

УДК 533.6.011.6 533.6.011.8
DOI: 10.63430/TIA2025020016

Моделирование химически неравновесных отрывных течений в программном комплексе HyCFS*

Т.Ю. Шкредов, Г.В. Шоев

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

E-mail: shkredov@itam.nsc.ru, shoev@itam.nsc.ru

Обсуждаются вопросы реализации и применения солвера AUSMPW+ для расчета невязких потоков на грани контрольного объема в расчетном коде HyCFS на структурированной сетке. Показано, что применение AUSMPW+ позволяет успешно преодолеть явление карбункула при обтекании цилиндра.

Моделирование течений с отрывом пограничного слоя с использованием солвера AUSMPW+ приводит к результатам, совпадающим с полученными с помощью HLLC. Результаты расчетов коэффициентов давления и теплопередачи на поверхности конуса с юбкой с использованием HyCFS совпадают с экспериментальными данными LENS-XX с той же точностью, что и результаты других авторов, полученные независимыми расчетными кодами.

Ключевые слова: отрыв, химические реакции, римановские солверы, AUSMPW+.

Введение

Для построения корректного сценария спуска космических аппаратов в атмосферу планет необходимо знать их аэродинамические и аэротермодинамические характеристики. Для получения этих характеристик, как правило, применяется два метода исследования: экспериментальный и численный. Летные эксперименты являются дорогостоящими и технически трудно осуществимыми, поэтому проводятся редко по сравнению с наземными. Эксперименты в наземных аэродинамических установках не всегда позволяют воспроизвести летные условия по числам Маха, Рейнольдса, значению полной энтальпии набегающего потока и его составу. С другой стороны, высокoэнтальпийные ударные трубы позволяют получить данные, необходимые для валидации математических моделей, используемых при численном моделировании.

* Работа выполнена в рамках гранта РНФ № 22-71-10045. Численные эксперименты проведены с использованием ресурсов ЦКП «Механика» ИТПМ СО РАН.

Численное моделирование течения около капсулы, входящей в атмосферу планеты, дает возможность рассчитывать поля газодинамических переменных в реальных условиях полета, однако тонкостью здесь является достоверность получаемых аэродинамических и особенно аэротермодинамических характеристик. На достоверность получаемых данных влияет множество различных факторов, таких как правильно выбранный алгоритм для решения исходных уравнений, корректно подобранные параметры расчетного метода (например, пространственное разрешение сетки), адекватность модели физических процессов и т.д. Различное сочетание этих факторов может повлиять на конечное распределение как газодинамических переменных около исследуемого тела, так и его поверхностных распределенных и интегральных характеристик. Для проверки достоверности определяемых поверхностных характеристик часто используются данные, полученные в высокоэнтальпийных установках. После такой проверки достоверности численного инструментария допустимо его дальнейшее использование для решения практических задач аэрокосмической отрасли.

В настоящем исследовании проводится тестирование расчетного кода *HyCFS* [1] с целью оценки его готовности к моделированию неравновесных химически реагирующих потоков в рамках однотемпературного приближения. Данный код, основанный на методе конечных объемов, разрабатывается в ИТПМ СО РАН. В настоящее время для расчета численных невязких потоков через границу контрольного объема используются схемы *HLLC* (Harten-Lax-van Leer-Contact) [2, 3] и *HLL* (Harten-Lax-van Leer) [4, 5]. Низкодиссипативный солвер *HLLC* хорошо описывает структуру пограничного слоя, но может порождать так называемый «карбункул» [6], когда головной скачок имеет излом на линии торможения, приводя к некорректному распределению газодинамических величин около затупленного тела (например, спускаемой капсулы космического аппарата). Более диссипативный солвер *HLL* дает возможность избавиться от явления карбункула, но не позволяет точно рассчитывать структуру пограничного слоя на тех же сетках, что *HLLC*. Это связано с наличием диссипативного вклада в потоки консервативных переменных, влияние которого в пограничном слое увеличивается за счет высоких градиентов параметров.

Для устранения проблемы карбункула в работе [7] был разработан новый решатель для вычисления невязких потоков — *AUSM* (Advection Upstream Splitting Method). Данный решатель был значительно улучшен в ходе многочисленных последующих исследований как самого автора оригинальной работы, так и других ученых, что привело к появлению целого ряда новых солверов. Одним из таких усовершенствованных солверов является *AUSMPW+* [8], который позволяет не только преодолеть явление карбункула в условиях обтекания затупленных тел при высоких скоростях свободного потока, но и точно рассчитывать структуру пограничного слоя, а также тепловой поток на поверхности тела. В настоящей работе представлена первая в *HyCFS* реализация солвера *AUSMPW+*, которая позволяет предотвратить возникновение карбункула и точно вычислять структуру пограничного слоя.

Для подтверждения точности расчетов поверхностных характеристик выполняется сопоставление распределений коэффициентов давления и теплопередачи на поверхности конуса с юбкой в эксперименте *LENS-XX* [9]. Это сравнение осуществляется для случаев, когда полная удельная энтальпия в набегающем потоке изменяется в диапазоне от 15 до 22 МДж/кг. Отметим, что вход тела в атмосферу Земли при первой космической скорости приблизительно соответствует значениям 28–29 МДж/кг. Предыдущие

численные исследования [10, 11] течения около конуса с юбкой в условиях эксперимента LENS-XX показали удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных данных. Самым большим разногласием между ними была разница в положениях точки отрыва. Одним из недостатков экспериментальных данных является то, что пик теплового потока на поверхности двойного конуса не разрешен распределением по ней исправных экспериментальных датчиков, т.е. невозможно сравнить положение и величину пика в расчете и эксперименте. В остальном экспериментальные данные подходят для проверки точности численного инструментария, используемого для расчета давления и теплового потока на поверхности обтекаемых тел.

1. Основные уравнения

Течение вязкой химически реагирующей газовой смеси моделируется на основе численного решения уравнений Навье – Стокса в двумерной осесимметричной постановке:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial r} + \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial r} + \mathbf{H}_v,$$

где $\mathbf{Q}$ — вектор консервативных переменных, $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_v$ — векторы невязких и вязких потоков вдоль осевой координаты z соответственно, $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}_v$ — векторы невязких и вязких потоков вдоль радиальной координаты r соответственно. Источниковые члены $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}_v$ возникают из-за записи исходных уравнений в цилиндрической системе координат, а также из-за изменения состава смеси вследствие химических реакций, протекающих с конечной скоростью. Представленные векторы записываются следующим образом:

$$\mathbf{Q} = (\rho, \rho v, \rho w, \rho E, \rho^1, \dots, \rho^{N-1})^T,$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v w \\ \rho v \left[E + \frac{p}{\rho} \right] \\ \rho^1 v \\ \dots \\ \rho^{N-1} v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho v w \\ \rho w^2 + p \\ \rho w \left[E + \frac{p}{\rho} \right] \\ \rho^1 w \\ \dots \\ \rho^{N-1} w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho v w \\ \rho w^2 \\ \rho w \left[E + \frac{p}{\rho} \right] \\ \rho^1 w + r \dot{R}^1 W_1 \\ \dots \\ \rho^{N-1} w + r \dot{R}^{N-1} W_{N-1} \end{pmatrix},$$

$$\tau_{zz} = \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right), \quad \tau_{rr} = \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{w}{r} \right), \quad \beta_z = v \tau_{zz} + w \tau_{zr} + \kappa \frac{\partial T}{\partial z},$$

$$\tau_{zr} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \sigma = 2 \mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right), \quad \beta_r = v \tau_{zr} + w \tau_{rr} + \kappa \frac{\partial T}{\partial r},$$

$$\mathbf{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zz} \\ \tau_{zr} \\ \beta_z + \sum_{i=1}^{N_s} h_i J_z^i \\ J_z^1 \\ \dots \\ J_z^{N-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zr} \\ \tau_{rr} \\ \beta_r + \sum_{i=1}^{N_s} h_i J_r^i \\ J_r^1 \\ \dots \\ J_r^{N-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_v = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zr} \\ \sigma \\ \beta_r + \sum_{i=1}^{N_s} h_i J_r^i \\ J_r^1 \\ \dots \\ J_r^{N-1} \end{pmatrix},$$

здесь ρ — плотность, $\mathbf{u} = (v, w)$ — вектор скорости, $E = h_0 + \int_{T_0}^T c_v(T') dT' + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$ —

удельная полная энергия, $h_0 = \sum_i h_0^i Y_i$ — удельная энтальпия образования смеси,

$c_v(T) = \sum_i c_v^i(T) Y_i$ — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, ρ^i , $\dot{R}^i$, W_i , h_0^i ,

$c_v^i(T)$, Y_i — плотность, скорость изменения плотности компонента вследствие химических реакций, молекулярный вес, энтальпия образования, удельная теплоемкость при постоянном объеме и массовая доля компонента i соответственно, T — температура, p — давление, μ , κ — коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности, которые вычисляются по правилу Уилки [12] (коэффициенты вязкости отдельных компонентов рассчитывались по степенному закону, теплопроводности — по формуле из работы [13], N_s — число компонентов смеси). Диффузионные потоки $\mathbf{J}^i = (J_z^i, J_r^i)$ вычислялись по закону диффузии Фика, средние коэффициенты диффузии — по закону смешения Уилки [12]:

$$\mathbf{J}^i = \rho D_i \nabla Y_i, \quad D_i = \frac{1 - X_i}{\sum_j X_j / \hat{D}_{i,j}}.$$

Бинарные коэффициенты диффузии $\hat{D}_{i,j}$ вычислялись с использованием кинетической теории [13]:

$$\hat{D}_{i,j} = \frac{7,433 \cdot 10^{-3}}{p(\sigma_i + \sigma_j)_{i,j}^2 \Omega_{i,j}^{(1,1)}} \sqrt{T^3 \frac{W_i + W_j}{W_i W_j}}, \quad \Omega_{i,j}^{(1,1)} = 1,074 T_{i,j}^{-0,1604}, \quad T_{i,j} = \frac{k_B T}{\sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_j}},$$

где k_B — константа Больцмана, σ_i , ε_i — параметры потенциала Леннарда–Джонса, значения которых приведены в табл. 1.

Удельная теплоемкость компонентов газовой смеси вычисляется с помощью двух подходов. В первом используются полиномы [14] и учитывается возбуждение электронных и колебательных мод молекул. Второй подход основан на модели гармонического осциллятора для описания колебательной энергии молекул:

Таблица 1

Свойства компонентов смеси

Компонент i	W_i , кг/кмоль	ε_i / k_B , К	σ_i , Å	θ_v^i , К
N ₂	28,0134	97,5	3,621	3396
O ₂	31,9988	107,4	3,458	2275
NO	30,0061	119	3,47	2742
N	14,0067	71,4	3,298	-
O	15,9994	80	2,75	-

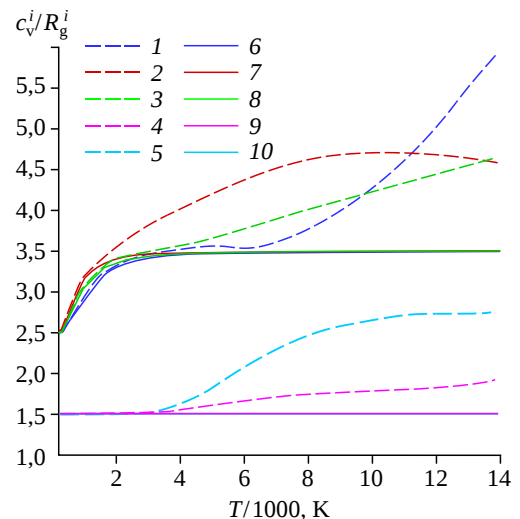
$$c_v^i = \begin{cases} \frac{3}{2} R_g^i, & i \in \{N, O\}, \\ \left[\frac{5}{2} + \left(\frac{\theta_v^i}{T} \right)^2 \frac{e^{\theta_v^i/T}}{(e^{\theta_v^i/T} - 1)^2} \right] R_g^i, & i \in \{N_2, O_2, NO\}, \end{cases}$$

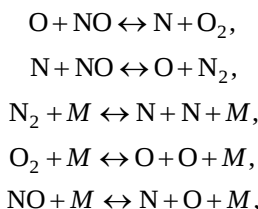
где $R_g^i = R/W_i$ — газовая постоянная, R — универсальная газовая постоянная, θ_v^i — характеристическая колебательная температура молекулы сорта i . Молекулярный вес W_i и характеристические колебательные температуры также приведены в табл. 1.

Сравнение результатов, полученных с помощью рассматриваемых моделей теплоемкости, представлено на рис. 1 в виде графиков теплоемкости атомов и молекул при постоянном объеме в единицах R_g^i . Видно, что значения теплоемкости атомов практически совпадают между собой для обеих моделей до температуры около 4000 К. При дальнейшем увеличении температуры до 15000 К происходит увеличение теплоемкостей атомов, вычисленных на основе полиномов [14] (из-за возбуждения электронных степеней свободы). Теплоемкости молекул совпадают в диапазоне температур до 2000 К для O₂, до 3000 К для NO и до 4000 К для N₂. Далее с увеличением температуры до 15000 К теплоемкость, вычисленная с использованием полиномов, становится больше, чем рассчитанная по модели гармонического осциллятора.

Для моделирования обменных химических реакций, а также диссоциации и рекомбинации, записанных в виде:

Рис. 1. Сравнение нормированной теплоемкости при постоянном объеме компонентов газовой смеси, рассчитанных по полиномам [14] (1–5) и по модели гармонического осциллятора (6–10).
1 — N₂^{Гупта}, 2 — O₂^{Гупта}, 3 — NO^{Гупта}, 4 — N^{Гупта},
5 — O^{Гупта}, 6 — N₂, 7 — O₂, 8 — NO, 9 — N, 10 — O.





использовались две кинетические модели. Первая — модель Парка [15] с константами обратных реакций, взятых из работы [16]. Вторая — модель Блоттнера [17]. Скорости прямых и обратных реакций в химических источниковых членах вычисляются по закону Аррениуса:

$$\dot{R}^i = \dot{R}_f^i - \dot{R}_t^i, \quad \dot{R}_{t/\alpha}^i = \sum_{\alpha=1}^{N_r} k_{\alpha}^{f/r} (v_{\alpha i}^r - v_{\alpha i}^f) \prod_{l=1}^{N_{\alpha}} \left(\frac{\rho_l}{W_l} \right)^{v_{\alpha l}^{f/r}}, \quad k_{\alpha}^{f/r} = A_{\alpha}^{f/r} T^{\beta_{\alpha}^{f/r}} e^{-E_{\alpha}^{f/r}/RT},$$

где $\dot{R}_f^i, \dot{R}_t^i$ — скорости изменения компонента i из-за прямых и обратных химических реакций, k^f, k^r — константы скоростей прямых и обратных химических реакций, $v_{\alpha i}^f, v_{\alpha i}^r$ — стехиометрические коэффициенты перед компонентом i в левой и правой частях уравнения химической реакции α , $A_{\alpha}^{f/r}$ — предэкспоненциальный коэффициент, $\beta_{\alpha}^{f/r}$ — показатель степени, $E_{\alpha}^{f/r}$ — энергии активации прямых и обратных химических реакций α , N_r — число химических реакций, N_{α} — число реагентов в одной химической реакции α .

На рис. 2 приведены для сравнения константы скоростей диссоциации N_2 и O_2 , полученные из кинетических моделей [15] и [17]. Номера реакций, используемых в легенде рисунка, представлены в табл. 2. Видно, что константы скоростей диссоциации зависят от рассматриваемой кинетической модели. Для количественного сравнения выберем два механизма диссоциации, обозначенные в табл. 2 как 2Р, 2В (рис. 2а) и 4Р, 7В (рис. 2б), дающие заметные отличия в скоростях реакций. Отношения этих скоростей диссоциации 2Р/2В (рис. 2а) и 4Р/7В (рис. 2б), а также их величины откладываются на правой оси. Видно, что в зависимости от выбора литературного источника константа скорости

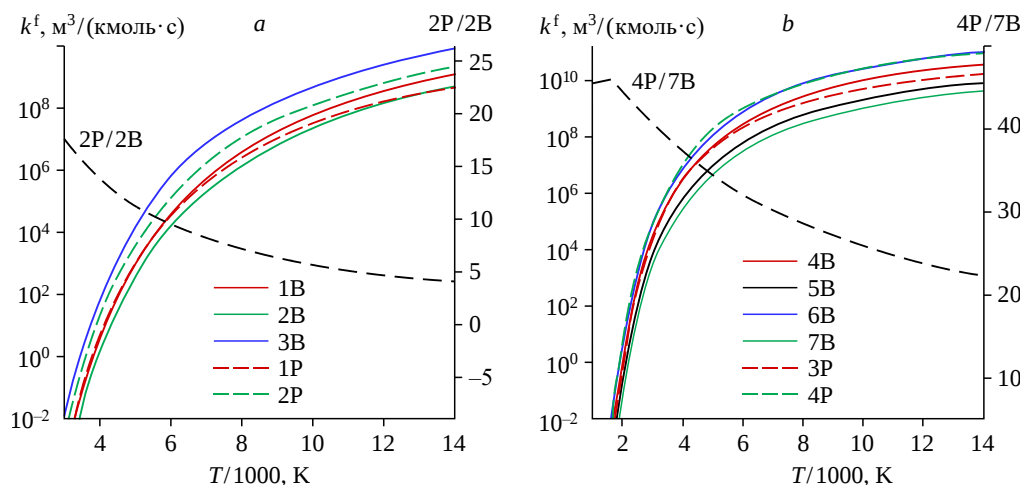


Рис. 2. Константы скоростей реакций диссоциации N_2 и O_2 .

В — кинетическая модель Блоттнера [17], Р — кинетическая модель Парка [15] с константами скоростей обратных реакций из [16].

Таблица 2
Обозначения химических реакций

Номер реакции	Химическая реакция	Литературный источник
1В	$N_2 + N_2 \rightarrow 2N + N_2$	[17]
2В	$N_2 + P \rightarrow 2N + P, P = O_2, O$	[17]
3В	$N_2 + N \rightarrow 2N + N$	[17]
1Р	$N_2 + M \rightarrow 2N + M, M = O_2, N_2, NO$	[15]
2Р	$N_2 + A \rightarrow 2N + A, A = O, N$	[15]
4В	$O_2 + O_2 \rightarrow 2O + O_2$	[17]
5В	$O_2 + N_2 \rightarrow 2O + N_2$	[17]
6В	$O_2 + O \rightarrow 2O + O$	[17]
7В	$O_2 + N \rightarrow 2O + N$	[17]
3Р	$O_2 + M \rightarrow 2O + M, M = N_2, O_2, NO$	[15]
4Р	$O_2 + A \rightarrow 2O + A, A = N, O$	[15]

диссоциации кислорода может отличаться до 40 раз, азота — до 10 раз. Такие различия в скоростях диссоциации молекулярного азота и кислорода указывают на возможную зависимость полей течений около конуса с юбкой от кинетической схемы химических реакций, использованных в исследованиях [15] и [17] и, как следствие, на возможную зависимость распределения теплового потока на его поверхности. Поэтому неопределенность получаемого численного результата в зависимости от разных кинетических механизмов химических реакций будет дополнительно оценена ниже.

2. Численная реализация

Уравнения решаются численно с использованием метода конечных объемов на структурированной сетке, состоящей из четырехугольных ячеек. Газодинамические параметры хранятся в центрах ячеек. Для численного решения уравнения преобразуются к обобщенным криволинейным координатам $\mathbf{r} = (z, r) = \mathbf{r}(\zeta, \xi)$. В новых координатах уравнения записываются как

$$\frac{\partial}{\partial t}(JQ) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(|S^\zeta| \hat{F}) + \frac{\partial}{\partial \xi}(|S^\xi| \hat{G}) + H = \frac{\partial}{\partial \zeta}(|S^\zeta| \hat{F}_v) + \frac{\partial}{\partial \xi}(|S^\xi| \hat{G}_v) + H_v,$$

или в полудискретной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(VQ) = & - \left[(|S^\zeta| \hat{F})_{k+1/2,i} - (|S^\zeta| \hat{F})_{k-1/2,i} \right] - \left[(|S^\xi| \hat{G})_{k,i+1/2} - (|S^\xi| \hat{G})_{k,i-1/2} \right] - H + \\ & + \left[(|S^\zeta| \hat{F}_v)_{k+1/2,i} - (|S^\zeta| \hat{F}_v)_{k-1/2,i} \right] + \left[(|S^\xi| \hat{G}_v)_{k,i+1/2} - (|S^\xi| \hat{G}_v)_{k,i-1/2} \right] + H_v, \end{aligned}$$

где J — якобиан преобразования, V — объем ячейки, k, i — индексы ячеек вдоль направлений обобщенных координат ζ и ξ . Целые индексы k и i соответствуют номерам ячеек, полуцелые — номерам граней. Для определения граничных условий используются так называемые фиктивные ячейки, они достраиваются вокруг всей расчетной области. В центрах данных ячеек устанавливаются значения газодинамических параметров

таким образом, чтобы на границе расчетной области соблюдалось требуемое граничное условие, при этом расчет осуществляется единым алгоритмом на всех границах. Более детальное описание приведено, например, в работе [18].

Потоки $\hat{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{G}}$, $\hat{\mathbf{F}}_v$, $\hat{\mathbf{G}}_v$ связаны с потоками $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}_v$, $\mathbf{G}_v$ следующими соотношениями:

$$\hat{\mathbf{F}} = n_z^\zeta \mathbf{F} + n_r^\zeta \mathbf{G}, \quad \hat{\mathbf{F}}_v = n_z^\zeta \mathbf{F}_v + n_r^\zeta \mathbf{G}_v,$$

$$\hat{\mathbf{G}} = n_z^\xi \mathbf{F} + n_r^\xi \mathbf{G}, \quad \hat{\mathbf{G}}_v = n_z^\xi \mathbf{F}_v + n_r^\xi \mathbf{G}_v,$$

где $\mathbf{n}^\zeta = (n_z^\zeta, n_r^\zeta)$ и $\mathbf{n}^\xi = (n_z^\xi, n_r^\xi)$ — единичные нормали к граням ячеек. В итоге потоки имеют вид:

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \rho v_n \\ \rho v v_n + p n_z^\zeta \\ \rho w v_n + p n_r^\zeta \\ \rho \left(E + \frac{p}{\rho} \right) v_n \\ \rho^1 v_n \\ \dots \\ \rho^{N-1} v_n \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{F}}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ n_z^\zeta \tau_{zz} + n_r^\zeta \tau_{zr} \\ n_z^\zeta \tau_{zr} + n_r^\zeta \tau_{rr} \\ n_z^\zeta \beta_z + n_r^\zeta \beta_r + \sum_{i=1}^{N_s} h_i (n_z^\zeta J_z^i + n_r^\zeta J_r^i) \\ n_z^\zeta J_z^1 + n_r^\zeta J_r^1 \\ n_z^\zeta J_z^1 + n_r^\zeta J_r^1 \\ \dots \\ n_z^\zeta J_z^{N-1} + n_r^\zeta J_r^{N-1} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \rho w_n \\ \rho v w_n + p n_z^\xi \\ \rho w w_n + p n_r^\xi \\ \rho \left(E + \frac{p}{\rho} \right) w_n \\ \rho^1 w_n \\ \dots \\ \rho^{N-1} w_n \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{G}}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ n_z^\xi \tau_{zz} + n_r^\xi \tau_{zr} \\ n_z^\xi \tau_{zr} + n_r^\xi \tau_{rr} \\ n_z^\xi \beta_z + n_r^\xi \beta_r + \sum_{i=1}^{N_s} h_i (n_z^\xi J_z^i + n_r^\xi J_r^i) \\ n_z^\xi J_z^1 + n_r^\xi J_r^1 \\ \dots \\ n_z^\xi J_z^{N-1} + n_r^\xi J_r^{N-1} \end{pmatrix},$$

где $v_n = v n_z^\zeta + w n_r^\zeta$ и $w_n = v n_z^\xi + w n_r^\xi$.

Производные на гранях ячеек в вязких потоках $\hat{\mathbf{F}}_v$, $\hat{\mathbf{G}}_v$ и в центрах ячеек в источниковых членах $\mathbf{H}_v$ вычисляются с использованием центрально-разностной схемы, описанной в [19]. Для вычисления невязких потоков в настоящей работе в расчетном коде НуСФС реализована схема AUSMPW+ [8] с масштабированием для течений с низким числом Маха методом, предложенным в работе [20], так же использовалась локальная поправка, введенная авторами [21] для дозвуковых участков течений, понижающая численную диссипацию. Левые и правые значения на гранях ячеек вычислялись MUSCL-схемой третьего порядка [22].

Поправка, применяющаяся для понижения численной диссипации в областях дозвукового течения, имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_L^{\text{fix}} &= 0,5 \cdot \left[(\mathbf{u}_L + \mathbf{u}_R) + \tilde{f}(\tilde{M}_L, \tilde{M}_R)(\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_R) \right], \\ \mathbf{u}_R^{\text{fix}} &= 0,5 \cdot \left[(\mathbf{u}_L + \mathbf{u}_R) - \tilde{f}(\tilde{M}_L, \tilde{M}_R)(\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_R) \right], \\ \tilde{f}(\tilde{M}_L, \tilde{M}_R) &= \min(1, \max(\tilde{M}_L, \tilde{M}_R)), \\ \tilde{M}_L &= \frac{|\mathbf{u}_L|}{a_L}, \quad \tilde{M}_R = \frac{|\mathbf{u}_R|}{a_R},\end{aligned}$$

где $\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R$ — векторы скорости газа, реконструированные слева и справа на грань $i+1/2$. Дальнейшие вычисления производятся с использованием $\mathbf{u}_L^{\text{fix}}$ и $\mathbf{u}_R^{\text{fix}}$ в качестве левых и правых значений $\mathbf{u}_L$ и $\mathbf{u}_R$.

Вектор потоков консервативных величин на грани ячейки, согласно схеме AUSMPW⁺, вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{\text{AUSMPW}^+} &= a_{i+1/2}^* \left(\bar{M}_L^+ \mathbf{Q}_L + \bar{M}_R^- \mathbf{Q}_R \right) + p_s \mathbf{N}^{\xi=i+1/2}, \\ \mathbf{N} &= (0, n_z^{i+1/2}, n_r^{i+1/2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-1})^T,\end{aligned}$$

где p_s — давление на грани, а выражения для $\bar{M}_L^+, \bar{M}_R^-, a_{i+1/2}^*$ и p_s будут приведены ниже.

2.1. Вычисление $\bar{M}_L^+$ и $\bar{M}_R^-$

Величины $\bar{M}_L^+, \bar{M}_R^-$ определяются следующим образом:

если $M_L^+ + M_R^- \geq 0$, то

$$\begin{aligned}\bar{M}_L^+ &= M_L^+ + M_R^- \left[(1 - \hat{w})(1 + f_R^*) - f_L^* \right], \\ \bar{M}_R^- &= M_R^- \hat{w} (1 + f_R^*),\end{aligned}$$

иначе:

$$\begin{aligned}\bar{M}_L^+ &= M_L^+ \hat{w} (1 + f_L^*), \\ \bar{M}_R^- &= M_R^- + M_L^+ \left[(1 - \hat{w})(1 + f_L^*) - f_R^* \right],\end{aligned}$$

где M_L^+ и M_R^- вычисляются по формуле:

$$M_{L/R}^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(M_{L/R}^* \pm |M_{L/R}^*| \right), & \text{если } |M_{L/R}^*| > 1, \\ \pm \frac{1}{4} \left(M_{L/R}^* \pm 1 \right)^2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь используется масштабированные числа Маха $M_{L/R}^*$ слева и справа от грани:

$$M_{L/R}^* = \frac{(1 + M_0^2) M_{L/R} + (1 - M_0^2) M_{R/L}}{2\varphi_{i+1/2}},$$

$$M_0^2 = \min\left(1, \max\left(M_{i+1/2}^2, M_\infty^2\right)\right),$$

$$M_{i+1/2}^2 = \frac{|\mathbf{u}_L|^2 + |\mathbf{u}_R|^2}{2a_{i+1/2}^2},$$

$$\varphi_{i+1/2} = \frac{\sqrt{\left(1 - M_0^2\right)^2 M_{i+1/2}^2 + 4M_0^2}}{1 + M_0^2},$$

где $M_{L/R} = \frac{u_{n,L/R}}{a_{i+1/2}}$ — левые и правые значения чисел Маха, которые определяются как отношение нормальной скорости газа $u_{n,L} = \mathbf{u}_L \cdot \mathbf{n}_{i+1/2}$ (слева) и $u_{n,R} = \mathbf{u}_R \cdot \mathbf{n}_{i+1/2}$ (справа) к скорости звука на грани $a_{i+1/2}$. Единичная нормаль к грани здесь обозначена как $\mathbf{n}_{i+1/2}$. Число Маха набегающего потока обозначено M_∞ .

Весовая функция $\hat{w}$ определяется как

$$\hat{w} = 1 - \min\left(\frac{p_L}{p_R}, \frac{p_R}{p_L}\right)^3,$$

где p_L, p_R — значения давления слева и справа на грани $i + 1/2$.

Весовые функции $f_{L/R}^*$ в результате масштабирования имеют вид:

$$f_{L/R}^* = f_{L/R} / M_0^2,$$

где весовые функции f_L и f_R , основанные на давлениях слева и справа p_L, p_R и давлении на грани p_s вычисляются следующим образом:

$$f_{L/R} = \begin{cases} \left(\frac{p_{L/R}}{p_s} - 1\right) \left[\min\left(1, \frac{\min(p_{1,L}, p_{2,L}, p_{1,R}, p_{2,R})}{p_s}\right)\right]^2, & p_s \neq 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

здесь $p_{1,L}, p_{2,L}, p_{1,R}, p_{2,R}$ — левые и правые значения давления на двух соседних гранях, направленных вдоль той же оси обобщенных криволинейных координат, что и рассматриваемая, имеющих с ней общие ребра.

2.2. Вычисление скорости звука на грани

После масштабирования скорость звука $a_{i+1/2}^*$ имеет вид:

$$a_{i+1/2}^* = \varphi_{i+1/2} a_{i+1/2},$$

где $a_{i+1/2}$ для химически реагирующей газовой смеси определяется следующим образом:

$$a_{i+1/2} = \begin{cases} a_s^2 / \max(|u_{n,L}|, a_s), & \text{если } (u_{n,L} + u_{n,R}) / 2 > 0, \\ a_s^2 / \max(|u_{n,R}|, a_s), & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$a_s = \sqrt{2H_{\text{normal}} \frac{(\gamma_L - 1)\gamma_R \rho_L - (\gamma_R - 1)\gamma_L \rho_R}{(\gamma_R + 1)\gamma_L \rho_L - (\gamma_L + 1)\gamma_R \rho_R}},$$

здесь $H_{\text{normal}} = 0,5 \cdot \left(H_{t,L} - \frac{|\mathbf{u}_{\tau,L}|^2}{2} + H_{t,R} - \frac{|\mathbf{u}_{\tau,R}|^2}{2} \right)$ — полная энтальпия течения газа

по нормали к грани ($|\mathbf{u}_{\tau,L/R}|$ — тангенциальные составляющие вектора скорости газа слева и справа соответственно, $H_{t,L/R}$ — левые и правые значения полной энтальпии), γ_L, γ_R — левые и правые значения показателей адиабаты газовой смеси на грани $i + 1/2$, ρ_L, ρ_R — плотности слева и справа от грани $i + 1/2$.

В случае, когда химическими реакциями можно пренебречь ($\gamma_L \approx \gamma_R = \gamma$), выражение для a_s упрощается:

$$a_s = \sqrt{2H_{\text{normal}} \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)}}.$$

2.3. Определение давления на грани

Для вычисления давления на грани (p_s) используются следующие выражения:

$$p_s = P_L^+ p_L + P_R^- p_R,$$

$$P_{L/R}^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 \pm \text{sign}(M_{L/R}^*) \right), & \text{если } |M_{L/R}^*| > 1, \\ \frac{1}{4} (M_{L/R}^* \pm 1)^2 (2 \mp M_{L/R}^*) \pm \frac{3}{16} M_{L/R}^* (M_{L/R}^{*2} - 1)^2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

3. Результаты расчетов

Описание результатов расчетов состоит из двух частей. В первой части приводится решение классической задачи обтекания цилиндра, где показано, что реализованный в NuCFS солвер AUSMPW+ позволяет предотвратить явление карбункула. Во второй части проводится сравнение данных эксперимента LENS-XX с результатами численных расчетов, полученных с помощью различных моделей теплоемкости, кинетических механизмов химических реакций и схем расчета невязких потоков.

3.1. Результаты расчетов обтекания цилиндра при числе Маха 20

Численное моделирование обтекания цилиндра в расчете на основе уравнений Эйлера является классическим способом для обнаружения карбункула. Поэтому тестирование представленной реализации солвера AUSMPW+ включает решение этой задачи. Исходные уравнения для описания течения невязкого нетеплопроводного газа в плоской двумерной постановке, использованные только в данном подразделе, приведены в работе [23].

На рис. 3 представлены поля плотности для случая обтекания цилиндра при числе Маха набегающего потока $M_\infty = 20$ и показателе адиабаты $\gamma = 1,4$, полученные в расчетах на основе уравнений Эйлера с использованием солверов HLLC, HLL и AUSMPW+ на сетке 60×281 (281 ячейка вдоль поверхности цилиндра). Видно, что использование HLLC приводит к появлению карбункула: головной скачок содержит излом на линии торможения. Использование HLL и AUSMPW+ позволяет получить классическую форму головного скачка.

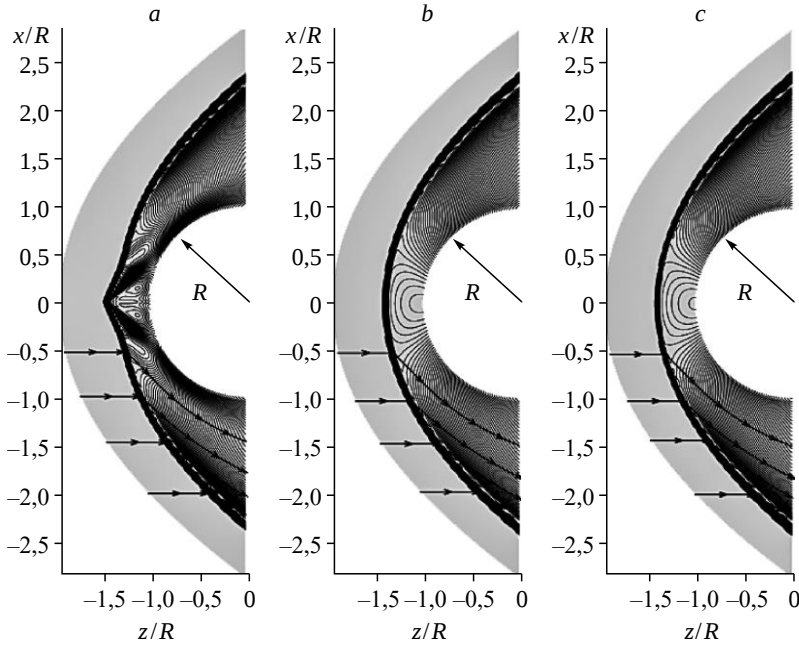


Рис. 3. Изолинии плотности при обтекании цилиндра при $M_\infty = 20$ и $\gamma = 1,4$, полученные на основе уравнений Эйлера с использованием солверов HLLC (a), HLL (b) и AUSMPW+ (c).
Линии тока обозначены черными стрелками.

3.2. Результаты расчетов течения около конуса с юбкой

Расчет параметров течения около конуса с юбкой проводился в расчетной области, изображенной на рис. 4a. Геометрическая модель состояла из двух конусов с уклонами 25° — у первого и 55° — у второго (юбки). Высота первого конуса составляла $L = 92,08$ мм, далее она принята за единицу длины для представления численных результатов в безразмерном виде. Входная граница расчетной области также состояла из двух

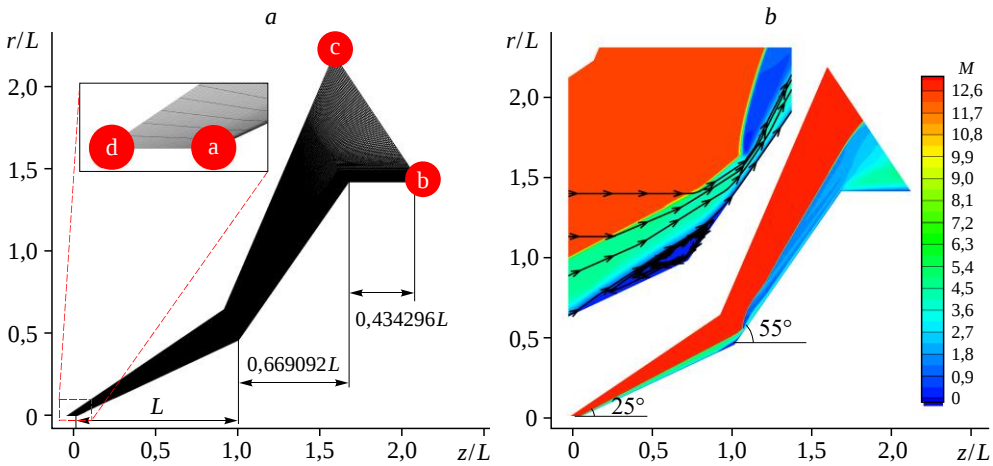


Рис. 4. Расчетная область с обозначением границ и сеткой наименьшей плотности 256×128 (a), поле числа Маха течения в условиях пуска 4 (b).
Черными стрелками обозначены линии тока.

конусов с юбкой с уклонами 34° у первого конуса и $66,5^\circ$ — у второго. Экспериментальные исследования обтекания рассматриваемой модели были выполнены авторами [9]. Численное исследование обтекания проводилось в работах [10, 11] с использованием различных авторских программных кодов, в которых применялись многотемпературные модели неравновесных течений. Для расчета невязких потоков в [10] использовался модифицированный солвер Стегера–Уорминга [24], а в [11] применялся солвер Pou [25]. Для расчета скоростей реакций в исследованиях [10] и [11] использовалась двухтемпературная модель Парка совместно с кинетическими моделями химических реакций, описанными в работах [26] и [27] соответственно. Для расчета коэффициентов переноса в [10] и [11] применялись правила смешения Гупты [14] и Уилки [12]. Для расчета колебательной энергии молекул использовалась модель гармонического осциллятора. Более подробное описание численных схем и математических моделей можно найти в [10, 11].

Описание всех расчетных моделей, которые будут рассматриваться, представлены в табл. 3. Расчетные модели 1–3, использованные авторами настоящей работы, описаны выше. Модели 4 и 5 рассматривались другими авторами. Численные результаты, полученные с их использованием, приводятся для сравнения с результатами, полученными в настоящей работе.

Граничные условия задаются на сегментах границы расчетной области следующим образом: ab — некаталитическая изотермическая стенка с прилипанием при температуре $T_w = 300$ К, bc — сверхзвуковой выход со сносом всех газодинамических параметров из последнего ряда ячеек расчетной области, cd — набегающий поток с массовыми долями молекулярного азота $Y_{N_2,\infty} = 0,737$ и кислорода $Y_{O_2,\infty} = 0,273$ и другими газодинамическими величинами, перечисленными в табл. 4, da — ось симметрии.

На рис. 4*b* показано поле числа Маха в условиях пуска 4 (с наибольшей полной энтальпией набегающего потока). Стрелками изображены линии тока.

Таблица 3

Краткое описание расчетных моделей

Расчетная модель	Модель термодинамики	Ссылки на работы, где приведены химические реакции	Приближение	Литературный источник
1	Описана в работе [14]	[15] + [16]	Однотемпературное	Настоящая работа
2	Гармонический осциллятор	[15] + [16]	Однотемпературное	Настоящая работа
3	Описана в работе [14]	[17]	Однотемпературное	Настоящая работа
4	Гармонический осциллятор	[26]	Многотемпературное	[10]
5	Гармонический осциллятор	[27]	Многотемпературное	[11]

Таблица 4

Параметры набегающего потока [9]

№ пуска	$H_{0,\infty}$, МДж/кг	M_∞	$Re/10^6$ 1/м	ρ_∞ , г/м ³	T_∞ , К
3	18,7	13,23	0,11	0,51	521
4	21,77	12,82	0,2	0,964	652
5	18,51	13,14	0,23	1,057	523
6	15,23	11,46	0,39	2,045	573

На рис. 5 показаны численные теневые визуализации течения около конуса с юбкой в условиях пуска 4, полученные с использованием расчетной модели 2. Численные теневые визуализации представляют собой величину лапласиана рассматриваемой величины,

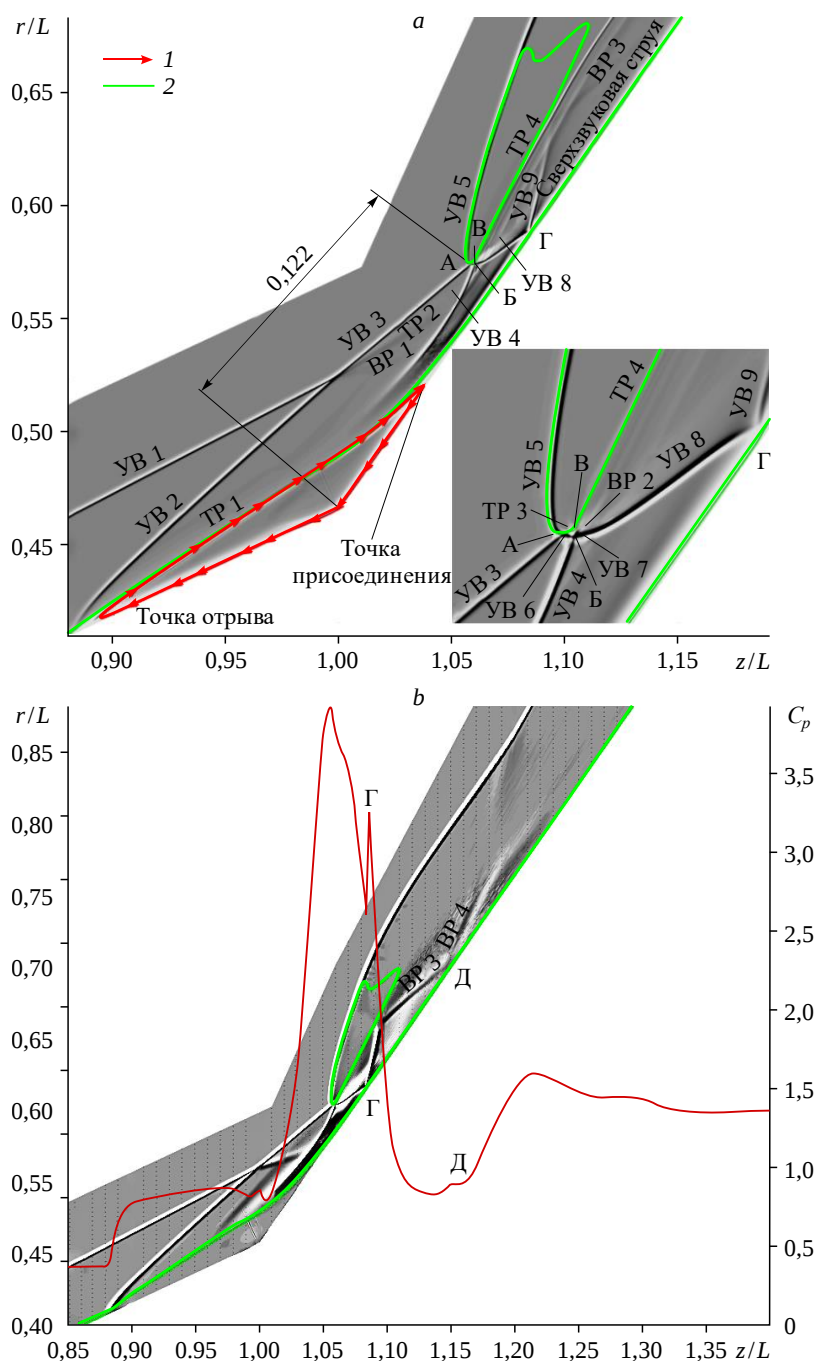


Рис. 5. Численная теневая визуализация течения (величина лапласиана распределенной величины в нелинейной шкале): теневое изображение, рассчитанное по полю плотности (а), теневое изображение, рассчитанное по полю давления и величина коэффициента давления на поверхности конуса с юбкой (б).

Расчетная модель 2 (см. табл. 3), пуск 4 (см. табл. 4); 1 — линия тока, 2 — звуковая линия.

изображенную в нелинейной шкале. На рис. 5a приведено численное теневое изображение, построенное по распределению плотности газа, на рис. 5b — по распределению давления. Теневая картина, построенная по распределению давления, позволяет отсеять градиенты, связанные с пограничным слоем и тангенциальными разрывами (что помогает в их идентификации). Для получения лучшего качества визуализации в этом расчете использовалась сетка с разрешением 3138×512 со сгущением к стенке для разрешения пограничного слоя и сгущением вдоль стенки для лучшего разрешения зоны отрыва и взаимодействия скачков уплотнения. Также на рис. 5b показано распределение коэффициента давления. Для удобства введены условные обозначения: УВ — ударные волны, ТР — тангенциальные разрывы, ВР — веера волн разрежения. Буквами обозначены точки взаимодействия газодинамических особенностей между собой и с поверхностью конуса.

На рис. 5 хорошо заметен косой скачок УВ 1, исходящий с носика конуса. На границе отрывной зоны, ограниченной точками отрыва и присоединения и отмеченной замкнутой линией тока, виден тангенциальный разрыв ТР 1, вдоль которого проходит звуковая линия. Над точкой отрыва потока формируется отрывной скачок УВ 2, который ниже по течению взаимодействует с УВ 1, что приводит к формированию УВ 3, тангенциального разрыва ТР 2 и веера волн разрежения ВР 1, который хорошо виден на рис. 5b. Данный веер при взаимодействии с волной присоединения УВ 4 приводит к ее искривлению. Основная область взаимодействия газодинамических структур находится ниже по потоку и для подробного рассмотрения увеличена на отдельном слайде в правой нижней части рис. 5a.

УВ 3 взаимодействует с отошедшим скачком УВ 5 в точке А. Из указанной точки исходит тангенциальный разрыв ТР 3 и косая ударная волна УВ 6. Далее эта ударная волна регулярно отражается от УВ 4 в точке Б с формированием УВ 7 и УВ 8 и слабо различного тангенциального разрыва. УВ 7 взаимодействует с ТР 3 в точке В, отражаясь от него в виде слабо заметного веера волн разрежения ВР 2, который, в свою очередь, своим воздействием на УВ 8 изгибает ее. Известно, что ударная волна при взаимодействии с тангенциальным разрывом, за которым реализуется дозвуковое течение, отражается от него в виде веера волн разрежения. Классический пример — граница сверхзвуковой струи, истекающей в затопленное пространство [28]. Факты существования УВ 7, ВР 2 и УВ 8 свидетельствуют о существовании трех, а не двух точек взаимодействия в данной узкой области: тройной точки, точки регулярного отражения ударных волн и точки рефракции ударной волны на дозвуковом тангенциальном разрыве. Также ВР 2 был хорошо виден в процессе установления течения, до момента сближения точек А, Б и В.

Точку В можно рассматривать как начало сверхзвуковой струи, ограниченной ТР 4. Волна УВ 8 регулярно отражается от поверхности модели в точке Г в виде УВ 9. В этой точке на распределении коэффициента давления можно видеть резкий скачок. Далее УВ 9 отражается от ТР 4 в качестве веера волн разрежения ВР 3, который приходит на поверхность в точке Д, где видно появление локального минимума на распределении давления. Веер ВР 3 также отражается от стенки в виде веера ВР 4, который, взаимодействуя с уже сверхзвуковым ТР 4, приводит к его повороту к поверхности модели и, как следствие, сужению сечения струи (что также видно на распределении числа Маха на рис. 4b по уменьшению следа струи вниз по потоку). Это приводит к торможению газа и росту давления, что также отражается на поверхностном распределении на рис. 5b.

На рис. 6 приведены для сравнения распределения коэффициентов давления C_p и теплопередачи C_h по поверхности конуса с юбкой, рассчитанных на различных сетках с использованием расчетной модели 1 (см. табл. 4). Коэффициент давления C_p рассчитывался по формуле $C_p = \frac{p - p_\infty}{0,5\rho_\infty u_\infty^2}$, где p — давление на поверхности модели, u_∞ — скорость набегающего потока. Коэффициент теплопередачи C_h рассчитывался по формуле:

$C_h = q_w / (0,5\rho_\infty u_\infty^3)$, где q_w — тепловой поток на поверхность модели.

Самая грубая сетка состоит из 256×128 ячеек со сгущением к поверхности конуса с юбкой. Высота первой от поверхности ячейки составляет 8,5 мкм. Последующие сетки получались из первой делением каждой ячейки пополам в каждом направлении. Видно, что положение точки отрыва совпадает на сетках 512×256 и 1024×512 . Также видно, что на этих двух сетках распределения как коэффициента давления, так и коэффициента теплопередачи практически совпадают. В результате для численного анализа была выбрана сетка 1024×512 , и все последующие результаты получены на ней.

Исследование влияния пространственного разрешения проводилось только в условиях пуска 4. Так как числа Рейнольдса пусков 3, 5 и 6 отличаются не более чем в два раза от пуска 4, то при использовании сетки с наилучшим разрешением можно считать, что полученные распределения не будут изменяться при дальнейшем увеличении числа ячеек в расчетной области в условиях всех пусков.

На рис. 7 представлены распределения C_p и C_h по поверхности конуса с юбкой, рассчитанные с использованием схем AUSMPW+, HLL и HLLC в рамках модели 1 (см. табл. 4) в условиях пуска 3. Видно, что AUSMPW+ позволяет получить распределенные поверхностные характеристики, совпадающие с распределениями, рассчитанными солвером HLLC. Интересным результатом является то, что применение высокодиссипативного солвера HLL приводит к распределениям, слабо отличающимся от полученных с помощью AUSMPW+ и HLLC. Более того, распределения, рассчитанные с использованием солвера HLL, согласуются с экспериментальными данными практически так же, как распределения, рассчитанные с помощью солверов AUSMPW+ и HLLC. Заметные отличия видны только на первом конусе перед областью отрыва и на юбке после нее.

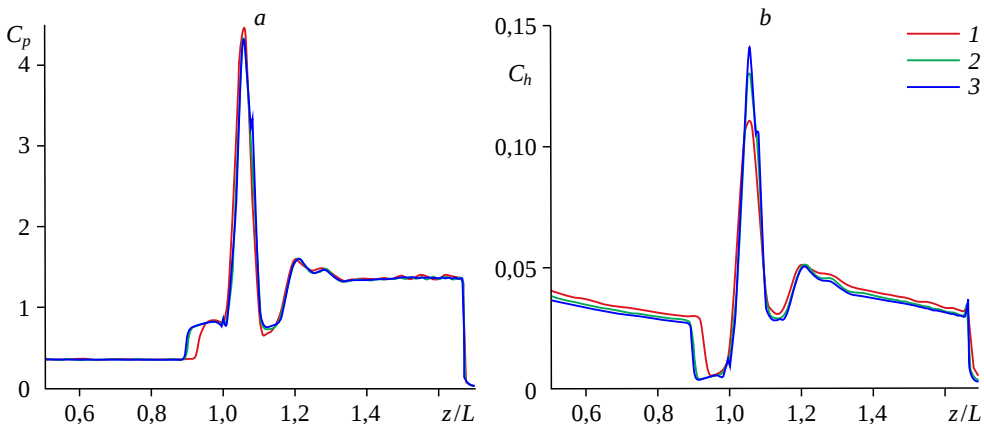


Рис. 6. Сеточная сходимость на последовательности измельчающихся сеток для распределений коэффициентов давления (a) и теплопередачи (b) по поверхности конуса с юбкой.

Пуск 4 (см. табл. 4); расчетная модель 1 (см. табл. 3); сетки: 1 — 256×128 , 2 — 512×256 , 3 — 1024×512 .

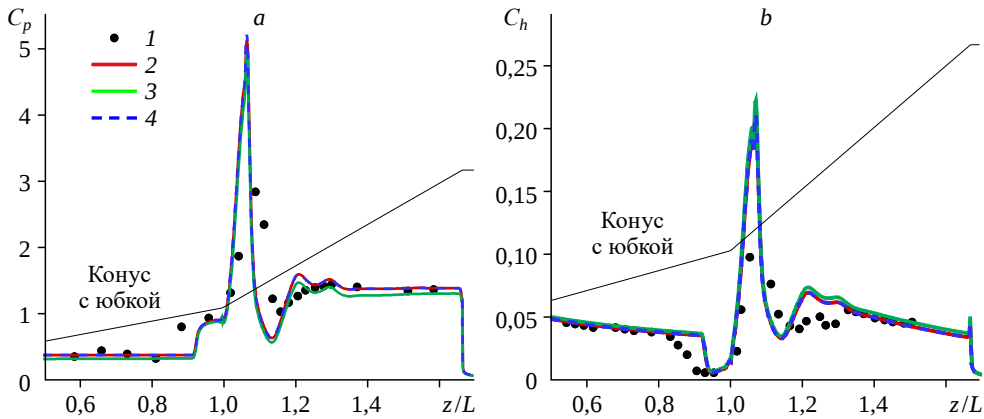


Рис. 7. Сравнение распределений коэффициентов давления (а) и теплопередачи (b) по поверхности конуса с юбкой, полученных экспериментально (1) и при использовании солверов AUSMPW+ (2), HLL (3) и HLLC (4) для вычисления конвективных потоков.

Пуск 3 (см. табл. 4); расчетная модель 1 (см. табл. 4).

На рисунках 8 и 9 приведены для сравнения численные и экспериментальные распределения коэффициентов давления C_p и теплопередачи C_h по поверхности модели. Численные распределения представлены для различных расчетных моделей, перечисленных в табл. 3. Обозначение расчетных моделей в табл. 3 совпадает с обозначением

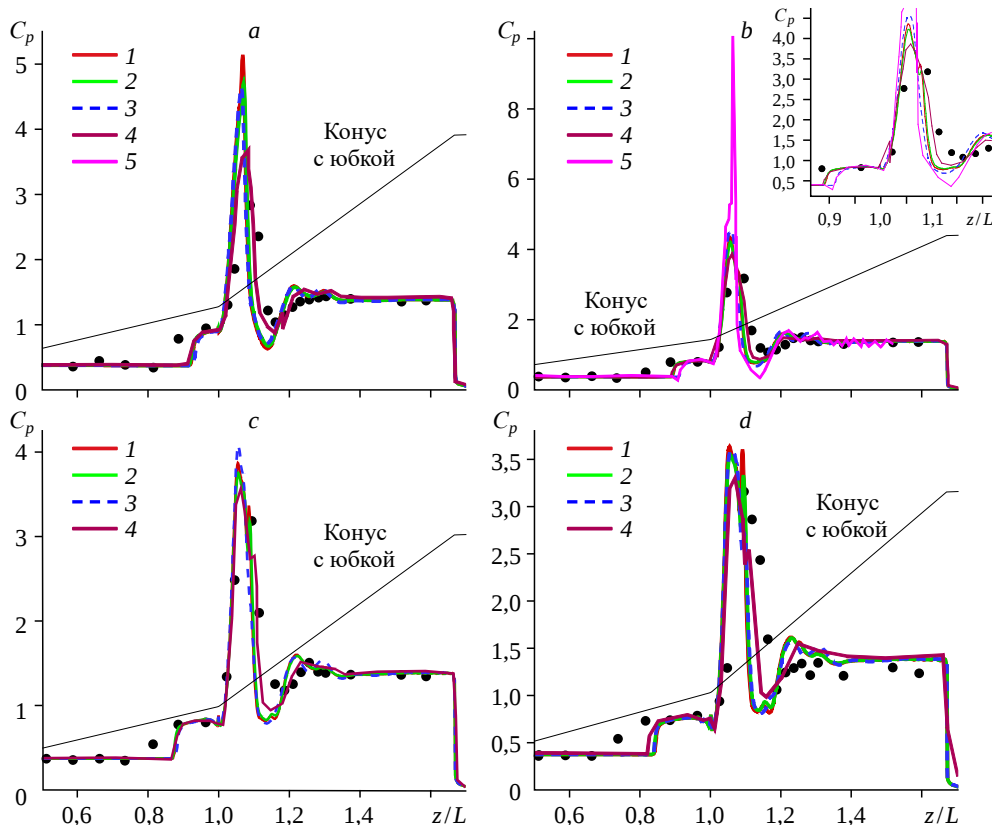


Рис. 8. Сравнение распределений коэффициента давления по поверхности конуса с юбкой, полученных экспериментально и в расчетах с использованием различных моделей теплоемкости и кинетических механизмов химических реакций, с экспериментальными [9] и численными [10, 11] данными: пуск 3 (а), пуск 4 (b), пуск 5 (с), пуск 6 (d).

Номера расчетных моделей в легенде соответствуют номерам расчетных моделей в табл. 3, символы — экспериментальные данные.

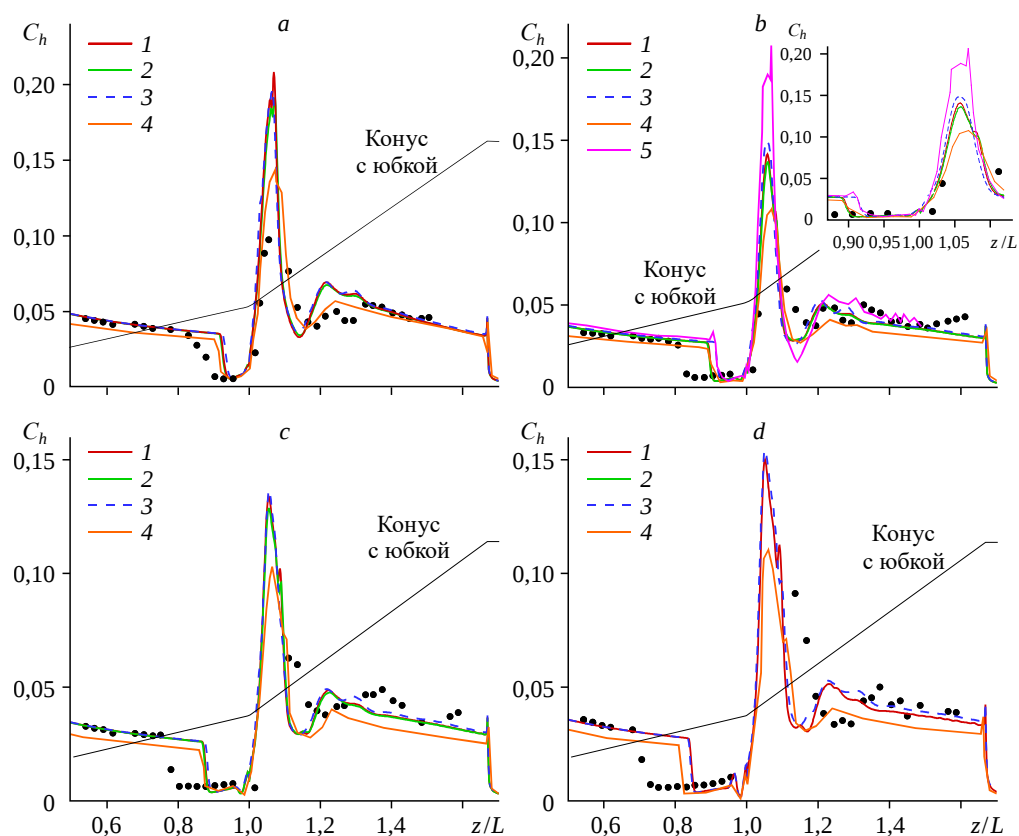


Рис. 9: Сравнение распределений коэффициента теплопередачи по поверхности конуса с юбкой, полученных в расчетах с использованием различных моделей теплоемкости и кинетических механизмов химических реакций, с экспериментальными [9] и численными данными [10, 11]: пуск 3 (a), пуск 4 (b), пуск 5 (c), пуск 6 (d).

Номера расчетных моделей в легенде соответствуют номерам расчетных моделей в табл. 3, символы — экспериментальные данные.

расчетных моделей на легенде рис. 8 и 9. Видно, что, согласно моделям 1, 2, 3, в условиях всех пусков положение точки отрыва находится ниже по потоку, чем в эксперименте. Такое же несовпадение в положении точки отрыва наблюдается и в численных результатах других авторов [10, 11], полученных с использованием расчетных моделей 4 и 5.

Распределения коэффициента давления (рис. 8), полученные в расчете NuCFS, удовлетворительно совпадают с экспериментальными данными и численными кривыми [10, 11]. Полученные с помощью NuCFS пики коэффициента давления располагаются между экспериментальными точками, поэтому подтвердить достоверность значений в пиках невозможно. Разница значений коэффициентов давления в пиках, полученных с использованием различных расчетных моделей, объясняется применением различных численных схем и моделей описания течений.

Распределения коэффициента теплопередачи на поверхности конуса с юбкой (рис. 9), полученные с помощью NuCFS, хорошо согласуются с экспериментальными данными. Рассчитанные в NuCFS пики C_h расположены между экспериментальными точками. Распределения коэффициента теплопередачи C_h , рассчитанные в NuCFS, качественно совпадают с распределениями других авторов [10, 11], но отличаются количественно, что объясняется использованием различных математических моделей.

Интересным фактом является значительное различие в пиковых значениях C_h , прогнозируемых различными моделями, однако определить достоверность тех или иных предсказанных значений не представляется возможным ввиду отсутствия экспериментальных точек в данной области. Исходя из сравнения численных и экспериментальных распределений для пуска 3 (рис. 9а), где пик разрешен лучше, чем в остальных случаях, можно предположить, что в эксперименте наблюдался пик меньшей величины, чем предсказывается моделированием.

В большинстве расчетов применение различных моделей для вычисления теплостекопностей и скоростей химических реакций не привело к значительным изменениям распределений коэффициентов давления и теплопередачи по поверхности конуса с юбкой (см. рис. 8 и 9). Наибольшие отличия наблюдаются в условиях пуска 4 при использовании констант химических реакций из различных литературных источников (модели 1 и 3 из табл. 3), в частности, разница в размере области отрыва по осевой координате составляет около 17 %.

Заклучение

Реализованный в HyCFS солвер AUSMPW+ позволяет предотвратить явление карбункула, что показано на примере обтекания цилиндра. При моделировании обтекания конуса с юбкой коэффициенты давления и теплопередачи на поверхности, рассчитанные с помощью AUSMPW+ и HLLC, совпадают между собой.

Рассчитанные в HyCFS коэффициенты давления и теплопередачи на поверхности конуса с юбкой в условиях эксперимента [9] удовлетворительно совпадают с экспериментальными данными. Использование модели гармонического осциллятора или полиномов Гупты для расчета теплостекопностей, а также скоростей химических реакций из различных литературных источников не приводит к значительным изменениям поверхностных характеристик (несмотря на изменения в полях течения). В частности, максимальное изменение положения точки отрыва не превышает 2 % высоты первого конуса или 17 % от размера зоны отрыва. Расчетные данные HyCFS в рамках однотемпературного приближения адекватно коррелируют с численными данными, полученными другими авторами [10, 11] с использованием многотемпературных моделей.

Авторы выражают благодарность профессору А.Н. Кудрявцеву за плодотворную дискуссию относительно полученных результатов.

Список литературы

1. Shershnev A.A., Kudryavtsev A.N., Kashkovsky A.V., Shoev G.V., Borisov S.P., Shkredov T.Yu., Polevshchikov D.P., Korolev A.A., Khotyanovsky D.V., Kratova Yu.V. A numerical code for a wide range of compressible flows on hybrid computational architectures // *Supercomputing Frontiers and Innovations*. 2022. Vol. 9, No. 4. P. 85–99.
2. Toro E.F., Spruce M., Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver // *Shock Waves*. 1994. Vol. 4, No. 1. P. 25–34.
3. Batten P., Leschziner M.A., Goldberg U.C. Average-state jacobians and implicit methods for compressible viscous and turbulent flows // *J. Computational Physics*. 1997. Vol. 137, No. 1. P. 38–78.
4. Einfeldt B. On Godunov-type methods for gas dynamics // *SIAM J. Numerical Analysis*. 1988. Vol. 25, No. 2. P. 294–318.
5. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // *J. Computational Physics*. 1983. Vol. 49, No. 3. P. 357–393.
6. Peery K., Imay S. Blunt-body flow simulations // *AIAA Paper*. 1988. No. 88-2924.
7. Liou M.-S., Steffen C.J. A new flux splitting scheme // *J. Comput. Phys*. 1993. Vol. 107, No. 1. P. 23–39.

8. Kim K.H., Kim C., Rho O.-H. Methods for the accurate computations of hypersonic flows. I. AUSMPW+ scheme // J. of Computational Physics. 2001. Vol. 174, No. 1. P. 38–80.
9. MacLean M., Holden M., Dufrene A. Shock wave/laminar boundary layer interaction with real-gas effects presented at AIAA aviation 2014. Double cone dataset. http://www.cubrc.org/_iassets/docs/lensXX_double_cone_dataset.xlsx. (Accessed 20/07/2017).
10. Hao J., Wang J., Lee C. Numerical simulation of high-enthalpy double-cone flows // AIAA J. 2017. Vol. 55, No. 7. P. 2471–2475.
11. Kianvashrad N., Knight D.D. Nonequilibrium effects on prediction of aerothermodynamic loading for a double cone // AIAA J. 2019. Vol. 57, No. 7. P. 2946–2963.
12. Wilke C.R. A viscosity equation for gas mixtures // J. Chemical Physics. 1950. Vol. 18, No. 4. P. 517–519.
13. Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд. ИЛ., 1961. 929 с.
14. Gupta R.N., Yos J.M., Thompson R.A. A review of reaction rates and thermodynamic and transport properties for the 11-species air model for chemical and thermal nonequilibrium calculations to 30000 K // NASA Technical Memorandum. 1989. No. 101528. 69 p.
15. Park C., Jaffe R.L., Partridge H. Chemical-kinetic parameters of hyperbolic earth entry // J. Thermophysics and Heat Transfer. 2001. Vol. 15, No. 1, P. 76–90.
16. Суржиков С.Т. Компьютерная аэрофизика спускаемых космических аппаратов. Двухмерные модели. 2018. 514 с.
17. Blottner F.G. Viscous shock layer at the stagnation point with nonequilibrium air chemistry // AIAA J. 1969. Vol. 7, No. 12. P. 2281–2288.
18. Blazek J. Computational fluid dynamics: Principles and applications. New York: Elsevier Ltd, 2015. 470 p.
19. Шоев Г.В., Шершнёв А.А., Полевщиков Д.П., Шкредов Т.Ю., Кашковский А.В. Реализация модели турбулентности Спаларта–Аллмареса в конечно-объемном газодинамическом решателе // Прикл. механика и техн. физика. 2025. № 1. С. 77–92.
20. Edwards J.R., Liou M.-S. Low-diffusion flux-splitting methods for flows at all speeds // AIAA J. 1998. Vol. 36, No. 9. P. 1610–1617.
21. Chen S., Yan C., Lin B., Li E. An improved low-dissipation AUSMPW+ scheme for low Mach number // 8th Intern. Conf. on Mechanical and Aerospace Engng (ICMAE), 2017. P. 522–526.
22. Anderson W.K., Thomas J.L., Van Leer B. Comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equations // AIAA J. 1986. Vol. 24, No. 9. P. 1453–1460.
23. Шоев Г.В. Применение гибридных римановских солверов на основе HLLC и HLL для моделирования течений с газодинамическими разрывами // Вестн. СПбГУ. Механика. Астрономия. 2023. Vol. 10, No. 4. P. 775–791.
24. MacCormack R.W. Numerical computation of compressible and viscous flow. 2014 // AIAA Education Series. 521 p.
25. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. Comput. Phys. 1981. Vol. 43, No. 357. P. 357–372.
26. Park C. Review of chemical-kinetic problems of future NASA missions. I. Earth entries // J. Thermophysics and Heat Transfer. 1993. Vol. 7, No. 3. P. 385–398.
27. Park C. On convergence of computation of chemically reacting flows // AIAA Paper. 1985. No. 0247.
28. Дулов В.Г., Лукьянов Г.А., Желтухин Н.А. Газодинамика процессов истечения. Новосибирск: Наука, 1984. 234 с.

*Статья поступила в редакцию 28 октября 2024 г.,
принята к публикации 18 апреля 2025 г.*