ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОИСКИ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

THEORETICAL SEARCH AND OFFERS

Вестник НГУЭУ. 2023. № 2. С. 182–194
Vestnik NSUEM. 2023. No. 2. P. 182–194

Научная статья
УДК 330.11.4:330.3
DOI: 10.34020/2073-6495-2023-2-182-194

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЕ РАЗВИТИЕ ЭКОНОМИКИ

Кузнецов Сергей Борисович

Новосибирский государственный университет экономики и управления «НИНХ»

sbk@ngs.ru

Аннотация. В статье рассматривается математическое определение пространства состояний макроэкономики, где каждая точка представляет собой определенное распределение прироста основных факторов производства – трудовых ресурсов, капитала и природных ресурсов. Исследуется нарушение устойчивого режима экономического развития, описываемого системой дифференциальных уравнений в частных производных. В статье исследуется феномен устойчивого экономического развития, а также наличие более одного режима устойчивого экономического развития в зависимости от политических и международных факторов. Подробно описывается роль периодического развития в экономике и наличие множественных аттракторов, создающих различные устойчивые режимы. Возникающее многообразие устойчивых режимов является решением нелинейных дифференциальных уравнений. Исследуется процесс неустойчивости, возникающий, когда экономическое число, определяющее конкретную экономику, продолжает увеличиваться после достижения своего первого критического значения. Дальнейшее увеличение экономического ряда приводит к неустойчивости периодического развития. Траекторный анализ производственных факторов выполняется по методике, представленной Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. Возникшая стабилизация экономики может быть вновь нарушена при приближении экономического числа к очередному критическому значению, т.е. нестабильность вновь возникает с появлением новой частоты. После прохождения нескольких критических значений экономического числа может возникнуть устойчивый предельный цикл на торе, являющийся геометрической интерпретацией траекторий развития экономики. Возникновение устойчивого предельного цикла свидетельствует о проявлении синхронных колебаний, т.е. об исчезновении квазипериодического движения и установлении нового периодического движения. Рождение устойчивого предельного цикла препятствует возникновению режима наложенных траекторий движения с большим количеством несоизмеримых частот.

Ключевые слова: бифуркация, экономическое число, траектория развития экономики, предельный цикл, неустойчивость экономики, квазипериодичность экономики

Для цитирования: Кузнецов С.Б. Квазипериодическое развитие экономики // Вестник НГУЭУ. 2023. № 2. С. 182–194. DOI: 10.34020/2073-6495-2023-2-182-194.

Original article

QUASI-PERIODIC DEVELOPMENT OF THE ECONOMY

Kuznetsov Sergey B.

Novosibirsk State University of Economics and Management

sbk@ngs.ru

Abstract. The article considers the mathematical definition of the space of states of the macroeconomy, where each point represents a certain distribution of the growth of the main factors of production – labor, capital, and natural resources. We study the violation of the sustainable regime of economic development, described by the system of differential equations in partial derivatives. The phenomenon of stable development of the economy, as well as the presence of more than one stable regime of economic development, depending on political and international factors, is studied. The role of periodic development in the economy and the existence of multiple attractors that create various stable regimes are considered in detail. The various stable regimes that arise are solutions of non-linear differential equations. We study the process of the emergence of instability, when the economic number that defines a particular economy continues to increase after reaching its first critical value. A further increase in the economic number leads to the fact that periodic development becomes unsustainable. The trajectory analysis of production factors is performed by the method presented by L.D. Landau and E.M. Lifshitz. The emerging stabilization of the economy can be broken again as the economic number approaches the next critical value; instability reappears with the advent of a new frequency. After passing through several critical values of the economic number, a stable limit cycle can appear on the torus, which is a geometric interpretation of the trajectories of economic development. The appearance of a stable limit cycle means the manifestation of synchronization of oscillations the disappearance of the quasi-periodic and the establishment of a new periodic motion. The birth of a stable limit cycle prevents the emergence of a regime of superpositions of motions of trajectories with many incommensurable frequencies.

Keywords: bifurcation, economic number, trajectory of economic development, limit cycle, instability of the economy, quasi-periodicity of the economy

For citation: Kuznetsov S.B. Quasi-periodic development of the economy. *Vestnik NSUEM.* 2023; (2): 182–194. (In Russ.). DOI: 10.34020/2073-6495-2023-2-182-194.

Введение

Бифуркации в экономике относятся к процессу разделения рынка или экономической системы на две отдельные части. Это может произойти из-за множества факторов, таких как изменения в технологии, изменения в потребительских предпочтениях или изменения в глобальной экономической среде. Возникающие бифуркации имеют положительные и отрицательные последствия для экономического развития и зависят от конкретных обстоятельств.

Один из наиболее распространенных примеров бифуркации в экономике – появление нового рынка, связанное с внедрением новой технологии или продукта, или возникновением новых потребительских предпочтений. В любом случае рынок может быть разделен на две отдельные части: одна часть сосредоточена на новой технологии или продукте, а другая – на традиционных продуктах или услугах. Это может привести к усилению конкуренции, а также к новым возможностям для выхода бизнеса на рынок.

Еще один пример бифуркации в экономике – появление нового сектора, вызванное созданием новой отрасли или сектора или разделением существующей отрасли или сектора на две отдельные части, что может привести к усилению конкуренции между двумя секторами, а также к новым возможностям для выхода бизнеса на рынок.

Бифуркация также может происходить из-за изменений в глобальной экономической среде: изменений обменного курса, уровня экономического роста или уровня инфляции. Такие изменения могут привести к раздвоению рынка, когда одна часть ориентируется на новую экономическую среду, а другая – на традиционную экономическую среду.

Наконец, бифуркация возможна при изменении потребительских предпочтений, включающих изменения в типах продуктов или услуг, которые интересуют потребителей, или в том, как потребители рассматривают определенные продукты или услуги.

Бифуркация в экономике может привести к усилению конкуренции, новым возможностям для выхода бизнеса на рынок и изменениям в глобальной экономической среде. Для предприятий важно знать о потенциальных последствиях бифуркации, чтобы принимать обоснованные решения о своих стратегиях и инвестициях.

Первая математическая модель бифуркаций в экономике была разработана Р. Лукасом в 1976 г. [3]. Эта модель, известная как модель Лукаса, использовала систему уравнений для описания динамики экономики и показывала, как небольшие изменения определенных параметров могут привести к большим изменениям в общем поведении системы. С тех пор эта модель была расширена и применена к различным экономическим контекстам, включая изучение деловых циклов, экономического роста и инфляции.

Теория катастроф – это математическая модель, используемая для анализа резких изменений в экономических системах. Она применялась к различным экономическим явлениям, включая экономический рост, рыночные крахи и экономические циклы. Модель определяет критические точки в системе, где происходят резкие изменения в поведении. Теория катастроф использовалась для объяснения поведения финансовых рынков, особенно для лучшего понимания рыночных крахов. Например, в банковской сфере теория катастроф использовалась для анализа крахов финансовых учреждений [15].

Бифуркационная модель Хопфа представляет собой математический инструмент, описывающий качественные изменения в экономических системах по мере их движения к нестабильности. Бифуркации Хопфа часто возникают в экономических системах, поскольку система демонстрирует колебательное поведение. Модель использовалась для анализа деловых циклов, динамики инфляции и моделей экономического роста. Инфляция была изучена с использованием моделей бифуркации Хопфа, и исследования показали, что экономика переживает переход от стабильной инфляции к нестабильной с увеличением денежной массы [8].

Модель бифуркации Вилы – еще один математический инструмент, который использовался для анализа экономических систем. Модель описывает структурные изменения в системе по мере преобразования параметров системы. Такого типа бифуркация использовалась для анализа экономического роста и промышленной организации. Модель дает представление о факторах, вызывающих структурные изменения в экономике, таких как политика экономической либерализации [1].

Теория хаоса – это математическая модель, описывающая системы, чувствительные к начальным условиям, а это означает, что небольшое изменение в начале может привести к значительным различиям в результатах. Такое поведение широко известно как эффект бабочки. Теория хаоса применялась в экономике для объяснения экономических явлений, таких как рыночные крахи, поведение цен на акции и колебания валютных курсов. На фондовом рынке теория хаоса используется для анализа поведения цен на акции и прогнозирования тенденций фондового рынка на разных временных горизонтах [13].

Нелинейная динамика – это математическая модель, описывающая поведение систем, результаты которых не пропорциональны входным данным. В экономических системах нелинейная динамика использовалась для изучения экономических явлений, таких как экономический рост и деловые циклы. Модель полезна для объяснения причин колебаний экономики и выявления факторов, способствующих экономическому росту в периоды стабильности. Модель также использовалась для анализа механизма стабильности экономических систем, например, почему относительно небольшие экономики могут оставаться стабильными, в это же время более крупные испытывают волатильность [10].

Модели в пространстве состояний широко использовались в макроэкономическом анализе, как подчеркивается в статье Басдевант [7]. Эти модели позволяют включать ненаблюдаемые переменные и изменяющиеся во времени параметры, обеспечивая гибкую основу для отражения динамики экономических систем.

Систематический обзор использования теории хаоса в экономике был представлен Хоссейн Аббаси Неджад и Шапур Мохамади [14]. Авторы оценили методы и приложения теории хаоса в экономике, подчеркнув ее потенциал для лучшего понимания сложных экономических явлений.

Диболд и Йилмаз предложили сетевой подход к измерению и мониторингу финансовой и макроэкономической взаимосвязанности [11]. В их работе подчеркивается важность понимания взаимосвязей между различными секторами и потенциальных эффектов заражения во время кризиса.

В области ценообразования активов Брок и Хоммес исследовали влияние разнородных убеждений на динамику финансовых рынков [9]. Их модель продемонстрировала, как разные мнения о стоимости актива могут привести к хаотическому поведению в динамике цены.

Гандерсон и Холлинг представили концепцию панархии для описания преобразований в человеческих и природных системах [12]. В их работе подчеркивалась важность понимания взаимодействия между социальными и экологическими системами и потенциала нелинейной динамики в этих системах.

Представленная здесь работа способствует пониманию поведения макроэкономики посредством анализа пространства их состояний [2]. Понятие пространства состояний и соответствующих ему фазовых пространств использовалось и в других областях естествознания, но их применение в макроэкономической теории относительно новое. В работе предлагается математическое определение пространства состояний макроэкономики, показывающее, как каждой точке соответствует определенное распределение основных факторов производства. Он также описывает, как стационарное и циклическое развитие экономики можно представить в виде точек и замкнутых кривых соответственно в этом пространстве состояний.

Одним из новых аспектов данной работы является анализ устойчивости траектории развития экономики. В работе отмечается, что при определенных условиях экономика может иметь несколько устойчивых траекторий развития, каждой из которых соответствует свой аттрактор. Наличие множественных аттракторов означает, что развитие экономики зависит не только от ее внутренних экономических факторов, но и от внешних политических и международных влияний. Этот вывод противоречит традиционному представлению о том, что экономики стремятся к одному стабильному состоянию равновесия.

Практическое значение этой работы заключается в ее потенциале для информирования экономической политики. Выявление нескольких устойчивых траекторий развития свидетельствует о том, что небольшие изменения экономических факторов или внешних воздействий могут спровоцировать существенные сдвиги в траектории развития экономики. Эти знания могут помочь директивным органам предвидеть потенциальные дестабилизирующие факторы и принять меры, чтобы избежать крупных экономических колебаний. Кроме того, методология работы может быть использована для анализа других сложных систем, выходящих за рамки макроэкономики, облегчая выявление множественных аттракторов в различных природных и социальных явлениях. В целом в работе представлен новый математический подход к анализу макроэкономического развития, который может способствовать лучшему пониманию сложностей экономических систем.

Основная часть

Рассмотрим математическое определение пространства состояний некоторой макроэкономики, где каждой точке соответствует определенное распределение прироста основных факторов производства: трудовых ресурсов (L), капитала (K) и природных ресурсов (N). Исследуемые явления рассматриваются в точке $r = (L, K, N)$. Будем считать, что близким моментам времени соответствуют близкие точки в этом пространстве. Такие пространства называются фазовыми. В этом пространстве стационарное развитие экономики изображается точкой, а циклическое развитие экономики будет иметь вид замкнутой линии (траектории развития) в пространстве состояний. Получаемые траектории соответствуют предельным циклам или предельным точкам. Пусть экономика развивается стабильно, это означает, что соседние траектории развития, характеризующие установление экономического роста, стремятся к предельному циклу или предельной точке.

Пространство состояний имеет определенную область притяжения для предельного цикла или точки. Все траектории, начинающиеся в этой области, в конечном итоге сходятся к циклу, который называется аттрактором. Примечательно, что данный объем первичных факторов производства и определенный уровень технологии, т.е. конкретное экономическое число E_0 не обязательно может иметь уникальный аттрактор [4, 5]. Могут возникнуть случаи, в которых пространство состояний экономического объекта имеет разные аттракторы, обладающие собственными областями притяжений. Экономический рост зависит не только от экономических факторов; политические и международные влияния также играют значительную роль. Таким образом, если $E_0 > E_{\text{кр}}$, существует возможность возникновения нескольких устойчивых режимов экономического развития, и различные режимы реализуются в зависимости от того, как достигается это экономическое число [6]. Стоит подчеркнуть, что эти мириады устойчивых режимов экономического развития являются решениями нелинейных уравнений [3, 6].

$$\frac{dv_p}{dt} - \mu\Delta v_p - \mu\,\mathrm{div}\left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial p}\right) = j_p, \tag{1}$$

где p – один из факторов производства (L, K, H); $\frac{dp(t)}{dt} = v_p$ – прирост факторов производства; $\Delta v_p^2 = \frac{\partial^2 v_p}{\partial L^2} + \frac{\partial^2 v_p}{\partial K^2} + \frac{\partial^2 v_p}{\partial H^2}$ – оператор Лапласа; μ – коэффициент сопротивления экономической среды, зависящий от времени, прирост инвестиций $\frac{d\overline{I}(t)}{dt} = \overline{j}(t)$; $\mathrm{div}(\overline{F}) = \frac{\partial F_L}{\partial L} + \frac{\partial F_K}{\partial K} + \frac{\partial F_H}{\partial H}$.

Обратим внимание на явления, возникающие, когда экономическое число данной экономики продолжает увеличиваться после достижения своего критического значения $E_{\text{кр}}$ и установления периодического развития, как это обсуждалось в [5, 6]. По мере увеличения $E_{\text{кр}}$ наступает момент, когда это периодическое развитие становится нестабильным. Рассмотрим это движение, используя методологию, представленную в [5, 6]. Роль невозмущенного движения теперь играет периодическая функция $v_0(r, t)$ с частотой ω_1. Затем уравнение развития экономики заменяется на $v(r, t) = v_0(r, t) + v_2(r, t)$, где $v_2(r, t)$ – небольшая поправка.

Результатом корректировки будет снова линейное уравнение. Коэффициенты нового уравнения будут зависеть от первоначальных факторов производства и от времени. Новые коэффициенты будут обладать периодическими свойствами с конкретным периодом:

$$v_2 = \Pi(r, t)e^{-i\omega t}, \tag{2}$$

где $\Pi(r, t)$ – функция, имеющая период T_1. Неустойчивость возникает вновь при появлении частоты $\omega = \omega_2 + i\gamma_2$, где коэффициент при мнимой части $\gamma_2 > 0$, а действительная часть определяет возникающую новую частоту.

Через период времени T_1 возмущение (2) изменяется в $\lambda = e^{-i\omega T_1}$ раз. Этот фактор является мультипликатором периодического экономического развития. Он свидетельствует о затухании или усилении нарушений в развитии факторов производства. Следует отметить, что периодическому экономическому развитию будет соответствовать бесконечное число мультипликаторов, соответствующих независимым возмущениям. Если один или несколько множителей $|\lambda| = 1$, т.е. множитель касается единичной окружности на комплексной плоскости, достигается новое критическое значение экономического числа $E_{\text{кр}_2}$, при котором экономика теряет устойчивость. Наше уравнение (1) вещественно, поэтому возможные касания или пересечения единичной окружности множителями будут либо парами комплексно-сопряженных, либо действительными. В результате потери устойчивости периодического экономического развития происходит кардинальное изменение поведения траектории развития факторов производства в районе неустойчивого предельного цикла, возникает локальная бифуркация. Поведение вновь возникшей бифуркации определяется точкой пересечения единичной окружности множителями.

Проанализируем возникновение бифуркации, появляющейся в результате прохождения единичной окружности двумя комплексно-сопряженными множителями вида $\lambda = e^{\pm 2\pi\alpha i}$, где α – иррациональное число. В результате бифуркации возникает вторичная траектория развития экономического объекта с новой частотой $\omega_2 = \alpha\omega_1$. Возникает квазипериодическая траектория развития, которая характеризуется двумя независимыми параметрами, которые могут быть совершенно несоизмеримы. Геометрически траектория развития экономического объекта в пространстве состояний может быть описана как открытая намотка траекторий на двумерный тор, где образующей тора будет являться неустойчивый предельный цикл, возникающий в результате первой бифуркации. Вращение вдоль образующей тора имеет частоту ω_1, а вращение на торе имеет частоту ω_2. Если в начале траектории развития периодическое движение имело только одну степень свободы, то теперь имеется две фазы и, соответственно, экономика имеет две степени свободы. В действительности такая ситуация в развитии экономики возникает постоянно, даже в короткие промежутки времени.

При дальнейшем увеличении экономического числа $E > E_{\text{кр}_2}$ произойдет очередная бифуркация, приводящая к появлению нового периода. Двумерный тор превратится в трехмерный, затем его заменит четырехмерный и т.д. Разница между двумя критическими экономическими показателями будет уменьшаться, а возникающие новые траектории будут иметь все меньшие амплитуды колебаний. Экономика выйдет на запутанную траекторию движения или хаоса. В физике такое движение называется турбулентным.

Проанализируем данный сценарий экономического развития. Рассмотрим рост основных факторов производства $v(r, t)$, которые зависят от N различных частот ω_i. Рост представляет собой функцию, зависящую от различных фаз $\varphi_i = \omega_i t + \beta_i$ и объема факторов производства, где каждая фаза имеет период 2π. Функция имеет вид

$$v(r,t) = \sum A_{p_1 p_2 p_3 \cdots p_N}(r) \exp\left(-i\sum_{i=1}^{N} p_i \varphi_i\right).$$

Формула является обобщением результата, полученного в [5, 6], описывает траекторию экономического развития с N степенями свободы и описывается N различными начальными фазами β_i. Все различные значения фазы лежат в интервале $0 < \varphi_i \leq 2\pi$. Рассмотрим две разные фазы $\varphi_1 = \omega_1 t + \beta_1$ и $\varphi_2 = \omega_2 t + \beta_2$. Предположим, что $\varphi_1 = \alpha$, тогда во всех фазах, равных α, время выражается формулой

$$t = \frac{\alpha - \beta_1}{\omega_1} + \frac{2\pi s}{\omega_1},$$

где s – целое число. Соответственно вторая фаза в эти моменты времени принимает значения

$$\varphi_2 = \beta_2 + \frac{\omega_2}{\omega_1}(\alpha - \beta_1 + 2\pi s).$$

Как отмечалось ранее, частоты несоизмеримы, поэтому α является иррациональным числом в уравнении $\omega_2 = \alpha\omega_1$. Можем привести φ_2 к интервалу $0 < \varphi_2 \leq 2\pi$, вычитая целое число периодов 2π. Выбирая значения параметров для s, возникает возможность получать любые значения φ_2 в интервале от 0 до 2π. За достаточно большой промежуток времени фазы φ_1 и φ_2 приближаются к любой заданной паре значений. Те же рассуждения применимы и к другим фазам. Иными словами, согласно этой модели хаоса в экономике, траектории экономического развития будут сходиться к любому обозначенному состоянию в течение прогрессивной продолжительности времени, определяемой любой возможной комбинацией одновременных значений фаз φ_i. По мере увеличения количества используемых фаз время, необходимое системе для возврата в исходное состояние, быстро растет, стирая всякую периодичность. Это связано с тем, что вероятность нахождения экономической системы в данной точке пространства состояний, описываемого фазами φ_i, представляет собой отношение малого объема $(\Delta\varphi)^N$ к общему объему $(2\pi)^N$. Поэтому можно сделать вывод, что по прошествии достаточно большого интервала времени система окажется в окрестности заданной точки $e^{-\mu N}$, где $\mu = \ln\left(\frac{2\pi}{\Delta\varphi}\right)$.

Анализ хаоса рассматривается с точки зрения линейного представления. Фактически предполагается, что в результате вторичных неустойчивостей и появления новых периодических траекторий развития старые траектории не исчезают и не изменяются. В этой модели хаос в экономике представляет собой суперпозицию большого числа неизменных траекторий развития. В целом возмущения взаимодействуют друг с другом, что может привести как к упрощению, так и к усложнению траекторий развития.

Рассмотрим вопрос упрощения. Предположим, что возмущенное решение содержит две независимые частоты. Как отмечалось ранее, геометрическая картина этой ситуации представляет собой открытую обмотку двумерного тора. Первое возмущение ω_1, возникающее при $E > E_{\text{кр}_1}$, естественно считать более интенсивным вблизи $E > E_{\text{кр}_2}$, а потому его можно считать постоянным при малых изменениях экономического числа E.

Для описания поведения частоты возмущения ω_2 в контексте периодического развития частоты траектории экономического развития ω_1 введем следующую переменную:

$$a_2(t) = \left|a_2(t)\right| e^{-i\varphi_2(t)}, \tag{3}$$

где $|a_2(t)|$ представляет собой расстояние до генератора тора, ставшего неустойчивым из-за амплитудного развития вторичной траектории с фазой $\varphi_2(t)$. Рассмотрим поведение функции $a_2(t)$ в моменты времени, кратные $T_1 = 2\pi/\omega_1$. За один период частота возмущения ω_2 изменяется в μ раз, где

$$\mu = |\mu| \exp\left(-\frac{2\pi i \omega_2}{\omega_1}\right).$$

После прохождения целого числа из n таких периодов функция $a_2(t)$ будет изменена в μ^n раз. Надкритичность $E > E_{\text{кр}_2}$ будем рассматривать как малую величину. В этом случае приращение роста возмущения также мало, поэтому величина $|\mu| - 1$ положительна и мала и за период T_1 возмущение $a_2(t)$ меняется по величине незначительно. Фаза $\varphi_2(t)$ изменяется пропорционально n. Основываясь на этих выводах, перейдем от дискретного значения n к непрерывному дифференциальному уравнению.

Множитель рассматривается на небольшом временном интервале сразу после возникновения неустойчивости, при этом возмущение может быть описано линейными уравнениями. В этом интервале времени производная функции $a_2(t)$ описывается уравнением

$$\frac{da_2}{dn} = a_2(n) \ln \mu, \tag{4}$$

для малых надкритичностей

$$\ln \mu = \ln|\mu| - \frac{2\pi i \omega_2}{\omega_1} \approx |\mu| - 1 - \frac{2\pi i \omega_2}{\omega_1}.$$

Это первый член разложения $\dfrac{da_2}{dn}$ по степеням a_2 и при увеличении $|a_2|$ необходимо учитывать последующий член. Член разложения, содержащий такой же коэффициент колебаний $e^{-i\varphi_2(t)}$ будет в нашем разложении уже членом третьего порядка $a_2|a_2|^2$. Наше уравнение (4) можно аппроксимировать дифференциальным уравнением

$$\frac{da_2}{dn} = a_2 \ln \mu - \beta_2 a_2 \left|a_2\right|^2, \tag{5}$$

где β_2, μ – комплексные параметры, зависящие от текущего экономического номера, при $\mathrm{Re}\beta_2 > 0$. Действительная часть уравнения (5) определяет стационарное поведение значения модуля

$$\left|a_2^{(0)}\right|^2 = (|\mu| - 1) / \mathrm{Re}\,\beta_2.$$

Мнимая часть уравнения (5) для фазы $\varphi_2(n)$ после достижения стационарного значения модуля принимает вид

$$\frac{d\varphi_2}{dn} = \frac{2\pi\omega_2}{\omega_1} + \left|a_2^{(0)}\right|^2 \mathrm{Im}\,\beta_2. \tag{6}$$

Из уравнения (6) следует, что фаза φ_2 вращается с постоянной скоростью, но это справедливо только в малой временной окрестности. С ростом надкритичности $E > E_{\text{кр}_2}$ равномерность нарушается и скорость вращения на торе становится зависимой от фазы φ_2. Для учета этого эффекта рассмотрим правую часть уравнения (6) с малой функцией $\Phi(\varphi_2)$. Так как φ_2 – периодическая функция, пусть $\Phi(\varphi_2)$ также периодична с периодом 2π. Аппроксимируем иррациональное значение $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ рациональной дробью с любой степенью точности:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m_2}{m_1} + \varepsilon.$$

Уравнение (6) принимает вид:

$$\frac{d\varphi_2}{dn} = \frac{2\pi m_2}{m_1} + \varepsilon + \left|a_2^{(0)}\right|^2 \operatorname{Im}\beta_2 + \Phi(\varphi_2). \tag{7}$$

Рассмотрим значения фаз в моменты времени, кратные $m_1 T_1$, т.е. $n = m_1 \bar{n}$, где n – целое число. В уравнении (7) первый член в правой части приводит к фазовому сдвигу на $2\pi m_2$ за время $m_1 T_1$, что кратно 2π и им можно пренебречь. В результате вся правая часть становится малой величиной, и можно описать изменение функции $\varphi_2(\bar{n})$ дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{m_1}\frac{d\varphi_2}{d\bar{n}} = \varepsilon + \left|a_2^{(0)}\right|^2 \operatorname{Im}\beta_2 + \Phi(\varphi_2). \tag{8}$$

Следует отметить, что функция $\frac{\varphi_2}{m_1}$ изменяется незначительно на каждом дискретном шаге $\bar{n}$. Полученное уравнение (8) обладает стационарным решением $\varphi_2 = \varphi_2^{(0)}$, в котором правая часть уравнения должна обращаться в нуль. Фаза φ_2 в моменты времени $m_1 T_1$ постоянна, получили, что на торе возникает предельный цикл. Эта траектория будет замыкаться через m_1 циклов. В силу периодичности функции $\Phi(\varphi_2)$ решения могут возникать в сопряженных парах. На отрезке убывания функции $\Phi(\varphi_2)$ решение устойчиво, и в его окрестности, около точки $\varphi_2 = \varphi_2^{(0)}$ уравнение (8) принимает вид:

$$\frac{d\varphi_2}{d\bar{n}} = -C(\varphi_2 - \varphi_2^{(0)}),$$

где C – некоторая константа, большая нуля. Первое решение, где константа $C < 0$, приводит к неустойчивости.

Итак, из рассмотренного выше следует, что наличие устойчивых предельных циклов играет важную роль в динамике системы, позволяя установление периодических режимов и синхронизацию колебаний. Существуют различные способы возникновения устойчивых предельных циклов и препятствующих им неустойчивостей, что зависит от конкретной системы и ее характеристик. Важно отметить, что математическое моделирование таких динамических систем позволяет не только более глубоко понимать ее поведение, но и прогнозировать режимы ее функционирования. Поэтому исследование динамики систем и выявление устойчивых предельных циклов является актуальной и перспективной задачей, имеющей широкий спектр приложений в различных областях экономики.

Заключение

Были рассмотрены некоторые концепции фазовых пространств и аттракторов в макроэкономике. Определение точек и траекторий развития экономики в пространстве состояний позволяет более точно предсказывать экономическое развитие, и установление аттракторов демонстрирует стабильность или нестабильность данной экономики. Более того, экономические явления могут быть описаны нелинейными уравнениями, и анализ устойчивости режимов экономического развития может стать гораздо сложнее, когда учитываются не только факторы производства, но и политические и международные влияния. Нестабильное периодическое развитие, вызванное продолжительным ростом экономического числа, представляет интересный объект для дальнейшего исследования, и методология, представленная в этой статье, может быть полезной для углубленного анализа таких явлений.

Это значит, что если одна из фаз имеет иррациональное значение, то траектория развития экономического объекта становится квазипериодической и описывается несколькими начальными фазами, несоизмеримыми друг с другом.

Таким образом, возникающие бифуркации в экономике могут привести к переходу от периодического развития к квазипериодическому и хаосу. Для управления такими сложными процессами нужно использовать современные методы математического моделирования и принимать меры для устранения причин возникновения бифуркаций, чтобы сохранить устойчивость экономической системы.

Список источников

1. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / пер. с англ. М.: Мир, 1999. 335 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2006. 732 с.
3. *Лукас Р.Э.* Лекции по экономическому росту / пер. с англ. Д. Шестакова. М.: Издательство Института Гайдара, 2013. 288 с. ISBN 978-5-93255-364-0.
4. *Кузнецов С.Б.* Экономическое число – показатель эффективности национальной экономики // European Social Science Journal. 2014. Т. 1, № 3 (42). С. 406–414.
5. *Кузнецов С.Б.* Метастабильность экономики // Развитие территорий. 2020. № 4. С. 44–49. https://doi.org/10.32324/2412-8945-2020-4-44-49
6. *Кузнецов С.Б.* Динамическое обновление факторов производства. Новосибирск: Изд-во Сибпринт, 2010. 312 с.
7. *Basdevant O*. On applications of state-space modelling in macroeconomics. Reserve Bank of New Zealand. Discussion Paper Series. 2003.
8. *Bordo Michael D., Dueker Michael J., Wheelock David C*. Inflation, Monetary Policy and Stock Market Conditions, NBER Working Papers 14019, National Bureau of Economic Research, Inc. 2008.
9. *Brock W.A., Hommes C.H*. Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model // Journal of Economic Dynamics and Control. 1998. Vol. 22, no. 8. P. 1235–1274.
10. *Buchanan M*. Ubiquity: Why catastrophes happen. Three Rivers Press, 2002.

11. *Diebold F.X., Yilmaz K.* Financial and macroeconomic connectedness: A network approach to measurement and monitoring. Oxford University Press, 2015.
12. *Gunderson L.H., Holling C.S.* Panarchy: Understanding transformations in human and natural systems. Island Press, 2002.
13. *Haridas Ajit*. Order and Disorder: The Chaotic Nature of Financial Markets. iibm Management Review. June 2003. P. 19–25.
14. *Hossein Abbasi Nejad, Shapour Mohamadi*. Catastrophe theory and its application in economics. Iranian Journal of Economic Research. 2002. Vol. 4, Iss. 12. P. 11–28.
15. Wesselbaum Dennis. Catastrophe theory and the financial crisis // Scottish Journal of Political Economy, Scottish Economic Society. 2017. Vol. 64 (4). P. 376–391.

References

1. Zang V.-B. Sinergeticheskaja jekonomika. Vremja i peremeny v nelinejnoj jekonomicheskoj teorii [Synergetic Economics. Time and Change in Nonlinear Economic Theory], per. s angl. M.: Mir, 1999. 335 p.
2. Landau L.D., Lifshic E.M. Gidrodinamika [Hydrodynamics]. M.: Izdatel'stvo Fiziko-matematicheskoj literatury, 2006. 732 p.
3. Lukas R.Je. Lekcii po jekonomicheskomu rostu [Lectures on economic growth], per. s angl. D. Shestakova. M.: Izdatel'stvo Instituta Gajdara, 2013. 288 p. ISBN 978-5-93255-364-0.
4. Kuznecov S.B. Jekonomicheskoe chislo – pokazatel' jeffektivnosti nacional'noj jekonomiki [Economic number – an indicator of the effectiveness of the national economy], *European Social Science Journal*, 2014, vol. 1, no. 3 (42), pp. 406–414.
5. Kuznecov S.B. Metastabil'nost' jekonomiki [Metastability of the economy], *Razvitie territorij* [*Development of Territories*], 2020, no. 4, pp. 44–49. https://doi.org/10.32324/2412-8945-2020-4-44-49
6. Kuznecov S.B. Dinamicheskoe obnovlenie faktorov proizvodstva [Dynamic renewal of production factors]. Novosibirsk: Izd-vo Sibprint, 2010, 312 p.
7. Basdevant O. On applications of state-space modelling in macroeconomics. Reserve Bank of New Zealand. Discussion Paper Series. 2003.
8. Bordo Michael D., Dueker Michael J., Wheelock David C. Inflation, Monetary Policy and Stock Market Conditions, NBER Working Papers 14019, National Bureau of Economic Research, Inc. 2008.
9. Brock W.A., Hommes C.H. Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model, Journal of Economic Dynamics and Control, 1998, vol. 22, no. 8, pp. 1235–1274.
10. Buchanan M. Ubiquity: Why catastrophes happen. Three Rivers Press, 2002.
11. Diebold F.X., Yilmaz K. Financial and macroeconomic connectedness: A network approach to measurement and monitoring. Oxford University Press, 2015.
12. Gunderson L.H., Holling C.S. Panarchy: Understanding transformations in human and natural systems. Island Press, 2002.
13. Haridas Ajit. Order and Disorder: The Chaotic Nature of Financial Markets. iibm Management Review. June 2003, pp. 19–25.
14. Hossein Abbasi Nejad, Shapour Mohamadi. Catastrophe theory and its application in economics. *Iranian Journal of Economic Research*, 2002, vol. 4, iss. 12, pp. 11–28.
15. Wesselbaum D. Catastrophe theory and the financial crisis, *Scottish Journal of Political Economy*, Scottish Economic Society, 2017, vol. 64 (4), pp. 376–391.

Сведения об авторе:

С.Б. Кузнецов – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и естественных наук, Новосибирский государственный университет экономики и управления «НИНХ», Новосибирск, Российская Федерация.

Information about the author:

S.B. Kuznetsov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of mathematics and natural sciences, Novosibirsk State University of Economics and Management, Novosibirsk, Russian Federation.

Статья поступила в редакцию	*22.04.2023*	*The article was submitted*	*22.04.2023*
Одобрена после рецензирования	*05.05.2023*	*Approved after reviewing*	*05.05.2023*
Принята к публикации	*10.05.2023*	*Accepted for publication*	*10.05.2023*