

О ГОРЕНИИ В УЗКИХ ПОЛОСТЯХ

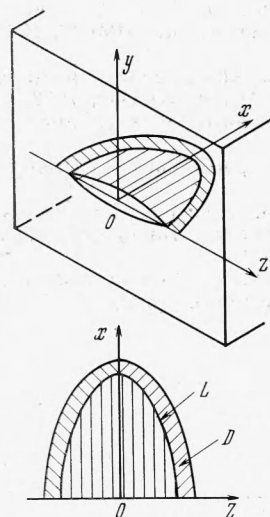
Г. П. Черепанов

(Москва)

При работе двигателей на твердом топливе иногда происходит выход на нерасчетный режим, приводящий к взрыву. Одна из наиболее распространенных причин этого явления состоит в том, что в твердом топливе имелись недопустимо большие трещино-подобные полости, возникшие в основном при технологическом процессе. Когда фронт горения подходит к краю такой полости, вследствие повышенного давления в камере сгорания горение быстро охватывает всю полость. При достаточно узкой и длинной полости вследствие затрудненного газоотвода давление в ней достигает столь большой величины, что происходит выход системы на неустойчивый режим. В зависимости от типа топлива неустойчивость может иметь два совершенно различных физических механизма: а) локальное объемное горение в конце полости, б) локальное разрушение топлива.

Ниже предлагается теоретическое описание указанных явлений¹. В п. 1 приводится постановка задачи, а в п. 2 формулируется локальный критерий неустойчивости. Далее рассмотрены решения плоских стационарных задач, и для одного простейшего случая в аналитической форме найдено достаточное условие устойчивости системы (п. 3)

1. Постановка задачи. Пусть горящее твердое тело в момент времени $t = 0$ представляет собой полупространство $x > 0$, на границе которого



при $x = 0$ происходит реакция горения. В теле в плоскости $y = 0$ имеется трещиновидная полость, поверхность которой также горит (фигура). Обобщение дальнейшего изложения на случай тела и трещины произвольной формы не вызывает принципиальных затруднений. Будем считать, что все реагенты равномерно распределены в твердой фазе, а продукты реакции газообразны. Будем пренебрегать толщиной зоны реакции, считая, что фронт горения совпадает с поверхностью всего тела.

Имея в виду практические приложения, ограничимся временами, малыми по сравнению с характерным временем релаксации напряжений в теле и с характерным временем нагрева тела вследствие теплопроводности. При этом тело можно считать упруго-пластическим, а его температуру — постоянной. Рассмотрим только квазистатический процесс деформирования твердого тела, тем самым считая, что

характерные времена протекания процесса велики по сравнению с характерным временем распространения упругих волн в твердом теле.

¹ Постановка и решение одной конкретной плоской задачи такого типа были приняты О. И. Лейпунским и З. В. Кирсановой («Механическая устойчивость горящих трещин в порохе». Тезисы докладов Первого Всесоюзного симпозиума по горению и взрыву, М., 1968). Насколько можно судить по кратким тезисам, порох в этой работе предполагается упруго-хрупким материалом, а локальное объемное горение в конце трещины не учитывалось. Возможность принятия этих допущений в реальных системах требует тщательной экспериментальной проверки (о которой в тезисах не упоминается) и, во всяком случае, существенно сужает область практических приложений.

Запишем уравнения теории малых деформаций твердого тела в упругой области

уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

закон Гука для однородного изотропного тела

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \theta \quad (\theta = \varepsilon_{ii}) \quad (1.2)$$

кинематическая связь деформаций со смещениями

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.3)$$

Здесь u_i , ε_{ij} , σ_{ij} — смещения, деформации и напряжения соответственно; λ и μ — постоянные Ляме; индексам 1, 2 и 3 соответствуют x , y и z (фигура).

Будем учитывать только пластические эффекты в окрестности края полости. Применим приближенную схему Дагдейла, согласно которой пластическая область сосредоточена в некоторой узкой области на продолжении трещины; размер этой области должен быть определен из решения задачи. Для простоты ограничимся случаем симметрии относительно плоскости $y = 0$; при этом пластические деформации будут сосредоточены в этой же плоскости в некоторой окрестности D контура трещины в плане (фигура), причем

$$\sigma_y = \sigma_z, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{zy} = 0 \quad (y = 0, (x, z) \in D) \quad (1.4)$$

Здесь σ_s — предел текучести на растяжение (реальная диаграмма $\sigma - \varepsilon$ аппроксимируется диаграммой Прандтля). Всюду в дальнейшем граничные условия с поверхности полости и области D будем сносить на плоскость $y = 0$ точно так же, как это делается, например, в теории тонкого крыла.

Схема Дагдейла получила удовлетворительное экспериментальное подтверждение для двух практически важных случаев: а) тонкие пластины б) композитные материалы с полимерным связующим, когда адгезионная прочность меньше прочности полимера. В последнем случае в области D сконцентрированы, собственно говоря, не пластические, а высокоэластические деформации, однако, как нетрудно видеть, это несущественно в рамках разрывных решений теории малых упругих деформаций. Заметим, что смесевое ракетное топливо обычно состоит из кристаллических частиц, распределенных в полимерном связующем.

Обозначим через $2h$ неизвестную заранее толщину полости, через $2v$ — взаимное смещение противоположных стенок полости, через h_c — толщину сгоревшего слоя на одной стенке. Все эти величины, очевидно, представляют собой некоторые искомые функции x , z и t . Они связаны между собой следующим равенством:

$$h = h_c + v \quad (1.5)$$

Уравнения течения газа в полости. Течение газа в полости считаем локально-изотропическим и безвихревым, газ — идеальным. В каждой точке x , y , z имеет место замкнутая система уравнений

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \quad \frac{d}{dt} \frac{p}{\rho^\kappa} = 0 \quad (1.6)$$

Здесь p , ρ , $\mathbf{v}$ — давление, плотность и вектор скорости газа соответственно; κ — показатель адиабаты.

При упрощении общих уравнений (1.6), учитывающем условие $h \ll L$, где L — характерный линейный размер полости, в плане встречаются затруднения, родственные тем, которые имеют место в теории упругих оболочек и в теории турбулентности. Поскольку эти трудности не отражены в литературе, имеет смысл остановиться на выводе основных уравнений течения газа в полости.

Возможны два точных метода. Первый основан на операциях усреднения, применяемых к уравнениям (1.6) с целью замыкания системы уравнений для средних значений искомых функций

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} p \, dy, \quad \langle v \rangle = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} v \, dy, \dots \quad (1.7)$$

а также моментов более высокого порядка. Однако в силу нелинейности уравнений (1.6) это не удается (проблема замыкания, аналогичная той, которая имеет место в турбулентности). Второй метод основан на введении в искомые функции физического малого параметра (например, h/L) и разложении в ряд по y и по малому параметру функций; при этом для последовательных членов разложения получаются замкнутые системы уравнений, которые в принципе могли бы быть решены поочередно в порядке возрастания индекса. Однако вследствие того что граничные условия в краевых задачах с различным индексом связаны между собой, возникающие трудности оказываются непреодолимыми при помощи точных методов (не говоря уже о трудностях суммирования асимптотических рядов).

Таким образом, при замыкании системы уравнений или формулировке граничных условий приходится делать некоторые физические допущения, упрощающие задачу (теория Кирхгофа для упругих пластин, теории Тейлора и Прандтля в турбулентности и др.). Следуя указанному полуэмпирическому методу, примем гипотезу «плоских сечений»

$$p = p(x, z, t), \quad \rho = \rho(x, z, t), \quad v_x = v_x(x, z, t), \quad v_z = v_z(x, z, t) \quad (1.8)$$

Тогда из (1.6) для компонент v_x и v_y легко получить следующую систему уравнений (к уравнению неразрывности применяется операция усреднения):

$$\begin{aligned} h \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h \rho v_x) + \frac{\partial}{\partial z} (h \rho v_z) &= \rho v_n \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^{\kappa}} \right) + v_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho^{\kappa}} \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho^{\kappa}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь v_n — скорость истечения газа по нормали к поверхности полости. Напишем уравнение сохранения массы на фронте горения

$$\rho_s \frac{\partial h_c}{\partial t} = \rho \left(v_n - \frac{\partial h_c}{\partial t} \right)$$

где ρ_s — плотность твердой фазы. Так как $\rho_s \gg \rho$, то

$$\rho v_n = \rho_s \frac{\partial h_c}{\partial t} \quad (1.10)$$

Приведем еще уравнение состояния идеального газа

$$p = \rho g \frac{R_0}{m} T \quad \left(R_0 = 1.99 \frac{\text{кал}}{\text{мол} \cdot \text{град}} \right) \quad (1.11)$$

Здесь m — молекулярный вес газа, T — температура газа, g — ускорение силы тяжести в данной точке пространства (основная локальная характеристика гравитационного поля).

Скорость горения возьмем в виде некоторой эмпирически определяемой зависимости

$$\frac{\partial h_c}{\partial t} = f(p) (1 + b v_x^2 + b v_z^2) \quad (1.12)$$

где b — эмпирическая константа (при отсутствии эрозии $b=0$), $f(p)$ — некоторая функция.

Система из 23 уравнения (1.1) — (1.3), (1.5), (1.9) — (1.12) с соответствующими начальными и граничными условиями служит для определения 23 неизвестных функций.

2. Критерий локальной неустойчивости. При определенных критических условиях скорость изменения линейных размеров полости в плане может быть гораздо больше скорости изменения толщины полости. Это происходит вследствие действия следующих физических факторов: а) локальное разрушение топлива в концевой части полости из-за концентрации напряжений), б) резкое увеличение скорости горения в концевой части полости вследствие локального разрыхления материала и увеличения поверхности горения (локальное объемное горение). Последний фактор также обусловлен местной концентрацией деформаций.

Указанные физические механизмы локальной неустойчивости, играющие неодинаковую роль в различных материалах, имеют общую причину: локальную концентрацию деформации. Это позволяет сформулировать следующий критерий предельного равновесия: в рамках схемы Дагдейла взаимное смещение противоположных стенок полости на ее контуре L всегда меньше или равно 2δ

$$v(x, z, t) \leq \delta \quad (x, z \in L) \quad (2.1)$$

Здесь δ — некоторая константа горящего твердого топлива; из физических соображений она может зависеть только от температуры топлива и давления газа в соответствующей точке контура L .

Согласно (2.1) при $v < \delta$ процесс локально устойчив и размеры полости в плане не изменяются (подростанием полости, происходящем, в частности, вследствие устойчивого горения, пренебрегается, что вполне допустимо лишь для достаточно малых времен, когда $h \ll L$); как только хотя бы в одной точке контура L будет достигнуто равенство $v = \delta$, в малой окрестности этой точки начинается локально неустойчивый процесс «горения-разрушения». Следует иметь в виду, что система в целом может еще оставаться устойчивой в некоторых случаях (т. е. конфигурация контура полости меняется в точках, где $v = \delta$, «не катастрофически быстро»). Такой случай вполне реален. Поэтому вопрос об устойчивости системы в целом должен изучаться отдельно.

Если схема Дагдейла неприменима, т. е. пластические деформации «размазаны» в некоторой области, следует использовать локальный критерий на основе коэффициента интенсивности напряжений сверхтонкой структуры, предложенный в работе [1].

В том случае, когда имеет смысл представление о тонкой структуре конца полости, все эти критерии эквивалентны условию Ирвина

$$K_I \leq K_{Ic} \quad (K_{Ic}^2 = 2\sigma_s E \delta) \quad (2.2)$$

Здесь K_I — коэффициент интенсивности напряжений, K_{Ic} — вязкость разрушения. Практически наиболее характерным признаком формирования тонкой структуры является проявление масштабного эффекта.

Условие (2.1) как критерий хрупкого разрушения тел с трещинами впервые было предложено М. Я. Леоновым и В. В. Панасюком [2]; в последние годы оно получило значительное распространение за границей (без ссылки на советских авторов). В рассматриваемой задаче этот критерий приобретает новый физический смысл.

Для определения констант δ и K_{Ic} наиболее удобна следующая схема эксперимента. В тонкой пластинке из исследуемого материала делается сквозной разрез, имитирующий дефект. Толщина пластинки не должна быть слишком малой, чтобы не проявилась зависимость δ и K_{Ic} от толщины пластины. По той же причине радиус надреза не должен быть слишком большим. Указанные границы для каждого материала свои и определяются практически; для смесевых твердых топлив они необременительны.

Затем пластинка с разрезом подвергается нагружению и поджигается в камере с соответствующим давлением. Схемы нагружения могут быть различными (наиболее просто осуществить центральный изгиб). Предложенный способ удобен тем, что при достаточно малой толщине пластины давление в сквозной полости будет таким же, как в камере; при этом величины v и K_I можно сравнительно легко вычислить в виде определенных функций внешней нагрузки и геометрии пластины, а также постоянных материала. Замеряя предельную нагрузку, по ним нетрудно определить δ и K_{Ic} .

3. Плоская стационарная задача. Рассмотрим важный случай плоской стационарной задачи, когда в приведенной выше общей системе уравнений можно положить

$$v_z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

В плоскости xy полость представляется вырезом длины l вдоль оси x ; толщина выреза h гораздо меньше l . На продолжении выреза имеется пластический слой нулевой толщины с длиной d , подлежащей определению.

В данном случае систему уравнений п. 1 в пренебрежении эрозией можно свести к следующей:

$$\begin{aligned} p &= C_0 \rho^\kappa, \quad \frac{v_x^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = C_1 \\ \frac{d}{dx} (h \rho v_x) &= \rho_s f(p), \quad h = h_0(x) + \int_0^x f(p) dt + v \\ v(x) &= \eta \frac{\kappa_1 + 1}{4\pi\mu} \int_{l+d}^x \frac{dt}{V(l+d)^2 - t^2} \left[- \int_{-l}^{+l} p(\tau) \frac{V(l+d)^2 - \tau^2}{\tau - t} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{2} \sigma_y^\infty t + \sigma_s \int_{-l-d}^{-l} \frac{V(l+d)^2 - \tau^2}{\tau - t} d\tau + \sigma_s \int_l^{l+d} \frac{V(l+d)^2 - \tau^2}{\tau - t} d\tau \right] \\ &\quad + \int_{-l}^{+l} p(\tau) \left(\frac{l+d+\tau}{l+d-\tau} \right)^{1/2} d\tau = \frac{\pi}{2} \sigma_y^\infty (l+d) - \\ &\quad - \sigma_s \int_l^{l+d} \left(\frac{l+d+\tau}{l+d-\tau} \right)^{1/2} d\tau - \sigma_s \int_{-l-d}^{-l} \left(\frac{l+d+\tau}{l+d-\tau} \right)^{1/2} d\tau \\ \left(C_0 = p_0 \rho_0^{-\kappa}, \kappa_1 = 3 - 4\nu, C_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{p_s}{\rho_1} \right)^2 f^2(p_1) + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь μ , ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно; σ_y^∞ — рабочее напряжение σ_y вдали от полости; p_0 , ρ_0 и p_1 , ρ_1 — давление и плотность газа в камере сгорания при $x = 0$ и в конце полости при $x = l$ соответственно (величины с индексом 1, очевидно, подлежат определению); $h_0(x)$ — заданная толщина начальной полости.

Последние два соотношения (3.2) представляют собой результат решения плоской задачи теории упругости для разреза $y = 0$, $|x| < l + d$ в бесконечной плоскости с граничными условиями

$$\begin{aligned} x + iy \rightarrow \infty, \quad \sigma_y &\rightarrow \sigma_y^\infty, \quad \tau_{xy} \rightarrow 0, \quad \sigma_x \rightarrow 0 \\ y = 0, \quad l < |x| < l + d, \quad \sigma_y &= \sigma_s, \quad \tau_{xy} = 0 \\ y = 0, \quad |x| < l \quad \sigma_y &= -p, \quad \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для учета граничного условия на основном фронте горения при $x = 0$ вводится поправочный коэффициент η , который равен примерно 1.2.

Система (3.2) служит для отыскания следующих величин: d , $p(x)$, $\rho(x)$, $v_x(x)$, $v(x)$, $h(x)$. Нетрудно свести ее к одному интегродифференциальному уравнению относительно $p(x)$ (и конечному соотношению для d — последнее уравнение (3.2)). Для численного решения этого уравнения, а только такое представляется возможным в общем случае, наиболее рационально применить следующий метод: функция $p(x)$ ищется в виде полинома с неизвестными коэффициентами (например, в виде линейной функции), а уравнение удовлетворяется приближенно в смысле наибольшей близости к нулю среднеквадратичной невязки. При этом неизвестные коэффициенты определяются из условия минимума получившейся функции. Можно применить также метод Галеркина.

Для оценки величин проведем приближенный аналитический расчет в предположении, что

$$h_0(x) = h_0 = \text{const}, \quad h_0 \gg v, \quad h_0 \gg h_c \quad (3.4)$$

$$f(p) = a + bp, \quad \int_0^l p(x) dx = \frac{1}{2} l(p_1 + p_0)$$

где a и b — эмпирические константы. При вычислении смещения v в конце полости при $x = l$ и величины d также для простоты будем считать, что на стенке полости действует постоянное давление $^{1/2}(p_1 + p_0)$.

В результате из уравнений (3.2) получим

$$\frac{p_1}{\rho_1^\kappa} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa}, \quad \rho_1 v_{x1} - \rho_0 v_{x0} = \frac{\rho_s}{h_0} \left[al + \frac{1}{2} bl(p_1 + p_0) \right] \quad (3.5)$$

$$v_{x1} = \frac{\rho_s}{\rho^2} (a + bp_1), \quad \frac{v_{x1}^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_{x0}^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0}$$

$$v = -\eta \frac{2(1-v^2)}{\pi E} l(2\sigma_s + p_1 + p_0) \ln \cos \beta \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{l} = \sec \beta - 1 \quad \left(\beta = \frac{\pi(2\sigma_s^\infty + p_1 + p_0)}{2(2\sigma_s + p_1 + p_0)} \right)$$

Соотношения (3.5) служат для определения p_1 , ρ_1 , v_{x1} , v_{x0} . Формула (3.6) на основании (2.4) позволяет найти достаточное условие устойчивости системы

$$-\eta l(2\sigma_s + p_1 + p_0) \ln \cos \beta \leq \frac{\pi E}{2(1-v^2)} \delta \quad (3.7)$$

Здесь величина p_1 представляет собой корень следующего уравнения:

$$\frac{\rho_s^2 p_0^{2/\kappa}}{2\rho_0^2} \left(\frac{a + bp_1}{p_1^{1/\kappa}} \right)^2 + \frac{\kappa p_0^{1/\kappa}}{(\kappa-1)\rho_0} p_1^{(\kappa-1)/\kappa} = \frac{\kappa p_0}{(\kappa-1)\rho_0} + \frac{\rho_s^2 l^2}{8h_0^2 \rho_0^2} (2a + bp_1 + bp_0)^2 \quad (3.8)$$

Полученное простое решение (3.5) — (3.8) можно использовать в качестве нулевого приближения.

Поступила 16 VIII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Хрупкая прочность сосудов под давлением. ПМТФ, 1969, № 6.
2. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, «Наукова думка», 1968.