АНАЛОГ ТЕЧЕНИЯ ПРАНДТЛЯ — МАЙЕРА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ, ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПОЛЮ СКОРОСТЕЙ

В. Г. Цепилевич (Томск)

Магнитогазодинамические течения Прандтля — Майера исследовались М. Н. Коганом [1,2], который нашел области существования течений и, используя метод характеристик для решения уравнения движения газа, указал характерные особенности течений данного типа.

Рассматривается вихревая задача о плоском движении идеального газа с бесконечной проводимостью при адиабатическом процессе для магнитного поля, параллельного полю скоростей. Получен аналог уравнения Седова [3] в плоскости переменных «давление — функция тока», критерий существования и уравнение обобщенного течения Прандтля — Майера, для которого найдено решение в околозвуковой области. Указан метод построения подобных течений при обтекании некоторых профилей потоком сжимаемой жидкости.

1. Уравнения магнитной гидродинамики для идеального газа с бесконечной проводимостью при стационарном режиме движения имеют вид [4]

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\nabla \mathbf{v}^2+\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p-\frac{1}{4\pi\rho}\frac{1}{4\pi\rho}\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}\\ \mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{v}-(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{v}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{H}=0\\ \operatorname{div}\rho\,\mathbf{v}=0,\quad p\,/\,\rho^{\gamma}=\mathrm{const}\quad(\gamma=c_p/c_v)\end{gathered}\tag{1.1}$$

Уравнения (1.1) сохраняют свой вид, если перейти к безразмерным величинам $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{H}_1$, p_1, ρ_1, определив их соотношениями [5]

$$\begin{gathered}\mathbf{v}=v_0\cdot\mathbf{v}_1,\qquad \mathbf{H}=H_0\cdot\mathbf{H}_1,\qquad \rho=\rho_0\rho_1,\qquad p=p_0p_1,\qquad \mathbf{r}=l\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y,\qquad H_0=v_0\sqrt{\rho_0},\qquad p_0=\rho_0v_0^2\end{gathered}$$

Здесь ρ_0, v_0 — плотность и скорость набегающего невозмущенного потока из бесконечности; l — характерный размер. В дальнейшем уравнения (1.1) будем рассматривать как безразмерные, в которых опущены индексы у относительных величин.

В [6] показано, что в случае движения газа в магнитном поле, параллельном скорости течения, имеет место равенство

$$\mathbf{H}=k\rho\mathbf{v}\qquad(k=\mathrm{const})\tag{1.2}$$

В этом случае интеграл Бернулли и вихрь скорости выражаются в виде

$$\frac{v^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}=\frac{\gamma}{\gamma-1},\qquad \Omega=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=\frac{k^2}{4\pi}\left(\frac{\partial\rho v_y}{\partial x}-\frac{\partial\rho v_x}{\partial y}\right)\tag{1.3}$$

Из (1.3.2) видно, что магнитное поле, параллельное полю скоростей, вызывает вихревое движение при адиабатическом процессе (1.1.4), управляемое системой [5]

$$\begin{gathered}v_x=\lambda(\rho)\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v_y=\lambda(\rho)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x}\\ \frac{v^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}=\frac{\gamma}{\gamma-1},\qquad \lambda(\rho)=\left[1-\frac{k^2\rho}{4\pi}\right]^{-1}\end{gathered}\tag{1.4}$$

Здесь $\varphi=\varphi(x,y)$ — фиктивный потенциал, $\psi=\psi(x,y)$ — функция тока.

2. Возьмем в качестве независимых переменных функцию тока ψ и давление p (переменные Седова [3], стр. 300), совершив переход по формулам

$$\begin{gathered}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial y/\partial p}{\Delta},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=-\frac{\partial x/\partial p}{\Delta},\qquad \Delta=\frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial y}{\partial p}-\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial\psi}\neq0\\ \frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{D(v_x,x/\psi,p)}{\Delta},\qquad \frac{\partial v_y}{\partial x}=\frac{D(v_y,y/\psi,p)}{\Delta}\end{gathered}\tag{2.1}$$

Отсюда после несложных преобразований придем к выражениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial x}{\partial\psi}=A(p,\theta),\qquad A(p,\theta)=\frac{\partial}{\partial p}(v\sin\theta)+v\mu\frac{\cos2\theta}{\sin\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial\psi}=-B(p,\theta),\qquad B(p,\theta)=\frac{\partial}{\partial p}(v\cos\theta)-v\mu\frac{\cos2\theta}{\cos\theta}\\ \mu=\mu(\rho)=\frac{k^2}{a^2(4\pi-k^2\rho)},\qquad v_x=v\cos\theta,\qquad v_y=v\sin\theta\end{gathered}\tag{2.2}$$

Здесь v — модуль скорости, θ — угол наклона вектора скорости к оси x, a — скорость звука. Используя формулы (2.2), получим зависимости

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -\frac{1}{\partial\theta/\partial\psi}\left(\cos^2\theta\frac{\partial B}{\partial p} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial A}{\partial p}\right) \tag{2.3}$$
$$\frac{\partial y}{\partial p} = -\frac{1}{\partial\theta/\partial\psi}\left(\sin\theta\cos\theta\frac{\partial B}{\partial p} + \sin^2\theta\frac{\partial A}{\partial p}\right)$$

Введя комплексную переменную $z = x + iy$, получим из (2.2) и (2.3) условие разрешимости в виде

$$\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial p}\left(v^2\frac{\partial\theta}{\partial p}\right) + 2\frac{\partial}{\partial p}[v\mu\operatorname{ctg}2\theta] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial\psi}\left\{\frac{1}{\partial\theta/\partial\psi}\left[v\left(\frac{\partial\theta}{\partial p}\right)^2 + 2v\mu\operatorname{ctg}2\theta\frac{\partial\theta}{\partial p} - \frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right]\right\} \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) представляет собой нелинейное уравнение, являющееся обобщением уравнения Седова на случай магнитной газодинамики.

Функция $z(\psi, p)$ определяется при помощи квадратур из уравнений (2.2) и (2.3), которые эквивалентны дифференциальному соотношению

$$dz = e^{i\theta}\left\{\left[v\frac{\partial\theta}{\partial p} + 2v\mu\operatorname{ctg}2\theta - i\frac{\partial v}{\partial p}\right]d\psi - \frac{1}{\partial\theta/\partial\psi}\left(\cos\theta\frac{\partial B}{\partial p} - \sin\theta\frac{\partial A}{\partial p}\right)dp\right\} \tag{2.5}$$

При заданной зависимости $\rho = \rho(p)$ будут известны функции $\mu(\rho)$ и $v(\psi, p)$, и уравнения (2.4), (2.5) представляют собой полную систему уравнений задачи.

3. При выводе уравнения (2.4) использовано существенное предположение, что $\partial\theta/\partial\psi \neq 0$. Если $\partial\theta/\partial\psi \equiv 0$, то получается такое движение жидкости, при котором угол θ зависит только от давления: $\theta = \theta(p)$. В [3] (стр. 318) показано, что такому условию в случае изоэнтропического течения совершенного газа отвечает течение Прандтля — Майера. Общее решение уравнения (2.2) в этом случае будет

$$z(\psi, p) = -\psi\left[i\frac{\partial}{\partial p}(ve^{i\theta}) - 2\mu v\operatorname{ctg}2\theta e^{i\theta}\right] + \omega(p) \tag{3.1}$$

где $\omega(p)$ — произвольная функция своего аргумента.

Для определения же функции $\theta = \theta(p)$ легко найти уравнение

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial p}\right)^2 + 2\mu\operatorname{ctg}2\theta\frac{\partial\theta}{\partial p} - \frac{1}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} = 0 \tag{3.2}$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial\theta}{\partial p} = -\mu\operatorname{ctg}2\theta \pm \left(\mu^2\operatorname{ctg}^2 2\theta + \frac{1}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)^{1/2} \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) позволяет дать некоторую качественную характеристику аналогу течений Прандтля — Майера в магнитной газодинамике. Из (3.3) получаем критерий существования такого типа течений:

$$\mu^2\operatorname{ctg}^2 2\theta \geqslant -\frac{1}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \tag{3.4}$$

Видно, что, во-первых, при наличии магнитного поля, параллельного полю скоростей, течение, аналогичное течениям Прандтля — Майера, будет вихревым при адиабатическом процессе, и, во-вторых, такое течение может существовать не только в сверхзвуковой, но и в дозвуковой областях.

Из (3.3), используя разложение бинома Ньютона, придем к уравнению

$$\frac{d\theta}{\partial p} = -\mu\operatorname{ctg}2\theta \pm \mu\operatorname{ctg}2\theta\left[1 + \frac{1}{2\mu^2 v\operatorname{ctg}^2 2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} + \ldots\right] \tag{3.5}$$

Рассмотрим случай околозвукового обобщенного течения Прандтля — Майера. Тогда, так как равенства $\partial^2 v/\partial p^2 = 0$ и $M = 1$ равносильны, ограничимся в разложении (3.5) двумя членами. В соответствии с знаком плюс или минус перед корнем в (3.3), получаются два семейства решений уравнений

$$\frac{d\theta}{\partial p} = \frac{1}{2\mu v}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\operatorname{tg}2\theta, \qquad \frac{d\theta}{dp} = -\frac{1}{2\mu v}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\operatorname{tg}2\theta - 2\mu\operatorname{ctg}2\theta \tag{3.6}$$

Решением уравнения (3.6.1) будет

$$\theta = \frac{1}{2} \arc \sin \left[c_1 \exp \left(\int \frac{1}{\mu v} \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} dp \right) \right] \tag{3.7}$$

Уравнение (3.6.2) можно представить в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dp} \ln \sin 2\theta = -2\mu \left(\frac{1}{\sin^2 2\theta} - 1 \right) - \frac{1}{2\mu v} \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \tag{3.8}$$

Замена $\sin^2 2\theta = t$ приведет (3.3) к линейному неоднородному уравнению

$$t' = Rt - 8\mu \qquad \left(R = 8\mu - \frac{2}{\mu v} \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right) \tag{3.9}$$

Тогда решением (3.6.2) будет

$$\theta = \frac{1}{2} \arc \sin \left\{ \exp \left(4 \int R\, dp \right) \int \left[\mu \exp \left(-2 \int R\, dp \right) \right] dp + c_2 \right\}^{1/2} \tag{3.10}$$

Из (3.7) и (3.10) вытекает, что точка $\theta = 0$ недостижима в данной постановке задачи. Особенность этой точки видна и из уравнения (3.2).

При отсутствии магнитного поля ($k = 0$, $\mu = 0$), учитывая, что переход совершается от $\partial^2 v/\partial p^2 < 0$ к $\partial^2 v / \partial p^2 > 0$, находим, что $\theta = 0$ при $M = 1$ [7], для чего следует положить $c_2 = 0$, а c_1 достаточно ограничить.

Выбор знака в (3.3), а следовательно, и решения из (3.7) и (3.10) совершается таким образом, что поток поворачивается на все больший и больший угол по мере увеличения местного числа Маха.

4. Пользуясь произволом функции ω (p) в решении (3.1), можно построить аналог течения Прандтля — Майера с произвольной линией тока. Этим путем в некоторых случаях можно строить обтекание заданных профилей, не являющихся конечными телами и обеспечивающих наличие зоны невозмущенного течения (например выпуклой стенки, к началу поворота которой поток невозмущен).

Пусть требуется найти решение для обтекания некоторого тела, контур которого можно считать заданной линией тока $\psi = 0$; уравнение этой линии в комплексной форме можно задать в виде

$$z = F(\theta) \tag{4.1}$$

где за параметр взят угол наклона касательной к оси x, равный, очевидно, θ. Заменяя здесь θ через p из решения (3.7) или (3.10), найдем

$$z = F(\theta(p)) = F(p) \tag{4.2}$$

Сравнивая (3.1) и (4.2) при $\psi = 0$, получим

$$z = F(p) = \omega(p) \tag{4.3}$$

Таким образом, произвольная функция ω (p) полностью определяется заданием контура обтекаемого тела.

Пользуюсь случаем выразить свою глубокую благодарность Г. И. Назарову за ценные советы и указания.

Поступила 9 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Магнитодинамика плоских и осесимметричных течений газа с бесконечной электрической проводимостью, ППМ, 1959, т. 23, вып. 1.
2. Коган М. Н. Плоские течения идеального газа с бесконечной проводимостью в магнитном поле, не параллельном скорости потока. ПММ, 1960, т. 24, вып. 1.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.
4. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. Физматгиз, 1962.
5. Назаров Г. И. Решение вихревой задачи в магнитном поле, параллельном скорости движения сжимаемой жидкости. Тр. Томского государственного унив-та. 1963, т. 163.
6. Юрьев И. М. К решению уравнений магнитной газодинамики. ПММ, 1960, т. 24, вып. 1.
7. Бай Ши-и. Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. Изд. Иностр. лит., 1962.