

О ЗАЖИГАНИИ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ НАКАЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В. С. Берман, В. М. Шевцова

(Москва)

В данной работе рассматривается зажигание тел конечных размеров накаленной поверхностью при предположении больших энергий активации. Считается, что зажигание наступает в тот момент, когда поток тепла от нагревателя в к-фазу становится равным нулю.

Постановка задачи. Задача о зажигании вещества, способного к экзотермическому превращению при пренебрежении выгоранием, может быть представлена в следующем виде:

$$\rho c \cdot \partial T / \partial t' = \lambda \Delta' T + kQ \exp(-E/RT), \quad (1)$$

где T — температура; t' — время; x', y', z' — координаты; $\Delta' = \partial^2 / \partial x'^2 + \partial^2 / \partial y'^2 + \partial^2 / \partial z'^2$ — оператор Лапласа; ρ — плотность; λ — теплопроводность; c — теплоемкость; E — энергия активации; k — предэкспоненциальный множитель; R — газовая постоянная; Q — тепловой эффект реакции.

Предполагаем, что тело занимает область D , на части граничной поверхности (A) поддерживается постоянная температура T_+ , а на остальной части границы (B) — начальная температура T_- .

$$T|_A = T_+, \quad T|_B = T_-, \quad T(D, 0) = T_-. \quad (2)$$

Удобно перейти к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} \Theta &= (T - T_-) / (T_+ - T_-), \quad x = x' / r, \quad y = y' / r, \quad z = z' / r, \\ \beta &= E / RT_+, \quad \sigma = T_- / (T_+ - T_-), \quad t = t' / (\rho c r^2 / \lambda), \\ \delta &= k \rho Q r^2 \exp(-\beta) / (T_+ - T_-) \lambda, \end{aligned} \quad (3)$$

где r — характерный размер тела. Тогда задача (1)–(3) принимает вид

$$\partial \Theta / \partial t = \Delta \Theta + \delta \exp(\beta(\Theta - 1) / (\Theta + \sigma)), \quad (4)$$

$$\Theta|_A = 1, \quad \Theta|_B = 0,$$

$$\Theta(D, 0) = 0.$$

Дальнейший анализ будем проводить в предположении, что энергия активации реакции достаточно велика ($\beta \gg 1$), при этом полагаем, что параметр σ и кривизна поверхности A имеют конечные величины [1].

Процесс зажигания происходит по следующей схеме. Конденсированное тело нагревается от накаленной поверхности вследствие теплопроводности как химически инертное тело, кондуктивный прогрев инициирует химическую реакцию. Выделение тепла в результате реакции может привести к такому положению, что к-фаза из стока тепла превращается в источник, т. е. в некоторых точках поверхности A в некоторый момент времени поток тепла становится равным нулю. Этот момент и принимается за момент зажигания конденсированной среды [2].

При достаточно интенсивных тепловых потерях через боковую поверхность зажигание может не наступить. Цель работы — нахождение времени зажигания и критических значений параметров, которые разграничивают два возможных режима: зажигания и погасания.

Решение. Решение задачи (4) будем искать в виде

$$\Theta = \Theta_i(x, y, z, t) + U(x, y, z, t),$$

где Θ_i — решение задачи в предположении, что область занята инертным телом, т. е.

$$\partial \Theta_i / \partial t = \Delta \Theta_i, \quad (5)$$

$\Theta_i(D, 0) = 0$, $\Theta_i = 1$ на поверхности A , $\Theta_i = 0$ на B . Для многих практически важных областей решение Θ_i известно [1]. Величина U учитывает тепло, генерируемое в результате химической реакции.

Удобно ввести локальную ортогональную систему координат $\eta_i = \eta_i(x, y, z)$ ($i=1, 2, 3$) на поверхности A . Координата η_1 перпендикулярна к поверхности A и принимает положительные значения в области, занимаемой k -фазой, координаты η_2 и η_3 лежат в касательной к поверхности A плоскости. При $\eta_1 \rightarrow 0$ из (5) имеем

$$\theta_i = 1 + \eta_1 \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial \eta_1} \right)_{\eta_1=0} + O(\eta_1^2) = 1 - \eta_1 \varphi(\eta_2, \eta_3, t) + O(\eta_1^2), \quad (6)$$

где

$$\varphi(\eta_2, \eta_3, t) = -(\partial \theta_i / \partial \eta_1)_{\eta_1=0}. \quad (7)$$

При рассмотрении зажигания в случае $\beta \gg 1$ существенную роль играет внутренняя область, непосредственно прилегающая к накаливаемой поверхности $\eta_1 = O(\beta^{-1})$, поскольку здесь химическая реакция наиболее заметна. Выделим также внешнюю область, в которой член, описывающий химическую реакцию, экспоненциально мал. Во внутренней области введем переменную $\xi = \beta \cdot \eta_1$ и будем искать решение для U в виде

$$U = U_1(\xi, \eta_2, \eta_3 t) / \beta + U_2(\xi, \eta_2, \eta_3, t) / \beta^2 + O(\beta^{-3}). \quad (8)$$

Получаем из (4)–(8) при $\beta \rightarrow \infty$

$$d^2 U_1 / d\xi^2 + \delta_0 \exp [(-\xi \varphi + U_1) / (1 + \sigma)] = 0. \quad (9)$$

Здесь положено из физических соображений, что $\delta = \delta_0 \cdot \beta$, где $\delta_0 = O(1)$. Уравнение (9) необходимо дополнить условиями

$$U_1(0, \eta_2, \eta_3, t) = 0, \quad U_1(\xi, \eta_2, \eta_3, 0) = 0. \quad (10)$$

Решение (9), (10) имеет вид

$$U_1(\xi, \eta_2, \eta_3, t) = \xi \varphi + (1 + \sigma) \{-\ln \delta_0 + \ln C_2 - 2 \ln \operatorname{ch} [C_1 + \xi(C_2/2(1 + \sigma))^{1/2}]\}. \quad (11)$$

Из граничного условия $U_1(0, \eta_2, \eta_3, t) = 0$ следует, что $C_2 = \delta_0 \operatorname{ch}^2 C_1$, откуда

$$C_1 = \ln [(C_2/\delta_0)^{1/2} - (C_2/\delta_0 - 1)^{1/2}].$$

При $\xi \rightarrow \infty$ из (11) следует, что

$$U_1(\xi \rightarrow \infty, t) = \xi \{\varphi - [2C_2(1 + \sigma)]^{1/2}\} + (1 + \sigma)(-\ln \delta_0 + \ln C_2 - 2C_1 + \ln 4) + O(1).$$

Из физических соображений очевидно, что при $\xi \rightarrow \infty$ должны быть малые разогревы в достаточно далекой от накаливаемой поверхности области, следовательно,

$$C_2 = \varphi^2 / 2(1 + \sigma).$$

Поток тепла через поверхность A равен

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta_1} \right)_{\eta_1=0} = -\operatorname{th} C_1 [2C_2(1 + \sigma)]^{1/2} = [\varphi^2 - 2\delta_0(1 + \sigma)]^{1/2}.$$

Поток тепла обращается в нуль при

$$\varphi^2(\eta_2, \eta_3, t^*) = 2\delta_0(1 + \sigma),$$

t^* — время зажигания.

Частные случаи. В качестве первого примера рассмотрим зажигание полубесконечного слоя k -фазы толщиной $2r$, одна сторона которого (A) находится в контакте с нагревателем, а другая (B) поддерживается при постоянной температуре. Тогда уравнения (4) имеют вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta_1^2} + \delta \exp [\beta(\Theta - 1)/(\Theta + \sigma)],$$

$$\Theta(0, t) = 1, \quad \Theta(1, t) = 0, \quad \Theta(\eta_1, 0) = 0.$$

Инертное решение этой задачи описывается уравнением

$$\Theta_i = 1 - \eta_1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \exp [-(\pi n)^2 t] \sin (\pi n \eta_1) / n,$$

учитывая которое, имеем

$$\varphi = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp (-(\pi n)^2 t).$$

Значение δ_0 , при котором наступает зажигание, определяется из соотношения

$$\delta_0 = \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp (-(\pi n)^2 t_{\text{ign}}) \right]^{1/2} (1 + \sigma).$$

На рисунке (кривая 3) показана зависимость δ_0 от времени зажигания, полученная путем суммирования ряда на ЭВМ. Видно, что с уменьшением δ_0 время зажигания увеличивается. Существует такое δ_0^* , что при $\delta_0 < \delta_0^*$ зажигание слоя не наступает

$$\delta_0^* = 1/2 (1 + \sigma).$$

Это, в свою очередь, дает критическую толщину слоя

$$r^* = (\delta_0^* \cdot \beta \exp (\beta) \lambda (T_+ - T_-) / k Q \rho)^{1/2}.$$

В качестве следующего примера рассмотрим зажигание кубика, одна из поверхностей которого (A) находится в контакте с нагревателем, а остальные поддерживаются при постоянной температуре. Для данного образца к-фазы уравнения (4) принимают вид

$$\partial \Theta / \partial t = \Delta \Theta + \delta \exp [\beta (\Theta - 1) / (\Theta + \sigma)],$$

$$\Theta(A, t) = 1, \Theta(B, t) = 0, \Theta(D, 0) = 0.$$

Решение инертной задачи описывается уравнением

$$\begin{aligned} \Theta_i = & (16/\pi^2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin [(2m-1) \pi y] \sin [(2n-1) \pi z] \times \\ & \times \operatorname{sh} [(1-x) \sqrt{p_{m,n,0}}] / [(2m-1)(2n-1) \operatorname{sh} \sqrt{p_{m,n,0}}] - \\ & - \left(\frac{32}{\pi^3} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} l \sin [(2m-1) \pi y] \sin [(2n-1) \pi z] \sin (\pi l x) \times \\ & \times \exp (-p_{m,n,l} t) / [(2m-1)(2n-1) \cdot p_{m,n,l}], \\ & p_{m,n,l} = (2m-1)^2 \pi^2 + (2n-1)^2 \pi^2 + l^2 \pi^2, \end{aligned}$$

принимая во внимание которое, имеем при $z = y = 1/2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial x} = & - \left(\frac{16}{\pi^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{n+m} \sqrt{p_{m,n,0}} \cdot \operatorname{ch} [(1-x) \sqrt{p_{m,n,0}}] / [(2m-1) \times \\ & \times (2n-1) \operatorname{sh} \sqrt{p_{m,n,0}}] - 32 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} l^2 \exp (-p_{m,n,l} t) \cos \pi l x}{(2m-1)(2n-1) p_{m,n,l}}. \quad (12) \end{aligned}$$

В данном случае при суммировании ряда (12) нельзя считать, что $\varphi = - \frac{\partial \Theta}{\partial x} \Big|_{x=0}$, так как первое слагаемое в (12) сходится неравномерно

по x . Поэтому вычисляется значение φ при $x \rightarrow 0$. Ряды суммировались на ЭВМ при $z = y - 1/2$, т. е. в центре плоскости A , где температура максимальна

$$\delta_0 = \varphi^2(1/2, 1/2, t_{\text{ign}})/2(1 + \sigma).$$

Зависимость δ_0 от времени зажигания показана на рисунке (кривая 1). Критическое значение δ_0 для кубика

$$\delta_0^* = \frac{128}{\pi^2(1 + \sigma)} \left[\frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+m} \sqrt{p_{m,n,0}} \operatorname{ch}((1-x) \sqrt{p_{m,n,0}})}{(2m-1)(2n-1) \cdot \operatorname{sh} \sqrt{p_{m,n,0}}} \right]^2,$$

где $x \rightarrow 0$. В этом случае системы координат x, y, z и η_i совпадают.

Рассмотрим зажигание полубесконечного цилиндра, торец которого находится в контакте с нагревателем, а боковая поверхность поддерживается при постоянной температуре. Задача о зажигании цилиндра исследовалась в [3]. Уравнения (4) в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta_1^2},$$

$$\Theta|_{r=1} = 0, \quad \Theta|_{\eta_1=0} = 1, \quad \Theta|_{t=0} = 0.$$

Решение инертной задачи для данного случая:

$$\begin{aligned} \Theta_i = & 2 \sum_{i=1}^{\infty} I_0(\alpha_i r) \exp(-\alpha_i \eta_1) / \alpha_i I_1(\alpha_i) + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I_0(\alpha_i r)}{\alpha_i I_1(\alpha_i)} \left[2 \operatorname{sh}(\alpha_i \eta_1) + \exp\left(-\alpha_i \eta_1 \Phi\left(\alpha_i \sqrt{t} + \frac{\eta_1}{2\sqrt{t}}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \exp(\alpha_i \eta_1) \Phi\left(\alpha_i \sqrt{t} - \frac{\eta_1}{2\sqrt{t}}\right) \right] \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где α_i корень уравнения $I_0(\alpha_i) = 0$. Учитывая (13), находим, что в центре цилиндра при $r = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta_1} = & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\exp(\alpha_i \eta_1)}{I_1(\alpha_i)} \left[1 - \Phi\left(\alpha_i \sqrt{t} - \frac{\eta_1}{2\sqrt{t}}\right) \right] - \\ & - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_i \eta_1)}{I_1(\alpha_i)} \left[1 + \Phi\left(\alpha_i \sqrt{t} - \frac{\eta_1}{2\sqrt{t}}\right) \right] - \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_i^2 t - \frac{\eta_1^2}{4t}}}{\alpha_i I_1(\alpha_i)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Этот ряд сходится неравномерно по η_1 , следовательно,

$$\varphi = - \lim_{\eta_1 \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \eta_1} \right).$$

Ряды (14) суммировались на ЭВМ. Зависимость δ_0 от t_{ign} для цилиндрического образца показана на рисунке (кривая 2). В данном случае

$$\delta_0^* = \frac{\varphi^2(\eta_i, \infty)}{2(1 + \sigma)} = (1,323)^2/[2(1 + \sigma)].$$

При $\delta_0 < \delta_0^*$ наступит погасание. Критические значения для разных образцов:

	Плоский слой	Кубик	Цилиндр
$\sigma=0,1$	0,456	2,716	0,795

Поступила в редакцию
18/VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Карслоу, Д. Егер. Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964.
2. В. С. Берман, Ю. С. Рязанцев. ИМТФ, 1977, 1.
3. В. В. Барзыкин, С. И. Худяев. Докл. АН СССР, 1966, 169, 6.

ПРИРОДА И ЗАКОНОМЕРНОСТИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ПУЛЬСИРУЮЩЕГО КОНВЕКТИВНОГО ГОРЕНИЯ

*Б. С. Ермолаев, А. А. Сулимов, В. А. Фотеевков,
В. Е. Храповский, А. И. Коротков, А. А. Борисов
(Москва)*

Конвективное горение — явление быстрого распространения пламени в пористых газопроницаемых зарядах пороха или ВВ — известно как одна из основных стадий перехода нормального горения во взрыв [1]. Обычно конвективное горение прогрессивно ускоряется, что обусловлено увеличением поверхности горения и давления во фронте пламени. В [2—5] показано, что квазистационарный режим конвективного горения возможен лишь в крайне ограниченном диапазоне экспериментальных условий, когда проявляется действие факторов, представляющих ускорение процесса. Эти условия должны исключать повышение давления во фронте пламени и обеспечить баланс массы фильтрующегося газа [5].

Имеющиеся в литературе экспериментальные данные нельзя считать достаточно убедительным доказательством существования истинно стационарного конвективного горения. Исследования проводились обычно с зарядами малой длины, при этом отсутствовала какая-либо дополнительная информация, кроме измерения средней скорости распространения пламени [2—4]. Неоднократно отмечалось [1, 2, 4], что конвективному горению свойственны пульсации пламени. Высказаны соображения и приводились отдельные факты, свидетельствующие о возможности стабилизации конвективного горения за счет диспергирования горящего топлива или разрушения оболочки заряда [2, 4, 6]. Вместе с тем в литературе, по существу, отсутствуют сведения о регулярности (периодичности) пульсаций и количественные связи пульсационных характеристик со скоростью конвективного горения и параметрами заряда. Вследствие этого по-прежнему остается неясной роль пульсаций в стабилизации процесса.

В данной работе проведено совместное экспериментальное и теоретическое исследование пульсационных характеристик квазистационарного конвективного горения на прессованных зарядах с пористостью 5%, помещенных в прочную оболочку, и на насыпных зарядах с пористостью 45%, заключенных в разрушающиеся оболочки. В результате исследования получено исчерпывающее доказательство того, что пульсации составляют основу механизма квазистационарного конвективного горения и стабилизация процесса осуществляется за счет пульсаций зоны горения, вызванных локальным периодическим разрушением горящего топлива или оболочки заряда. В дальнейшем квазистационарным будет называться процесс, когда сохраняются постоянными средние значения скорости распространения и максимального давления во фронте пламени.

1. В первой серии опытов использовались прессованные заряды, изготовленные из сплошных гранул модельного смесового пороха на основе перхлората аммония. Опыты проводились в лабораторной установке, аналогичной [5]. Схема установки приведена на рис. 1. Горение заряда