

МНОГОЧАСТИЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В СТАТИКЕ КОМПОЗИТОВ

Наряду с методами эффективного поля [1—3] и среды [4, 5], сравнительный анализ которых проведен в [2], в механике композитных материалов получил распространение дифференциальный метод эффективной среды (МЭС) [6—13]. Дифференциальный МЭС возник как альтернатива двусмысленному допущению МЭС, когда значение эффективного модуля используется для оценки средней концентрации деформации на изолированном включении. Дифференциальный МЭС рассматривается как процесс последовательного дополнения фазы включений в однородную среду с модулем, равным эффективному модулю среды с ранее добавленными в матрицу включениями. Этот процесс можно осуществить двумя способами. Во-первых допустить, что фаза включений состоит из бесконечного числа фракций с бесконечно отличными размерами и последовательность помещения включений в соответствующую однородную среду проводится в порядке возрастания размеров включений. Во-вторых, включения исходного размера добавлять в среду бесконечно малыми порциями до конечной реальной концентрации. Оба способа приводят к эквивалентным результатам, поскольку на каждом итерационном шаге используется одно и то же решение одночастичной задачи оценки эффективного модуля среды с бесконечно малой концентрацией включений. При этом могут применяться как МЭС [6—12], так и метод эффективного поля (МЭП) [13].

В данной работе на каждом итерационном шаге дифференциальной схемы решается не одночастичная [6—13], а многочастичная задача с использованием предложенного ранее алгоритма [1, 3]. При сравнении расчетных данных с экспериментальными показано преимущество многочастичного дифференциального метода перед одночастичным.

1. Общие соотношения. Пусть однородная матрица v_0 с тензором свойств $L(x) = L_0$ ($x \in v_0$) содержит случайное множество $X = (V_k, x_k, \omega_k)$ ($k = 1, 2, \dots$) эллипсоидов v_k с характеристическими функциями V_k , центрами x_k , образующими пуассоновское множество, полюсами a_k^i ($a_k^1 \geq a_k^2 \geq a_k^3$), совокупностью эйлеровых углов ω_k и тензором свойств $L(x) = L_0 + L_1(x) = L_0 + L_1^{(k)}(x)$ ($x \in v_k$), где тензоры $L_1^{(k)}$ — неоднородные функции координат. Конкретный смысл тензора $L(x)$ может быть различным; в задачах переноса (электропроводности, теплопроводности) это двухвалентные тензоры коэффициентов переноса, в упругой задаче под $L(x)$ понимается четырехвалентный тензор модулей упругости. Локальное уравнение состояния, связывающее тензоры плотности потока σ и напряженность поля ε с потенциалом u , принимается в виде

$$(1.1) \quad \sigma(x) = L(x)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) = \nabla u(x)$$

(∇ — операция градиента и симметризованного градиента для скалярного и векторного потенциалов u соответственно). Используя стандартные обозначения тензорного анализа. Подставляя (1.1) в уравнение равновесия $\operatorname{div} \sigma(x) = 0$, получим дифференциальное уравнение относительно потенциала u и, преобразуя последнее к интегральному, имеем [3]

$$(1.2) \quad \varepsilon(x) = \langle \varepsilon \rangle + \int U(x-y) [V(y) L_1(y) \varepsilon(y) - \langle L_1 \varepsilon \rangle] dy, \quad V(y) = \bigcup_{i=1} V_i(y).$$

Здесь $U = \nabla \nabla G$; G — тензор Грина уравнения Ламе однородной среды с тензором свойств L_0 ; $\langle (\cdot) \rangle$ — операция усреднения по ансамблю статистически однородного эргодичного поля X . Если множество $X = (V_k,$

x_k, ω_k конечно ($k = 1, \dots, n$), то при заданной на бесконечности напряженности поля ε_0 уравнение (1.2) преобразуется:

$$(1.3) \quad \varepsilon(x) = \varepsilon_0 + \int U(x-y) V(y) L_1(y) \varepsilon(y) dy, \quad V(y) = \sum_{i=1}^n V_i(y).$$

Оценка тензора эффективных свойств L^* в выражении

$$(1.4) \quad \langle \sigma \rangle = L^* \langle \varepsilon \rangle$$

определяется из усреднения локального уравнения состояния (1.1)

$$(1.5) \quad L^* = L_0 + \sum_{i=1}^N \langle R_i^* \rangle_{\omega} c_i, \quad \langle L_1(y) \varepsilon(y) V_i(y) \rangle_i \equiv R_i^* \langle \varepsilon \rangle,$$

где $\langle (\cdot) \rangle_i$ — операция усреднения по возможным ориентациям ω_i включений v_i ; N — число компонентов. Первое уравнение (1.5) можно переписать в форме

$$(1.6) \quad L^* = L_0 + \sum_{i=1}^N \langle R_i^* A_0^{-1} \rangle_{\omega} \left[c_0 I + \sum_{j=1}^N c_j \langle A_j^0 \rangle_{\omega} \right]^{-1};$$

$$(1.7) \quad \langle \varepsilon \rangle_i = A_i^0 \langle \varepsilon \rangle_0, \quad \langle \varepsilon \rangle_0 = A_0 \langle \varepsilon \rangle, \quad c_\alpha = \langle V_\alpha \rangle$$

($\langle (\cdot) \rangle_\alpha$ — среднее по объему компонента α ($\alpha = 0, 1, \dots, N$)).

Для вычисления R_i^* (1.5) введем $\varphi(v_m | x_1, \dots, x_n)$ — условные плотности вероятности нахождения m -го включения в области v_m при фиксированных включениях $v_1, \dots, v_n$ с центрами $x_1, \dots, x_n$. Относительно функции $\varphi(v_m | x_1, \dots, x_n)$ известно, что $\varphi(v_m | x_1, \dots, x_n) = 0$ при $x_m \in v_{1, \dots, m}^c = \bigcup v_j$ (объединение по $j = 1, \dots, m$), где области $v_j^0 \supset v_j$ ($j = 1, \dots, n$) имеют характеристические функции $\bar{v}_j^0$ и $\varphi(v_m | x_1, \dots, x_n) \rightarrow \varphi(v_m)$ при $|x_i - x_m| \rightarrow \infty$ ($i = 1, \dots, n$). Усредним (1.2) на множестве X при фиксированных включениях $v_1, v_1, v_2; \dots$ с помощью различных условных плотностей распределения $\varphi(v_m | x_1, \dots, x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$). Получим бесконечную систему связанных интегральных уравнений ($j = 1, \dots, n$):

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \langle \varepsilon(x) | x_1 \rangle &= \int U(x-y) V_1(y) \langle L_1(y) \varepsilon(y) | x_1 \rangle dy = \\ &= \langle \varepsilon \rangle + \int U(x-y) [\langle L_1(y) \varepsilon(y) | y; x_1 \rangle - \langle L_1 \varepsilon \rangle] dy, \\ \langle \varepsilon(x) | x_1, \dots, x_j \rangle &= \sum_{i=1}^j \int U(x-y) V_i(y) \langle L_1(y) \varepsilon(y) | x_1, \dots, x_j \rangle dy = \\ &= \langle \varepsilon \rangle + \int U(x-y) [\langle L_1(y) \varepsilon(y) | y; x_1, \dots, x_j \rangle - \langle L_1 \varepsilon \rangle] dy \end{aligned}$$

($\langle \cdot | y; x_1, \dots, x_j \rangle$ — условное среднее при фиксированных включениях с центрами в $y, x_1, \dots, x_j$ и $y \neq x_1, \dots, x_j$). Обозначим правую часть j -й ($j = 1, 2, \dots$) строки системы через поле $\varepsilon(x)_{1, \dots, j}$, имеющее простой физический смысл поля деформаций, в котором находятся фиксированные n включений. При этом каждое включение v_i из выбранных фиксированных находится в поле

$$(1.9) \quad \bar{\varepsilon}_i(x) = \widehat{\varepsilon}(x)_{1, \dots, j} + \sum_{k \neq i} \int U(x-y) V_k(y) L_1(y) \varepsilon(y) dy, \quad x \in v_i.$$

Поля деформаций внутри включений v_i зависят только от значения неоднородного, вообще говоря, поля $\bar{\varepsilon}_i$ в области v_i . Чтобы не учитывать в дальнейшем зависимость слагаемых (1.8) от $x \in v_i$, осредним каждую j -ю строку ($j = 1, 2, \dots$) системы (1.8) по объему $\bar{v}_i$ i -го включения ($i = 1, \dots, j$), тогда

$$(1.10) \quad \langle \varepsilon(x) | x_1, \dots, x_j \rangle_i = \sum_{k=1}^j \bar{v}_i^{-1} \iint U(x-y) V_i(x) V_k(y) \langle L_1(y) \varepsilon(y) | x_1, \dots$$

$$\dots, x_j \rangle dy dx = \langle \varepsilon \rangle + \bar{v}_i^{-1} \iint U(x-y) V_i(x) [\langle L_1(y) \varepsilon(y) | y; x_1, \dots, x_j \rangle - \langle L_1 \varepsilon \rangle] dy dx$$

$(\langle \langle \cdot \rangle \rangle_i \equiv \bar{v}_i^{-1} \int (\cdot) V_i(x) dx$ — операция осреднения по объему i -го включения). Может быть предложено несколько допущений относительно правой части (1.10), чтобы замкнуть систему (1.10). Но в любом случае следующим шагом должно явиться решение задачи для конечного числа включений (левая часть (1.10)) в поле деформаций, задаваемом или определяемом из самосогласованных оценок.

2. Конечное число включений в однородной матрице. Решим вспомогательную задачу для конечного множества $X_k(V_k, x_k, \omega_k)$ ($k = 1, \dots, n$) эллипсоидов в однородной матрице с тензором свойств L_0 и заданным на бесконечности полем $\langle \varepsilon(x)_{1, \dots, n} \rangle$. Для приближенного решения задачи воспользуемся одной из гипотез МЭП [1—3], согласно которой каждое включение v_i ($i = 1, \dots, n$) находится в однородном поле $\bar{\varepsilon}_i$; погрешность такого допущения оценивалась в [3] для упругой задачи о плоскости с прямолинейными разрезами. Тогда система (1.10) при фиксированных значениях $\langle \varepsilon(x)_{1, \dots, n} \rangle_i$ ($x \in v_i$) правых частей становится алгебраической:

$$(2.1) \quad \langle \bar{\varepsilon}(x) | x_1, \dots, x_n \rangle_i - \sum_{j=1}^n \bar{v}_i^{-1} \iint U(x-y) V_j(y) V_i(x) \times \\ \times \langle L_1(y) \varepsilon(y) | y; x_1, \dots, x_n \rangle_j dx dy = \langle \bar{\varepsilon}(x)_{1, \dots, n} \rangle_i;$$

$$(2.2) \quad \langle \varepsilon(x) \rangle_i - \langle U(x) \rangle_i \langle L_1(x) \varepsilon(x) \rangle_i = \langle \bar{\varepsilon}(x) | x_1, \dots, x_n \rangle_i.$$

При выводе (2.2) использовалось характеристическое свойство эллипсоида $\langle U(x) \rangle_i = \text{const}$ при $x \in v_i$ [4]. Ввиду линейности задачи (2.2) существует постоянный тензор B_i такой, что

$$(2.3) \quad \langle \varepsilon(x) \rangle_i = B_i \langle \bar{\varepsilon}(x) | x_1, \dots, x_n \rangle_i;$$

$$(2.4) \quad \langle L_1(x) \varepsilon(x) \rangle_i = R_i \langle \bar{\varepsilon}(x) | x_1, \dots, x_n \rangle_i$$

($R_i = \langle U(x) \rangle_i^{-1} (B_i - I)$). Например для однородного эллипсоидального включения v_i при $L_i^{(i)} = \text{const}$

$$(2.5) \quad B_i = (I + P_i L_1^{(i)})^{-1},$$

($P_i = - \int U(x-y) V_i(y) dy$ ($x \in v_i$) — постоянный тензор, не зависящий от физических свойств и размеров (но не формы) эллипсоида v_i). Тензор P_i можно представить в виде $P_i = S_i L_0^{-1}$, где тензор S_i в задачах упругости (тензор Эшелби) [4] и проводимости [14] построен для сферы, эллиптического цилиндра, сплюсненного и вытянутого эллипсоидов. Известен также тензор B_i (2.3) для двухслойного сфероида [15, 16].

Из (1.3), (2.3) получим систему

$$(2.6) \quad \langle \bar{\varepsilon}(x) | x_1, \dots, x_n \rangle_i - \sum_{j \neq i}^n \bar{v}_i^{-1} \iint U(x-y) V_i(x) V_j(y) R_j \langle \bar{\varepsilon}(y) | y; \\ x_1, \dots, x_n \rangle_j dx dy = \langle \bar{\varepsilon}(x)_{1, \dots, n} \rangle_i;$$

которая является системой линейных алгебраических уравнений относительно $\bar{\varepsilon}_i$ и может быть решена стандартными методами линейной алгебры. Для этого перейдем от тензорной формы записи (2.6) к матричной [4]. Сформируем матрицу Z^{-1} с элементами Z_{mk}^{-1} ($m, k = 1, \dots, N$) в виде подматриц

$$(2.7) \quad Z_{mk}^{-1} = I \delta_{mk} - (1 - \delta_{mk}) R_m S(x_m - x_k),$$

$$S(x_m - x_k) = \bar{v}_m^{-1} \iint U(x-y) V_m(x) V_k(y) dx dy.$$

Тогда решение (2.6) запишется в виде

$$(2.8) \quad R_i \langle \bar{\varepsilon}(x) | x_1, \dots, x_n \rangle_i = \sum_{j=1}^n Z_{ij} R_j \langle \bar{\varepsilon}(x)_{1, \dots, n} \rangle_j.$$

Решение (2.8) может быть построено также методом последовательных приближений [1]; так, с учетом первых двух итераций

$$(2.9) \quad Z_{ij} = I \delta_{ij} + (1 - \delta_{ij}) \sum_{j \neq i}^n S(x_i - x_j) R_j.$$

3. Многочастичный метод эффективной среды. В одночастичном методе эффективной среды предполагается, что изолированное включение помещается в однородную матрицу с тензором свойств $L = L^*(c)$ и заданной на бесконечности напряженностью поля $\langle \varepsilon \rangle$. Тогда для L^* получим неявное уравнение

$$(3.1) \quad L^* = L_0 + \sum_{i=1}^N \ll \bar{R}_i \gg_{\omega} c_i, \\ \bar{R}_i = \langle \bar{U}(x) \rangle_i^{-1} (\bar{B}_i - I), \quad \bar{B}_i = (I + \bar{P}_i (L(x) - L^*))^{-1}, \quad x \in v_i,$$

где черта над тензором указывает на его вычисление с учетом того, что свойства матрицы совпадают со свойствами эффективной среды.

В предлагаемом варианте многочастичного (n -частичного) метода эффективной среды предполагается, что включения помещаются в матрицу с модулем $L^* = L^*(c)$ и на каждые n включений действует однородное поле $\langle \varepsilon \rangle$. Последнее предположение позволяет замкнуть систему (1.10), которая с учетом решений для одного (2.3) и n включений представляется в виде ($j = 1, \dots, n-1, i = 1, \dots, j$)

$$(3.2) \quad \langle \bar{\varepsilon}(x)_{1, \dots, j} \rangle_i = \langle \varepsilon \rangle + \int \left\{ \bar{S}(x_i - x_q) \varphi(v_q | x_1, \dots, x_j) \sum_{l=1}^{j+1} \bar{Z}_{ql} \bar{R}_l \langle \bar{\varepsilon}(x)_{1, \dots, j+1} \rangle_l - \right. \\ \left. - \bar{S}_i(x_i - x_q) \langle \bar{R}V \rangle \langle \varepsilon \rangle \right\} dx_q, \\ \langle \bar{\varepsilon}(x)_{1, \dots, n-1} \rangle_i = \langle \varepsilon \rangle + \int \left\{ \bar{S}(x_i - x_q) \varphi(v_q | x_1, \dots, x_{n-1}) \sum_{l=1}^n \bar{Z}_{ql} \bar{R}_l - \right. \\ \left. - \bar{S}_i(x_i - x_q) \langle \bar{R}V \rangle \right\} dx_q \langle \varepsilon \rangle.$$

Из последнего уравнения определяем эффективное поле $\langle \bar{\varepsilon}(x)_{1, \dots, n-1} \rangle_i$ с точностью до членов первого порядка малости по c . Подставляем найденное значение в предыдущее уравнение и т. д. Тем самым получим представление для $\bar{R}_i^*$ в виде тензорного полинома степени n по c .

4. Схема дифференциального метода. Рассмотрим обобщение схемы дифференциального метода [12, 13] на случай многокомпонентного наполнителя сложной структуры. Возьмем объем v композиционной среды с некоторой конечной концентрацией включений $i = 1, 2, \dots$ (отличной, вообще говоря, от концентрации c_i). Композитная среда заменяется однородной объема v с тензором свойств L , определяемым из равенства $\langle \sigma \rangle = L \langle \varepsilon \rangle$. Бесконечно малый дискретный объем однородной среды удаляем и заменяем суммой компонентов $i = 1, 2, \dots$, т. е. представительный объем dv_i со свойством L заменяем на тот же объем dv_i со свойством i -го компонента. Если $\bar{R}_i^*$ — среднее значение коэффициента концентрации тензора поляризации

$$\langle \tilde{L}_1(x) \varepsilon(x) \rangle_i = \bar{R}_i^* \langle \varepsilon \rangle \quad (\tilde{L}_1(x) \equiv L(x) - L)$$

элемента dv_i , то приращение тензора эффективных свойств L можно найти из формулы (1.5) в виде

$$(4.1) \quad dL = \sum_{i=1}^N \ll \tilde{R}_i^* \frac{dv_i}{v} \gg_{\omega}.$$

Поскольку удобнее проводить выкладки с приращениями долей объемов dc_i , то можно показать [12, 13], что

$$\frac{dv_i}{v} = \lambda_i \frac{dc}{1-c}, \quad c = \sum_{i=1}^N c_i, \quad \lambda_i = c_i/c$$

и, следовательно,

$$(4.2) \quad dL = \sum_{i=1}^N \ll \tilde{R}_i^* \lambda_i \frac{dc}{1-c} \gg_{\omega}.$$

Уравнение (1.7) — обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестного тензора L с начальным условием $L(0) = L_0$, $c_i(0) = 0$, $c(0) = 0$ ($i = 1, \dots, N$) и независимой переменной c ($\lambda_i = c_i/c = \text{const}$). Обоснование формулы (1.7) для однородных включений дано в [8], в том числе для однокомпонентного наполнителя — в [5, 6, 10, 11]. Для замыкания уравнения (1.7) необходимо остановиться на конкретном значении $\tilde{R}_i^*$, что может быть определено на основе одночастичного и многочастичного подходов.

5. Одночастичный дифференциальный метод. В распространенном одночастичном дифференциальном методе предполагается, что тензор $\tilde{R}_i^*$ находится из решения задачи для изолированного включения i в однородной среде с тензором свойств L и заданным на бесконечности однородным полем $\langle \varepsilon \rangle$. При постулировании равенства R_i^* (1.5) и $\tilde{R}_i$ (3.1) ($R_i^* = \tilde{R}_i$) имеет место метод эффективной среды. Тогда использование $\tilde{R}_i$ (3.1) в дифференциальном уравнении для эффективного модуля (4.2)

$$(5.1) \quad \tilde{R}_i^* = \tilde{R}_i$$

является своего рода комбинацией одночастичного метода эффективной среды и дифференциальной схемы (4.2) [12, 13].

Другой вариант одночастичного дифференциального метода основан на применении гипотезы средних деформаций Мори — Танака [5, 17], которая является частным случаем гипотез метода эффективного поля [2]. Именно из определения тензоров A_i^0 ($i = 0, 1, \dots$) (1.7) следует, что тензор $\tilde{R}_i^*$ (4.1) может быть представлен в виде

$$(5.2) \quad \tilde{R}_i^* = \tilde{R}_i^* A_0^{-1} \left(c_0 I + \sum_{j=1}^N \ll c_j A_j^0 \gg_{\omega} \right)^{-1}.$$

В гипотезе Мори — Танака [5, 17, 18] предполагается, что

$$(5.3) \quad A_i^0 = B_i,$$

и для получения альтернативного варианта одночастичного дифференциального метода достаточно принять

$$(5.4) \quad \tilde{R}_i^* A_0^{-1} = R_i,$$

тогда уравнения (4.2), (5.2) — (5.4) образуют замкнутую систему для расчета эффективного модуля

$$(5.5) \quad dL = \sum_i \ll \tilde{R}_i \gg_{\omega} \left(c_0 I + \sum_{j=1}^N \ll c_j B_j \gg_{\omega}^{-1} \right)^{-1} \lambda_i \frac{dc}{1-c}.$$

Гипотеза (5.3) постулирует независимость тензора концентрации средней напряженности поля $\langle \varepsilon \rangle_i$ на включениях по отношению к средней на-

пряженности поля в матрице $\langle \varepsilon \rangle_0$ от концентрации наполнителя в реальном композите. Соотношение (5.4) утверждает дополнительно равенство указанного тензора концентрации аналогичному тензору концентрации на каждом шаге итерационного процесса добавления бесконечно малой концентрации включений к однородной среде с тензором свойств $L(c)$. Формула (5.5) является комбинацией одночастичного МЭП [2] и дифференциальной схемой (4.2).

Для композитной среды с однокомпонентным однородным наполнителем имеет место соотношение

$$A_i^0 = \frac{1-c_1}{c_1} (L - L_0) (L^{(1)} - L)^{-1},$$

подставляя которое в (5.5) при допущении (5.3), (5.4), получим

$$(5.6) \quad dL/dc_1 = (L^{(1)} - L) B_i (L^{(1)} - L_0)^{-1} (L^{(1)} - L) (1 - c_1)^{-2}.$$

6. Многочастичный дифференциальный метод (комбинация с МЭС).

В рассматриваемом варианте метода принимается, что тензор $\tilde{R}_i^*$ (4.2) определяется из осреднения решения задач для n включений в однородной среде с тензором свойств L и заданным на бесконечности полем $\langle \varepsilon \rangle$. Поскольку добавление компонента i ($i = 1, 2, \dots$) на каждом итерационном шаге дифференциальной схемы (4.2) мало ($\lambda_i dc / (1 - c) \ll 1$), то можно считать, что $\langle \varepsilon(x)_i \rangle_i$ (3.2), а значит, и $\tilde{R}_i^*$ имеют представление в виде ряда по степеням малого параметра $dc/(1 - c)$:

$$(6.1) \quad \tilde{R}_i^* = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{(k)} \tilde{R}_i^{(k)} \left(\frac{dc}{1-c} \right)^k, \quad \lambda^{(k)} = \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{k_i}, \quad \sum_{i=1}^{n-1} k_i = k,$$

причем $\tilde{R}_i^{(0)} = \bar{R}_i$. Но для каждой достаточно гладкой функции (в том числе для L и $\tilde{R}_i^*$) есть разложение в ряд Тейлора по степеням $dc/(1 - c)$. Тогда из (4.2) и сравнения коэффициентов при равных степенях $dc/(1 - c)$ в соответствующих рядах Тейлора и (6.1) получим обыкновенное дифференциальное уравнение n порядка

$$(6.2) \quad d^n L / dc^n = \sum_{i=1}^N \lambda_i \tilde{R}_i^{(n)} n! / (1 - c)^{n+1}$$

с начальными условиями

$$(6.3) \quad L^{(0)}(0) = L_0, L^{(1)}(0) = \bar{R}_i, \dots, L^{(n-1)}(0) = \sum_{i=1}^N \tilde{R}_i^{(n-1)} (n-1)!$$

7. Многочастичный дифференциальный метод (комбинация с МЭП).

В предлагаемом (6.2) методе на каждом итерационном шаге дается оценка $\tilde{R}_i^*$ (4.2) исходя из n -частичного МЭП [1, 3]. Именно полученные решения для одного (2.3), (2.4) и конечного числа включений (2.7), находящихся в эффективных полях $\bar{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\varepsilon}(x)_{1,\dots,n}$, а также принятие гипотезы Н2 [1, 3] ($\langle \hat{\varepsilon}(x)_{1,\dots,j,\dots,n+1} \rangle_i = \langle \varepsilon(x)_{1,\dots,n} \rangle_i$ ($j \neq i, 1 \leq j \leq n, x \in v_i$)), позволяют замкнуть систему (1.10):

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \langle \hat{\varepsilon}(x)_{1,\dots,j} \rangle_i &= \langle \varepsilon \rangle + \int \left\{ \bar{S}(x_i - x_q) \varphi(v_q | x_1, \dots, x_j) \sum_{l=1}^{j+1} \bar{Z}_{ql} \bar{R}_l \times \right. \\ &\quad \times \langle \hat{\varepsilon}(x)_{1,\dots,j+1} \rangle_l - \bar{S}_i(x_i - x_q) \langle \bar{R} V \hat{\varepsilon}_1 \rangle \Big\} dx_q, \\ \langle \hat{\varepsilon}(x)_{1,\dots,n} \rangle_i &= \langle \varepsilon \rangle + \int \left\{ \bar{S}(x_i - x_q) \varphi(v_q | x_1, \dots, x_j) \sum_{l=1}^n \bar{Z}_{ql} \bar{R}_l \langle \hat{\varepsilon}(x)_{1,\dots,n} \rangle_l - \right. \\ &\quad \left. - \bar{S}_i(x_i - x_q) \langle \bar{R} V \hat{\varepsilon}_1 \rangle \right\} dx_q \end{aligned}$$

($j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, j$). В правой части последнего уравнения (7.1) тензор $\langle \bar{\varepsilon}_{1, \dots, n} \rangle$ образован из тензора $\langle \varepsilon_{1, \dots, n} \rangle$ левой части заменой одного из индексов на q ; (7.1) — линейная система интегральных уравнений относительно $\langle \bar{\varepsilon}(x)_{1, \dots, j} \rangle_l$ ($j = 1, \dots, n, l = 1, \dots, j$), при этом в каждой j -й строке с $\langle \bar{\varepsilon}(x)_{1, \dots, j} \rangle_l$ в левой части содержится j уравнений, так как $i = 1, \dots, j$. Значение $\langle \bar{\varepsilon}(x)_{1, \dots, n} \rangle_i$ ($i = 1, \dots, n$) оцениваем из последней строки (7.1) методом последовательных приближений при всех возможных положениях включений $v_1, \dots, v_n$, затем подставляем его в правую часть $n - 1$ строки и т. д. Оценка $\langle \bar{\varepsilon}(x)_1 \rangle_1$ (7.1) позволяет найти $\bar{R}_i^c$ (1.5) и A_0, A_i^c (1.7); в полученных соотношениях в отличие от (6.4) не предполагается бесконечная малость концентрации включений.

Аналитическое явное решение задачи удастся найти, если ограничиться двухчастичным приближением и допущением

$$\langle \bar{\varepsilon}(x)_{12} \rangle_i = \langle \bar{\varepsilon}(x_i) \rangle = \text{const} \quad (i = 1, 2).$$

Тогда из первого уравнения (7.1) имеем

$$(7.2) \quad \bar{R}_i \langle \bar{\varepsilon}_i \rangle = \bar{R}_i \langle \varepsilon \rangle + \bar{R}_i \int \left\{ \bar{S}(x_i - x_q) \sum_{l \neq i, q}^2 \bar{Z}_{ql} \bar{R}_l \langle \bar{\varepsilon}_l \rangle \varphi(v_q | x_q; x_i) - \right. \\ \left. - \bar{S}_i(x_i - x_q) \langle \bar{R} \bar{\varepsilon} \rangle c_q \right\} dx_q.$$

Система (7.2) является линейной алгебраической и решается для произвольного числа компонентов в предположении, что включения относятся к разным компонентам, если отличаются физическими свойствами, размерами и ориентациями. Можно значительно сократить число неизвестных, если постулировать независимость $\bar{\varepsilon}_i$ от ω_i . Тогда, осредняя (7.2), при некоторых очевидных допущениях получим

$$(7.3) \quad \langle \bar{R}_i \rangle_\omega \langle \bar{\varepsilon}_i \rangle = \sum_{j=1}^N (\bar{Y}^{-1})_{ij} \langle \bar{R}_j \rangle_\omega \langle \varepsilon \rangle,$$

где матрица $\bar{Y}^{-1}$ имеет обратную с элементами в виде подматриц

$$(7.4) \quad \bar{Y}_{ij} = \delta_{ij} \left\{ I - \langle \bar{R}_i \rangle_\omega \int \langle \bar{S}(x_i - x_j) \rangle_\omega \bar{Z}_{ji} \varphi(v_j | x_q; x_i) \right\} + \\ + (\delta_{ij} - 1) \langle \bar{R}_i \rangle_\omega \int \{ \langle \bar{S}(x_i - x_j) \rangle_\omega \bar{Z}_{ji} \varphi(v_j | x_q; v_i) - \\ - \langle \bar{S}_i(x_i - x_j) \rangle_\omega c_j \} V(x_j; x_i) dx_j - \langle \bar{R}_i \rangle_\omega \langle \bar{P}(v'_{ij}) \rangle_\omega c_j.$$

Из (1.7), (7.3) найдем тензоры $\bar{A}_0, \bar{A}_i^0$:

$$(7.5) \quad \bar{A}_0 = c_0^{-1} \left\{ I - \sum_{i=1}^N c_i A_i \langle \bar{R}_i \rangle_\omega^{-1} \sum_{j=1}^N (\bar{Y}^{-1})_{ij} \langle \bar{R}_j \rangle_\omega \right\}, \\ \bar{A}_i^0 = \bar{B}_i \langle \bar{R}_i \rangle_\omega^{-1} \sum_{j=1}^N (\bar{Y}^{-1})_{ij} \langle \bar{R}_j \rangle_\omega \bar{A}_0^{-1}.$$

В случае «квазикристаллического» приближения [2]

$$(7.6) \quad Z_{ij} = I \delta_{ij},$$

когда одночастичный метод эффективного поля эквивалентен методу Мори — Танака — Эшелюи [2] и для A_i^0 имеет место равенство (5.3), выражение (7.4) упрощается:

$$(7.7) \quad \bar{Y}_{ij} = I \delta_{ij} - \langle \bar{R}_i \rangle_\omega \langle \bar{P}(v'_{ij}) \rangle_\omega c_j - \langle \bar{R}_i \rangle_\omega \int \{ \langle \bar{S}(x_i - x_j) \rangle_\omega \varphi(v_j | x_j; x_i) - \\ - \langle \bar{S}_i \rangle_\omega c_j \} V(x_j; x_i) dx_j.$$

Подставляя (7.3) в (1.5), приходим к выражению эффективного модуля по многочастичному методу эффективного поля

$$(7.8) \quad L^* = L_0 + \sum_{i,j=1}^N c_i (Y^{-1})_{ij} \langle R_j \rangle_0,$$

где тензоры Y , R_j вычислены с учетом равенства тензора свойств матрицы тензору L_0 .

Вернемся к получению многочастичного дифференциального МЭП в рамках схемы одночастичного метода (5.5). Согласно (7.5), отпадает необходимость постулировать правомерность гипотезы Мори — Танака (5.3), неверной, вообще говоря, при многочастичном учете взаимодействующих включений. Для замыкания (5.2) необходимо принять гипотезу (5.4) (или ей подобную) и затем перейти к уравнению, аналогичному (5.5). Подобный вывод многочастичного дифференциального МЭП нельзя признать строгим, поскольку в используемом в дальнейшем выражении $\bar{A}_i^0$ (7.5) (и, в частности, в (2.5)) учитывается конечная концентрация включений, хотя дифференциальная схема (4.2) базируется на бесконечно малом добавлении фазы включений на каждом итерационном шаге. Именно вследствие отмеченного противоречия в выражении (5.6) появляется «лишний» множитель $(L^{(1)} - L_0)^{-1}(L^{(1)} - L)(1 - c)^{-1}$.

Обойти эту трудность можно, приняв, что система (7.1), описывающая взаимодействие n включений в композитной среде, имеет место при бесконечно малой концентрации компонентов i ($i = 1, \dots, N$), равной $\lambda_i dc / (1 - c)$. Это позволяет разложить найденное значение $\langle \varepsilon(x)_1 \rangle_1$ (7.1), а следовательно, и $\bar{R}_i^*$ (1.5) в бесконечный ряд по степеням малого параметра $dc / (1 - c)$:

$$(7.9) \quad \bar{R}_i^* = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{R}_i^{(k)} [dc / (1 - c)]^k.$$

Ряд (7.9) в отличие от (6.1) бесконечный даже для n -частичного варианта МЭП (7.1). Сравнивая (7.9) с формальным разложением в ряд Тейлора тензора $\bar{R}_i^*$ по степеням $dc / (1 - c)$, из (4.2) найдем

$$(7.10) \quad d^m L / dc^m = \sum_{i=1}^n R_i^{(m)} m! / (1 - c)^{m+1}$$

с условиями Коши

$$L^{(0)}(0) = L_0, L^{(1)}(0) = R_i, \dots, L^{(m-1)}(0) = R_i^{(m-1)}(m-1)!$$

Порядок уравнения (7.10), вообще говоря, больше числа учитываемых взаимодействующих включений ($m \geq n$); при $m = n > 2$ оценки по дифференциальным методам МЭС (6.2) и МЭП (7.10) различаются.

8. Пример. Рассмотрим линейно-упругую задачу для композитной среды с несжимаемой изотропной матрицей, наполненной жесткими шаровыми включениями одного размера ($N = 1$). Тогда из (2.4), (7.4) имеем [1]

$$(8.1) \quad \bar{R}_1 = \frac{5}{2} \mu, Y_{11} = 1 - 31c/16$$

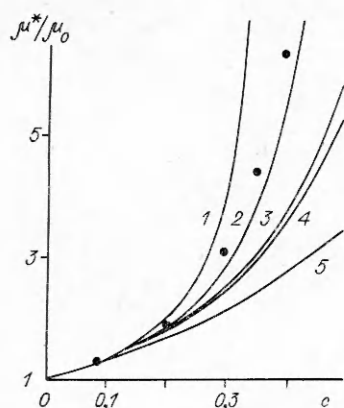
(μ — сдвиговая компонента изотропного тензора L). При выводе второго равенства (8.1) принималось приближение для матрицы Z_{ij} (2.9) с $S(x_i - x_j) = U(x_i - x_j)$, $\varphi(v_j | x_j; x_i) = \varphi(v_j) = n_j$ при $x_j \notin v_i^0$. Получим следующие зависимости для эффективного модуля сдвига композита μ^* от модуля сдвига матрицы μ_0 :

$$(8.2) \quad \mu^* = \mu_0 (1 - 5c/2)^{-1};$$

$$(8.3) \quad \mu^* = \mu_0 (1 + 3c/2)(1 - c)^{-1};$$

$$(8.4) \quad \mu^* = \mu_0 \{1 - 5c(1 + 31c/16)/2\}^{-1};$$

$$(8.5) \quad \mu^* = \mu_0 (1 - c)^{-5/2}.$$



Формула (8.2) найдена по одночастичному МЭС (3.4); (8.3)— одночастичному МЭП (7.7), (7.8); (8.4)— двухчастичному МЭС (3.2); (8.5)— одночастичному дифференциальному методу МЭС (4.2), (5.1). Дифференциальное уравнение

$$(8.6) \quad \frac{d^2\mu}{dc^2} = \frac{155}{16} \mu (1-c)^{-2},$$

$$\mu(0) = \mu_0, \quad \mu^{(1)}(0) = \frac{5}{2} \mu_0$$

отвечает двухчастичным дифференциальным МЭС (6.2) и МЭП (7.10) с $m=2$ (7.10), а уравнение

$$d^3\mu/dc^3 = 15 \left(\frac{24}{16}\right)^2 \mu (1-c)^{-3}, \quad \mu(0) = \mu_0, \quad \mu^{(1)}(0) = \frac{5}{2} \mu_0, \quad \mu^{(2)}(0) = \frac{155}{16} \mu_0$$

— двухчастичному дифференциальному МЭП (7.10) с $m=3$. На рисунке представлены экспериментальные данные (точки) [19] и кривые 1—5, рассчитанные по уравнениям (8.2), (7.10) с $m=30$, (8.6), (8.5), (8.3) соответственно. Видно, что учет бинарного взаимодействия включений позволяет повысить точность дифференциальных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буряченко В. А. Корреляционная функция полей напряжений в матричных композитах // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 3.
2. Буряченко В. А., Паргон В. З. Одночастичное приближение метода эффективного поля в статике композитов // Механика композит. материалов.— 1990.— № 3.
3. Буряченко В. А., Паргон В. З. Эффективные параметры статистически неоднородных матричных композитов // Изв. АН СССР. МТТ.— 1990.— № 6.
4. Mura T. Micromechanics of defects in solids.— Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1987.
5. Kreher W., Pompe W. Internal stress in heterogeneous solids.— Berlin: Academia-Verlag, 1989.
6. Roscoe R. The viscosity of suspension of rigid spheres // British. J. Appl. Phys.— 1952.— V. 13, N 8.
7. Bruggeman D. A. G. Berechnung verschiedener physikalischer Konstante von heterogene Substanze // Annalen der Physik.— 1935.— V. 24, N 4.
8. Avellaneda M. Iterated homogenization, differential effective medium theory and applications // Commun. Pure Appl. Math.— 1987.— V. 40, N 5.
9. Benveniste Y. A differential effective medium theory with a composite sphere embedding // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1987.— V. 54, N 2.
10. Cleary M. P., Chen I. W., Lee S. M. Self-consistent techniques for heterogeneous solids // Proc. ASCE. J. Engng Mech. Div.— 1980.— V. 106, N 5.
11. Hashin Z. The differential scheme and its application to cracked materials // J. Mech. and Phys. Solids.— 1988.— V. 36, N 6.
12. Norris A. N., Callegari A. J., Sheng P. A generalized differential effective medium theory // J. Mech. and Phys. Solids.— 1985.— V. 33, N 6.
13. Norris A. N. An examination of the Mori — Tanaka effective medium approximation for multiphase composites // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1989.— V. 56, N 1.
14. Hatta H., Taya M. Effective thermal conductivity of a misoriented short fibre composites // J. Appl. Phys.— 1985.— V. 58, N 7.
15. Hatta H., Taya M. Thermal conductivity of coated filled composite // J. Appl. Phys.— 1986.— V. 59, N 6.
16. Takao Y., Taya M. Thermal expansion coefficients and thermal stresses an aligned short fibre composite with applications to a short fibre aluminum // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1985.— V. 52, N 4.
17. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metallurg.— 1973.— V. 21, N 5.
18. Benveniste Y. A new approach to the application of Mori — Tanaka's theory in composite materials // Mech. Mater.— 1987.— V. 6, N 1.
19. Krieger I. W. Rheology of monodisperse lattices // Advances in Colloid and Interface Science.— 1972.— N 3.

г. Москва

Поступила 5/VI 1990 г.,
в окончательном варианте — 14/III 1991 г.