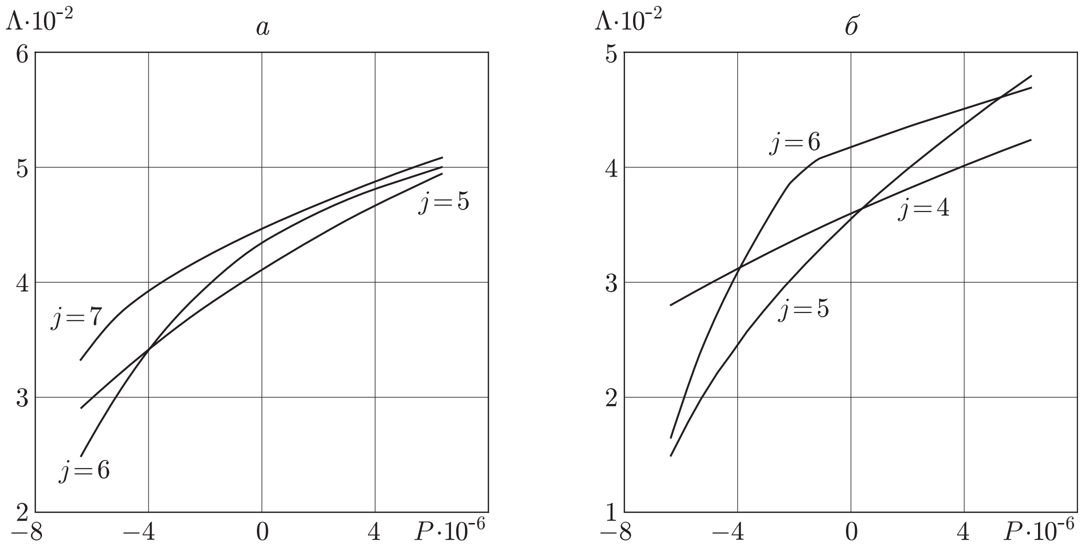

Рис. 3. Зависимость безразмерной критической скорости дивергенции Λ от безразмерного статического давления P:

а — оболочка, свободно опертая на одном торце и жестко закрепленная на другом; *б* — оболочка, свободно опертая на обоих торцах

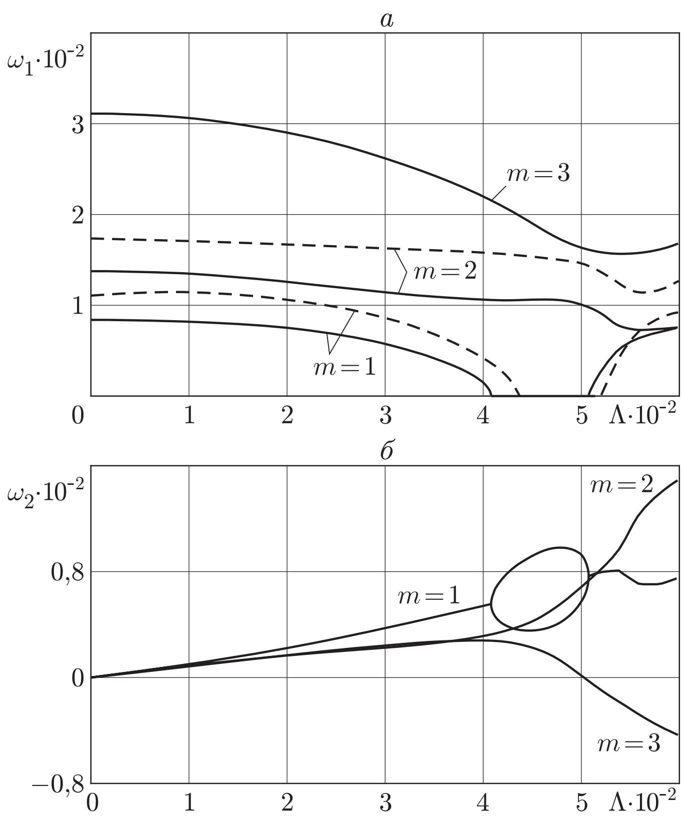

Рис. 4. Зависимости действительной (*а*) и мнимой (*б*) частей первых трех безразмерных собственных значений от безразмерной скорости жидкости Λ для цилиндрической оболочки, жестко закрепленной на одном торце и свободной на другом:

сплошные линии — результаты расчетов в данной работе; штриховые — результаты расчетов [14]

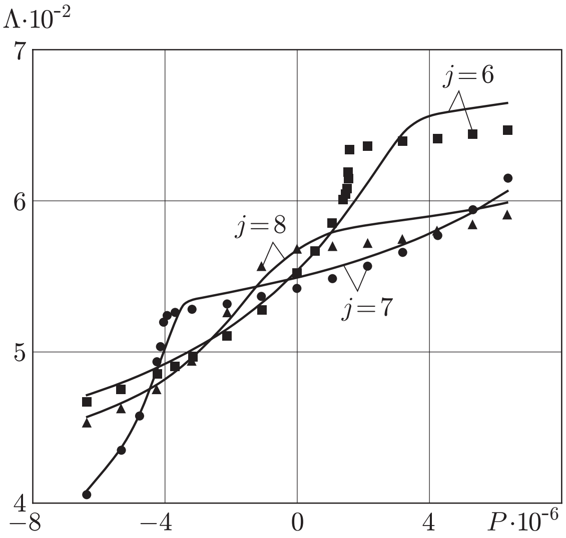

Рис. 5. Зависимость безразмерной критической скорости флаттера Λ от безразмерного статического давления P для оболочки, жестко закрепленной на одном торце и свободной на другом:
сплошные линии — несжимаемый газ; точки — сжимаемый газ

Для сравнения границ потери устойчивости оболочек при симметричных и несимметричных граничных условиях исследовалось влияние статического давления на динамические характеристики рассматриваемой системы. На рис. 3 показано поведение оболочек при различных граничных условиях. Видно, что форма потери устойчивости зависит от направления действия давления.

Как отмечено выше, для консольного способа закрепления оболочки имеет место потеря устойчивости в виде флаттера с одной степенью свободы, а аэродинамическое демпфирование наблюдается при $\Lambda > 0$. Кроме того, в [14] обнаружено, что для первой формы колебаний при $\omega_1 = 0$ имеют место два значения $\omega_2 > 0$. Выполненные при $P = 3{,}1 \cdot 10^{-6}$ расчеты подтверждают необычное динамическое поведение системы оболочка — жидкость (рис. 4). Указанная особенность сохраняется при других значениях давления, а также в его отсутствие.

Расчеты, выполненные для консольно закрепленной оболочки, показывают, что характер потери устойчивости существенно зависит от статического давления и направления его действия (рис. 5). В данной задаче оценивалось влияние сжимаемости газа ($c/U_0 = 0{,}0651$) на положение и форму границы потери устойчивости, которое, как показали расчеты, может быть как стабилизирующим, так и дестабилизирующим. При этом в случае критических номеров гармоник сжимаемость газа оказывает только дестабилизирующее влияние. Следует отметить, что наиболее существенное различие результатов, полученных с учетом и без учета сжимаемости, имеет место только при высоких скоростях потока газа ($\mathrm{M} \gtrsim 1$).

Заключение. Представлена математическая постановка задачи о динамическом поведении предварительно нагруженных оболочек вращения, содержащих неподвижную или текущую сжимаемую жидкость, а также конечно-элементный алгоритм ее численной реализации. Достоверность алгоритма подтверждается рядом примеров. Выполнена серия расчетов, в которых исследовано влияние граничных условий, статического давления и сжимаемости газа на динамическое поведение моделируемых систем. Получен ряд новых данных о характере потери устойчивости оболочек, взаимодействующих с внутренним потоком жидкости (газа).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Paidoussis M. P., Li G. X.** Pipes conveying fluid: a model dynamical problem // J. Fluids Struct. 1993. V. 7, N 2. P. 137–204.
2. **Weaver D. S., Unny T. E.** On the dynamic stability of fluid conveying pipes // J. Appl. Mech. 1973. V. 40. P. 48–52.
3. **Paidoussis M. P., Denise J.-P.** Flutter of thin cylindrical shells conveying fluid // J. Sound Vibr. 1972. V. 20, N 1. P. 9–26.
4. **Kochupillai J., Ganesan N., Padmanabhan C.** A semi-analytical coupled finite element formulation for shells conveying fluids // Comput. Struct. 2002. V. 80. P. 271–286.
5. **Zhang Y. L., Gorman D. G., Reese J. M.** Vibration of prestressed thin cylindrical shells conveying fluid // Thin-Walled Struct. 2003. V. 41. P. 1103–1127.
6. **Zhang Y. L., Reese J. M., Gorman D. G.** Finite element analysis of the vibratory characteristics of cylindrical shells conveying fluid // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2002. V. 191. P. 5207–5231.
7. **Ванин Г. А.** Устойчивость оболочек из армированных материалов / Г. А. Ванин, Н. П. Семенюк, Р. Ф. Емельянов. Киев: Наук. думка, 1978.
8. **Вольмир А. С.** Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979.
9. **Бочкарев С. А.** Конечно-элементный анализ динамического поведения цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // Вычислительная механика: Сб. науч. тр. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2006. Вып. 5. С. 9–20.
10. **Жидков И. П.** Методы вычислений / И. П. Жидков, Н. С. Березин. М.: Наука, 1966. Т. 1.
11. **Григорьев В. Г.** Методология исследования динамических свойств сложных упругих и гидроупругих систем: Дис. ... д-ра техн. наук. М., 2000.
12. **Горбунов Ю. А., Новохатская Л. М., Шмаков В. П.** Теоретическое и экспериментальное исследование спектра собственных неосесимметричных колебаний конической оболочки с жидкостью при наличии внутреннего давления // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 1975. С. 47–52.
13. **Paidoussis M. P., Mateescu A. D.** Dynamics of cylindrical shell containing fluid flows with a developing boundary layer // AIAA J. 1987. V. 25. P. 857–863.
14. **Горачек Я., Золотарев И.** Влияние закрепления краев цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью на ее динамические характеристики // Прикл. механика. 1984. Т. 20, № 8. С. 88–98.
15. **Paidoussis M. P.** Some unresolved issues in fluid-structure interactions // J. Fluids Struct. 2005. V. 20, N 6. P. 871–890.

Поступила в редакцию 17/IV 2007 г.