Теплофизика и аэромеханика, 2017, том 24, № 1

УДК 532.529.5

Новые гиперболические модели запыленного газа

В.С. Суров

Южно-Уральский государственный университет
(*Национальный исследовательский университет*), *Челябинск*

E-mails: surovvictor@gmail.com

Представлены гиперболические модели газопылевой смеси в одно- и многоскоростном приближениях, в которых учтен межфракционный теплообмен. Проведен характеристический анализ уравнений моделей. С использованием метода Годунова с линеаризованным римановым решателем на криволинейной сетке решена задача Прандтля–Майера для воздушно-капельной смеси. Результаты расчетов сопоставлены с автомодельным решением.

Ключевые слова: гиперболические модели газопылевой смеси, метод Годунова, линеаризованный римановский решатель, математическое моделирование.

Введение

Для математического описания движения газа со взвешенными в нем твердыми химически инертными частицами используются два различных подхода: в одном пренебрегается объемом, занимаемым частицами [1, 2], в другом он учитывается [3]. Отметим, что в последнем случае уравнения модели не являются гиперболическими (см. [3]).

В настоящей работе модели газопылевой смеси, учитывающие собственный объем частиц, строятся на базе одно- и многоскоростной моделей многокомпонентных сред [4, 5], в которых удельные внутренние энергии несжимаемых фракций полагаются неизменными. Для учета межфракционного теплообмена системы уравнений моделей дополняются энергетическими уравнениями для «газа» частиц. Ниже показано, что полученные в рамках такого подхода системы уравнений моделей запыленного газа относятся к гиперболическому типу.

Односкоростное приближение

Рассмотрим односкоростную модель газопылевой смеси, т.е. будем полагать, что скорости газа и частиц совпадают. Уравнения, описывающие одномерное течение смеси идеального газа с несжимаемыми частицами, имеют вид

$$\partial\rho/\partial t+\partial\rho u/\partial x=0,\quad \partial\rho u/\partial t+\partial(p+\rho u^2)/\partial x=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{1}{2}u^2\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{1}{2}u^2\right)+p\right]u\right\}=0, \tag{1}$$

© Суров В.С., 2017

$$\partial\alpha_s/\partial t+\partial\alpha_s u/\partial x=0,\quad \partial\alpha_s\rho_s^0 u/\partial t+\partial\alpha_s\left(p+\rho_s^0 u^2\right)/\partial x=f,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha_s\rho_s^0\left(\varepsilon_s+\frac{1}{2}u^2\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\alpha_s\left[\rho_s^0\left(\varepsilon_s+\frac{1}{2}u^2\right)+p\right]u\right\}=Q+fu,$$

где f — плотность силы межфракционного взаимодействия (см. [4]), которая заранее неизвестна и определяется в процессе интегрирования системы (1); α — объемная доля, $\alpha_g+\alpha_s=1$ (индексами g и s отмечены газ и несжимаемая фракция); $\rho=\alpha_g\rho_g^0+\alpha_s\rho_s^0$ — плотность смеси, $\varepsilon_s=c_v T_s$ и $\varepsilon=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\alpha_g p}{\gamma-1}+\alpha_s\rho_s^0 c_v T_s\right)$ — удельные внутренние энергии частиц и смеси в целом, T — температура, Q — интенсивность межкомпонентного теплообмена на единицу объема смеси.

Законы сохранения энергии для смеси в целом и «газа» частиц после ряда преобразований могут быть переписаны как

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{p(\alpha_s+\gamma-\alpha_s\gamma)}{1-\alpha_s}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\gamma-1}{1-\alpha_s}Q,$$

$$\alpha_s c_v\rho_s^0\left(\frac{\partial T_s}{\partial t}+u\frac{\partial T_s}{\partial x}\right)+\alpha_s p\frac{\partial u}{\partial x}=Q,$$

следовательно, система уравнений модели запыленного газа (1) в квазилинейной форме принимает вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+\rho c^2\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\gamma-1}{1-\alpha_s}Q, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\alpha_s}{\partial t}+u\frac{\partial\alpha_s}{\partial x}+\alpha_s\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial T_s}{\partial t}+u\frac{\partial T_s}{\partial x}+\frac{p}{c_v\rho_s^0}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{Q}{\alpha_s c_v\rho_s^0},$$

где

$$c=\sqrt{\frac{p\left(\alpha_s+\gamma-\alpha_s\gamma\right)}{\left(1-\alpha_s\right)\rho}}. \tag{3}$$

Характеристическое уравнение системы (2) имеет только действительные корни: $\lambda_{1,2}=u\pm c$, $\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=u$. Скорость звука, рассчитанная по соотношению (3), близка к аппроксимирующей экспериментальные данные формуле Вуда [6]

$$c=\sqrt{\frac{\gamma p}{\left(1-\alpha_s\right)\rho}}, \tag{4}$$

что видно из рис. 1, где приведены соответствующие зависимости c от объемной доли α_s при нормальных условиях для водно-воздушной смеси.

Характеристические соотношения вдоль характеристических направлений $dx/dt=u\pm c$ системы (2) могут быть получены из уравнения

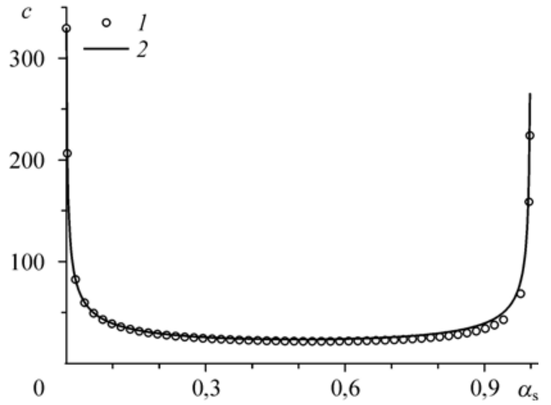

Рис. 1. Зависимости c от α_s, рассчитанные по формулам (3) (*1*) и (4) (*2*).

$$\begin{vmatrix} \xi-u & -\rho & 0 & 0 & -u\dfrac{d\rho}{dt}-\rho\dfrac{du}{dt} \\ 0 & \xi-u & -\dfrac{1}{\rho} & 0 & -u\dfrac{du}{dt}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dt} \\ 0 & -\rho c^2 & \xi-u & 0 & -\dfrac{\gamma-1}{1-\alpha_s}\xi Q-u\dfrac{dp}{dt}-\rho c^2\dfrac{du}{dt} \\ 0 & -\alpha_s & 0 & \xi-u & -\alpha_s\dfrac{du}{dt}-u\dfrac{d\alpha_s}{dt} \\ 0 & -\dfrac{p}{c_v\rho_s^0} & 0 & 0 & \dfrac{\xi Q}{\alpha_s c_v\rho_s^0}-u\dfrac{dT_s}{dt}-\dfrac{p}{c_v\rho_s^0}\dfrac{du}{dt} \end{vmatrix}=0,$$

где $\xi = dx/dt$. Раскрывая определитель, получим соотношения

$$dp \pm \rho c du + \alpha_s(\gamma-1)Qdt = 0, \tag{5}$$

справедливые на характеристических направлениях $\xi = u \pm c$.

Вдоль траекторной характеристики $\xi = u$ выполняются равенства

$$\alpha_s d\rho - \rho d\alpha_s = 0,\ \ c_v\rho_s^0 dT_s - p\,d\rho/\rho - Q\,dt/\alpha_s = 0,\ \ dp - c^2 d\rho + (\gamma-1)Q/(1-\alpha_s)dt = 0, \tag{6}$$

которые непосредственно следуют из системы (2).

Характеристические соотношения (5)–(6) могут быть применены при интегрировании системы (2) узловым методом характеристик [7], при конструировании характеристического риманова решателя [8], используемого в методе Годунова.

Систему (2) перепишем в векторной форме:

$$\partial\mathbf{U}/\partial t + A\partial\mathbf{U}/\partial x = \mathbf{S}, \tag{7}$$

где

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\rho\\ u\\ p\\ \alpha_s\\ T_s\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0\\ 0 & u & \dfrac{1}{\rho} & 0 & 0\\ 0 & \rho c^2 & u & 0 & 0\\ 0 & \alpha_s & 0 & u & 0\\ 0 & p/(c_v\rho_s^0) & 0 & 0 & u\end{pmatrix},\quad \mathbf{S}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -\dfrac{\gamma-1}{1-\alpha_s}Q\\ 0\\ Q/\left(\alpha_s c_v\rho_s^0\right)\end{pmatrix}.$$

Матрица Ω, составленная из правых собственных столбцов $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$, $\mathbf{R}_4$, $\mathbf{R}_5$ матрицы A, соответствующих собственным значениям $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = u$, $\lambda_5 = u + c$, имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \\ -\frac{1}{\rho c} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho c} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\alpha_s}{\rho c^2} & 0 & 1 & 0 & \frac{\alpha_s}{\rho c^2} \\ \frac{p}{c_v \rho_s^0 \rho c^2} & 0 & 0 & 1 & \frac{p}{c_v \rho_s^0 \rho c^2} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Ниже описан линеаризованный римановский решатель [9], использующий найденные правые собственные векторы, который применяется в численных схемах, аналогичных предложенной Годуновым. Матрица Ω также используется в конечноразностных схемах метода Куранта−Изаксона−Риса [10].

Модель смеси, учитывающая скоростную неравновесность

Система уравнений двухскоростной модели газопылевой смеси из работы [5], в которой дополнительно учтен межфракционный теплообмен, имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} - c^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_s u_s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_s \rho_s^0 u_s}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_s\left(p + \rho_s^0 u_s^2\right)}{\partial x} = \eta\left(u_g - u_s\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha_s \rho_s^0\left(\varepsilon_s + \frac{1}{2}u_s^2\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\alpha_s\left[\rho_s^0\left(\varepsilon_s + \frac{1}{2}u_s^2\right) + p\right]u_s\right\} = Q + \eta u_s\left(u_g - u_s\right),$$

где c определяется в соответствии с формулой (4). Система (9) может быть приведена к квазилинейному виду:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + u_s\frac{\partial \alpha_s}{\partial x} + \alpha_s\frac{\partial u_s}{\partial x} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s\frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{1}{\rho_s^0}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{\alpha_s \rho_s^0}\frac{\partial \alpha_s}{\partial x} = \frac{\eta}{\alpha_s \rho_s^0}\left(u_g - u_s\right),$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} + u_s\frac{\partial T_s}{\partial x} + \frac{p}{c_v \rho_s^0}\frac{\partial u_s}{\partial x} = \frac{Q}{\alpha_s \rho_s^0 c_v}.$$

Характеристическое уравнение системы (10) имеет только действительные корни: $\lambda_{1,2} = u \pm c$, $\lambda_3 = u$, $\lambda_{4,5} = u_\mathrm{s} \pm c_\mathrm{s}$, $\lambda_6 = u_\mathrm{s}$, где $c_\mathrm{s} = \sqrt{p/\rho_\mathrm{s}^0}$.

Матрица, составленная из правых собственных столбцов $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$, $\mathbf{R}_4$, $\mathbf{R}_5$, $\mathbf{R}_6$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho c^2 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_\mathrm{s} & \alpha_\mathrm{s} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\rho_\mathrm{s} & c_\mathrm{s}^2/\alpha_\mathrm{s} & u_\mathrm{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_\mathrm{s}^2/c_\mathrm{v} & u_\mathrm{s} \end{pmatrix}$$

в векторном уравнении (7) для двухскоростной модели смеси, соответствующих собственным значениям $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u + c$, $\lambda_4 = u_\mathrm{s} - c_\mathrm{s}$, $\lambda_5 = u_\mathrm{s}$, $\lambda_6 = u_\mathrm{s} + c_\mathrm{s}$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dfrac{c_v\rho_\mathrm{s}^0\left[\left(u-c-u_\mathrm{s}\right)^2-c_\mathrm{s}^2\right]}{c^2c_\mathrm{s}^2} & 1 & \dfrac{c_v\rho_\mathrm{s}^0\left[\left(u+c-u_\mathrm{s}\right)^2-c_\mathrm{s}^2\right]}{c^2c_\mathrm{s}^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{c_v\rho_\mathrm{s}^0\left[\left(u-c-u_\mathrm{s}\right)^2-c_\mathrm{s}^2\right]}{\rho c c_\mathrm{s}^2} & 0 & \dfrac{c_v\rho_\mathrm{s}^0\left[\left(u+c-u_\mathrm{s}\right)^2-c_\mathrm{s}^2\right]}{\rho c c_\mathrm{s}^2} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{c_v\rho_\mathrm{s}^0\left[\left(u-c-u_\mathrm{s}\right)^2-c_\mathrm{s}^2\right]}{c_\mathrm{s}^2} & 0 & \dfrac{c_v\rho_\mathrm{s}^0\left[\left(u+c-u_\mathrm{s}\right)^2-c_\mathrm{s}^2\right]}{c_\mathrm{s}^2} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\alpha_\mathrm{s}c_v}{c_\mathrm{s}^2} & 0 & \dfrac{\alpha_\mathrm{s}c_v}{c_\mathrm{s}^2} & \dfrac{\alpha_\mathrm{s}c_\mathrm{v}}{c_\mathrm{s}^2} & 0 & \dfrac{\alpha_\mathrm{s}c_v}{c_\mathrm{s}^2} \\ \dfrac{c_v\left(u-c-u_\mathrm{s}\right)}{c_\mathrm{s}^2} & 0 & \dfrac{c_v\left(u+c-u_\mathrm{s}\right)}{c_\mathrm{s}^2} & -\dfrac{c_v}{c_\mathrm{s}} & 0 & \dfrac{c_v}{c_\mathrm{s}} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Полидисперсные газопылевые смеси

Система уравнений, описывающая одномерное течение односкоростной газопылевой смеси с n несжимаемыми дисперсными фракциями, имеет вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\rho u}{\partial t} + \frac{\partial(p+\rho u^2)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\varepsilon + \frac{1}{2}u^2\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\rho\left(\varepsilon + \frac{1}{2}u^2\right) + p\right]u\right\} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\alpha_{\mathrm{s}i}}{\partial t} + \frac{\partial\alpha_{\mathrm{s}i}u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\alpha_{\mathrm{s}i}\rho_{\mathrm{s}i}^0 u}{\partial t} + \frac{\partial\alpha_{\mathrm{s}i}\left(p + \rho_{\mathrm{s}i}^0 u^2\right)}{\partial x} = f_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha_{\mathrm{s}i}\rho_{\mathrm{s}i}^0\left(\varepsilon_{\mathrm{s}i} + \frac{1}{2}u^2\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\alpha_{\mathrm{s}i}\left[\rho_{\mathrm{s}i}^0\left(\varepsilon_{\mathrm{s}i} + \frac{1}{2}u^2\right) + p\right]u\right\} = Q_i + f_i u, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где f_i — плотности сил межфракционного взаимодействия, Q_i — интенсивности межкомпонентного теплообмена на единицу объема смеси между несущим газом и i-ой фракцией, $\varepsilon_{si} = c_{vi} T_{si}$ и $\varepsilon = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\alpha_g p}{\gamma - 1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{si} \rho_{si}^0 c_{vi} T_{si}\right)$ — удельные внутренние энергии частиц и смеси в целом; $\alpha_g + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{si} = 1$.

В квазилинейной форме система уравнений (12) перепишется как

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\gamma - 1}{\alpha_g}\sum_{i=1}^{n} Q_i, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \alpha_{si}}{\partial t} + u\frac{\partial \alpha_{si}}{\partial x} + \alpha_{si}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_{si}}{\partial t} + u\frac{\partial T_{si}}{\partial x} + \frac{p}{c_{vi}\rho_{si}^0}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Q_i}{\alpha_{si} c_{vi} \rho_{si}^0}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $c = \sqrt{p\left[1 + \alpha_g(\gamma - 1)\right]/(\alpha_g \rho)}$. Характеристическое уравнение системы (13) имеет только действительные корни: $\lambda_{1,2} = u \pm c$, $\lambda_3 = \ldots = \lambda_{2n+3} = u$. В частности, для смеси газа с двумя дисперсными фракциями правые собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = u$, $\lambda_7 = u + c$, имеют вид

$$\mathbf{R}_1 = \left(\frac{\rho c_{v1}\rho_{s1}^0}{p}, -\frac{c c_{v1}\rho_{s1}^0}{p}, \frac{\rho c^2 c_{v1}\rho_{s1}^0}{p}, \frac{\alpha_1 c_{v1}\rho_{s1}^0}{p}, 1, \frac{\alpha_2 c_{v1}\rho_{s1}^0}{p}, \frac{c_{v1}\rho_{s1}^0}{c_{v2}\rho_{s2}^0}\right)',$$

$$\mathbf{R}_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)', \quad \mathbf{R}_3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)', \quad \mathbf{R}_4 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)',$$

$$\mathbf{R}_5 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)', \quad \mathbf{R}_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)',$$

$$\mathbf{R}_7 = \left(\frac{\rho c_{v2}\rho_{s2}^0}{p}, \frac{c c_{v2}\rho_{s2}^0}{p}, \frac{\rho c^2 c_{v2}\rho_{s2}^0}{p}, \frac{\alpha_1 c_{v2}\rho_{s2}^0}{p}, \frac{c_{v2}\rho_{s2}^0}{c_{v1}\rho_{s1}^0}, \frac{\alpha_2 c_{v2}\rho_{s2}^0}{p}, 1\right)'.$$

Штрихом обозначен оператор транспонирования.

Для модели газопылевой смеси со скоростной неравновесностью с n несжимаемыми дисперсными фракциями система уравнений в квазилинейной форме имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_{si}}{\partial t} + u_{si}\frac{\partial \alpha_{si}}{\partial x} + \alpha_{si}\frac{\partial u_{si}}{\partial x} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u_{si}}{\partial t} + u_{si}\frac{\partial u_{si}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_{si}^0}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{\alpha_{si}\rho_{si}^0}\frac{\partial \alpha_{si}}{\partial x} = \frac{\eta}{\alpha_{si}\rho_{si}^0}\left(u_g - u_{si}\right),$$

$$\frac{\partial T_{si}}{\partial t} + u_{si}\frac{\partial T_{si}}{\partial x} + \frac{p}{c_{vi}\rho_{si}^0}\frac{\partial u_{si}}{\partial x} = \frac{Q_i}{\alpha_{si}\rho_{si}^0 c_{vi}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Характеристическое уравнение системы (14) имеет только действительные корни: $u \pm c$, u, $u_{si} \pm c_{si}$, u_{si}, где $c_{si} = \sqrt{p/\rho_{si}^0}$.

Для смеси газа с двумя дисперсными фракциями правые собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u + c$, $\lambda_4 = u_1 - c_1$, $\lambda_5 = u_1$, $\lambda_6 = u_1 + c_1$, $\lambda_7 = u_2 - c_2$, $\lambda_8 = u_2$, $\lambda_9 = u_2 + c_2$, имеют вид

$$\mathbf{R}_1 = \left(\frac{c_{v1}\rho_{s1}^0 A}{c^2 c_1^2}, -\frac{c_{v1}\rho_{s1}^0 A}{\rho c c_1^2}, \frac{c_{v1}\rho_{s1}^0 A}{c_1^2}, \frac{\alpha_1 c_{v1}}{c_1^2}, \frac{c_{v1}(u - c - u_1)}{c_1^2}, 1, \frac{\alpha_2 c_{v1}\rho_{s1}^0 A}{\rho_{s2}^0 c_1^2 B}, \frac{c_{v1}\rho_{s1}^0 (u - c - u_2) A}{\rho_{s2}^0 c_1^2 B}, \frac{c_{v1}\rho_{s1}^0 c_2^2 A}{c_{v2}\rho_{s2}^0 c_1^2 B} \right)',$$

$$\mathbf{R}_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)',$$

$$\mathbf{R}_3 = \left(\frac{c_{v2}\rho_{s2}^0 B}{c^2 c_2^2}, \frac{c_{v2}\rho_{s2}^0 B}{\rho c c_2^2}, \frac{c_{v2}\rho_{s2}^0 B}{c_2^2}, \frac{\alpha_1 c_{v2}\rho_{s2}^0 B}{\rho_{s1}^0 c_2^2 A}, \frac{c_{v2}\rho_{s2}^0 (u + c - u_1) B}{\rho_{s1}^0 c_2^2 A}, \frac{c_{v2}\rho_{s2}^0 c_1^2 B}{c_{v1}\rho_{s1}^0 c_2^2 A}, \frac{\alpha_2 c_{v2}}{c_2^2}, \frac{c_{v2}(u + c - u_1)}{c_2^2}, 1 \right)',$$

$$\mathbf{R}_4 = \left(0,0,0,\frac{\alpha_1 c_{v1}}{c_1^2}, -\frac{c_{v1}}{c_1}, 1,0,0,0 \right)', \quad \mathbf{R}_5 = (0,0,0,0,0,1,0,0,0)',$$

$$\mathbf{R}_6 = \left(0,0,0,\frac{\alpha_1 c_{v1}}{c_1^2}, \frac{c_{v1}}{c_1}, 1,0,0,0 \right)',$$

$$\mathbf{R}_7 = \left(0,0,0,0,0,0,\frac{\alpha_2 c_{v2}}{c_2^2}, -\frac{c_{v2}}{c_2}, 1 \right)', \quad \mathbf{R}_8 = (0,0,0,0,0,0,0,0,1)',$$

$$\mathbf{R}_9 = \left(0,0,0,0,0,0,\frac{\alpha_2 c_{v2}}{c_2^2}, \frac{c_{v2}}{c_2}, 1 \right)',$$

где $A = (u - c - u_1 - c_1)(u - c - u_1 + c_1)$, $\quad B = (u - c - u_2 - c_2)(u - c - u_2 + c_2)$.

Методика численного счета

При интегрировании систем (1) и (9) использовался метод Годунова [11], расчетные формулы которого для одно- и многоскоростного вариантов моделей с одной пространственной переменной приведены соответственно в работах [12] и [13]. В настоящем случае рассмотрим методику расчета на неподвижной двумерной криволинейной сетке (см. рис. 2).

Для односкоростной модели смеси система уравнений в декартовой координатной системе может быть переписана следующим образом:

$$\partial \mathbf{V}/\partial t + \partial \mathbf{F}/\partial x + \partial \mathbf{G}/\partial y = \mathbf{S}, \tag{15}$$

где

$$\mathbf{V} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho e, \alpha_s, \alpha_s u, \alpha_s v, \alpha_s e_s)',$$

$$\mathbf{F} = \left[\rho u, p + \rho u^2, \rho u v, \rho u (e + p/\rho), \alpha_s u, \alpha_s (u^2 + p/\rho_s^0), \alpha_s u v, \alpha_s u (e_s + p/\rho_s^0) \right]',$$

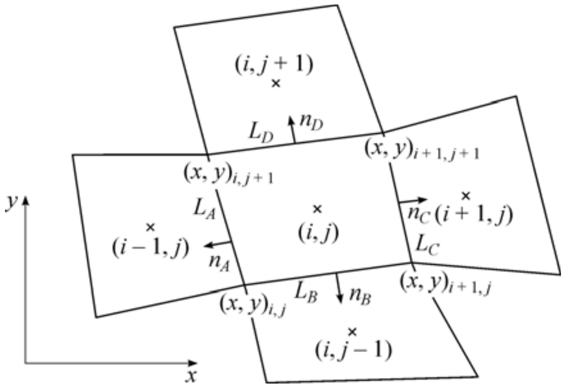

Рис. 2. Фрагмент криволинейной сетки.

$$\mathbf{G}=\left[\rho v,\rho uv,p+\rho v^2,\rho v\left(e+p/\rho\right),\alpha_\mathrm{s}v,\alpha_\mathrm{s}uv,\alpha_\mathrm{s}\left(v^2+p/\rho_\mathrm{s}^0\right),\alpha_\mathrm{s}v\left(e_\mathrm{s}+p/\rho_\mathrm{s}^0\right)\right]',$$

$$\mathbf{S}=1/\rho_\mathrm{s}^0\left(0,0,0,0,0,f_x,f_y,Q+f_xu+f_yv\right)',$$

где $e_\mathrm{s}=c_\mathrm{v}T_\mathrm{s}+\left(1/2\right)\left(u^2+v^2\right)$.

В случае использования модели со скоростной неравновесностью соответствующие векторы $\mathbf{V},\mathbf{F},\mathbf{G}$ и $\mathbf{S}$ в уравнении (15) имеют вид

$$\mathbf{V}=\left(\rho,\rho u,\rho v,\alpha_\mathrm{s},\alpha_\mathrm{s}u_\mathrm{s},\alpha_\mathrm{s}v_\mathrm{s},\alpha_\mathrm{s}e_\mathrm{s}\right)',$$

$$\mathbf{F}=\left[\rho u,p+\rho u^2,\rho uv,\alpha_\mathrm{s}u_\mathrm{s},\alpha_\mathrm{s}\left(u_\mathrm{s}^2+p/\rho_\mathrm{s}^0\right),\alpha_\mathrm{s}u_\mathrm{s}v_\mathrm{s},\alpha_\mathrm{s}u_\mathrm{s}\left(e_\mathrm{s}+p/\rho_\mathrm{s}^0\right)\right]',$$

$$\mathbf{G}=\left[\rho v,\rho uv,p+\rho v^2,\alpha_\mathrm{s}v_\mathrm{s},\alpha_\mathrm{s}u_\mathrm{s}v_\mathrm{s},\alpha_\mathrm{s}\left(v_\mathrm{s}^2+p/\rho_\mathrm{s}^0\right),\alpha_\mathrm{s}v_\mathrm{s}\left(e_\mathrm{s}+p/\rho_\mathrm{s}^0\right)\right]',$$

$$\mathbf{S}=\frac{1}{\rho_\mathrm{s}^0}\left[0,0,0,0,\eta\left(u_\mathrm{g}-u_\mathrm{s}\right),\eta\left(v_\mathrm{g}-v_\mathrm{s}\right),Q+\eta\left(u_\mathrm{g}-u_\mathrm{s}\right)u_\mathrm{s}+\eta\left(v_\mathrm{g}-v_\mathrm{s}\right)v_\mathrm{s}\right]',$$

где $e_\mathrm{s}=c_\mathrm{v}T_\mathrm{s}+\frac{1}{2}\left(u_\mathrm{s}^2+v_\mathrm{s}^2\right)$. В многоскоростной модели наряду с (15) используется уравнение недивергентного вида

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}-c^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)=0. \qquad (16)$$

Применяя к имеющим дивергентную форму уравнениям (15) методику перехода от дифференциальных соотношений к конечноразностным (см. [11]), получим следующие выражения для (i,j) ячейки, связывающие искомые параметры на новом временном слое $t+\Delta t$ (с индексами вверху) с соответствующими значениями на предыдущем слое t (с индексами внизу):

$$\mathbf{V}^{ij}=\mathbf{V}_{ij}-\left[\mathbf{\Phi}_{i-1/2\,j}+\mathbf{\Phi}_{i+1/2\,j}+\mathbf{\Phi}_{i\,j-1/2}+\mathbf{\Phi}_{i\,j+1/2}\right]\frac{\Delta t}{S}+\mathbf{S}_{ij}\Delta t, \qquad (17)$$

где для односкоростной модели

$$\Phi = \Bigg[LRN,\ L(\sigma P + RNU),\ L(\tau P + RNV),\ A_\mathrm{s} L N_\mathrm{s},\ A_\mathrm{s} L\left(N_\mathrm{s} U_\mathrm{s} + \frac{\sigma P}{\rho_\mathrm{s}^0}\right),$$

$$A_\mathrm{s} L\left(N_\mathrm{s} V_\mathrm{s} + \frac{\tau P}{\rho_\mathrm{s}^0}\right),\ A_\mathrm{s} L N_\mathrm{s}\left(E_\mathrm{s} + \frac{P}{\rho_\mathrm{s}^0}\right)\Bigg]',$$

и для многоскоростной

$$\Phi = \Bigg[LRN,\ L(\sigma P + RNU),\ L(\tau P + RNV),\ A_\mathrm{s} L N_\mathrm{s},\ A_\mathrm{s} L\left(N_\mathrm{s} U_\mathrm{s} + \frac{\sigma P}{\rho_\mathrm{s}^0}\right),\ A_\mathrm{s} L\left(N_\mathrm{s} V_\mathrm{s} + \frac{\tau P}{\rho_\mathrm{s}^0}\right),$$

$A_\mathrm{s} L N_\mathrm{s}\left(E_\mathrm{s} + \dfrac{P}{\rho_\mathrm{s}^0}\right)\Bigg]'$. В приведенных соотношениях $L_{i-1/2\,j} = \sqrt{\left(x_{i\,j} - x_{i\,j+1}\right)^2 + \left(y_{i\,j} - y_{i\,j+1}\right)^2}$, $L_{i\,j-1/2} = \sqrt{\left(x_{ij} - x_{i+1\,j}\right)^2 + \left(y_{i\,j} - y_{i+1\,j}\right)^2}$, …— длины граней ячейки, $\sigma_{i-1/2\,j} = (y_{ij} - y_{ij+1})/L_{i-1/2\,j}$, $\tau_{i-1/2\,j} = -(x_{i\,j} - x_{i\,j+1})/L_{i-1/2\,j}$, $\sigma_{i\,j-1/2} = (y_{i+1\,j} - y_{i\,j})/L_{i\,j-1/2}$, $\tau_{i\,j-1/2} = -(x_{i+1\,j} - x_{i\,j})/L_{i\,j-1/2}$, … — компоненты единичных векторов $\boldsymbol{n}$ к соответствующим граням ячейки, $S_{i\,j} = \frac{1}{2}\Big[\left(x_{i+1\,j+1} - x_{i\,j}\right)\left(y_{i\,j+1} - y_{i+1\,j}\right) - \left(x_{i\,j+1} - x_{i\,j}\right)\left(y_{i+1\,j+1} - y_{i\,j}\right)\Big]$ — площадь ячейки, $N_{i-1/2\,j}$, $\left(N_\mathrm{s}\right)_{i-1/2\,j}$, $N_{i\,j-1/2}$, $\left(N_\mathrm{s}\right)_{i\,j-1/2}$, … — нормальные составляющие скоростей на сторонах ячейки, $K_{i-1/2\,j}$, $\left(K_\mathrm{s}\right)_{i-1/2\,j}$, $K_{i\,j-1/2}$, $\left(K_\mathrm{s}\right)_{i\,j-1/2}$ … — касательные составляющие скоростей, $U_{i-1/2\,j} = \left(\sigma N + \tau K\right)_{i-1/2\,j}$, $\left(U_\mathrm{s}\right)_{i-1/2\,j} = \left(\sigma N_\mathrm{s} + \tau K_\mathrm{s}\right)_{i-1/2\,j}$, $V_{i-1/2\,j} = \left(\tau N - \sigma K\right)_{i-1/2\,j}$, $\left(V_\mathrm{s}\right)_{i-1/2\,j} = \left(\tau N_\mathrm{s} - \sigma K_\mathrm{s}\right)_{i-1/2\,j}$, … — проекции скоростей на координатные оси x и y на сторонах ячейки (рис. 2).

Используемые в выражении (17) обозначения соответствуют принятым в работе [11]. Узлы конечно-разностной сетки имеют целые индексы, а середины сторон ячейки — полуцелые. «Большие» величины, входящие в выражения (17) (P — давление; U, V, U_s, V_s — скорости, R — плотность смеси, A_s — объемная доля, E_s — удельная полная энергия) и относящиеся к граням смежных ячеек, определяются из решения соответствующих задач Римана, один из алгоритмов которого будут приведен ниже.

В случае многоскоростной модели смеси для вычисления оставшейся неизвестной переменной p на новом временном слое запишем уравнение (16) в конечно-разностном виде как

$$\frac{p^{i\,j} - p_{i\,j}}{\Delta t} + u_{i\,j}\frac{P_{i+1/2\,j} - P_{i-1/2\,j}}{\Delta x} + v_{i\,j}\frac{P_{i\,j+1/2} - P_{i\,j-1/2}}{\Delta y} -$$

$$-c_{i\,j}^2\left(\frac{\rho^{i\,j} - \rho_{i\,j}}{\Delta t} + u_{i\,j}\frac{R_{i+1/2\,j} - R_{i-1/2\,j}}{\Delta x} + v_{i\,j}\frac{R_{i\,j+1/2} - R_{i\,j-1/2}}{\Delta y}\right) = 0. \tag{18}$$

Нахождением давления $p^{i\,j}$ из полученного выражения завершается вычислительный цикл.

Другой способ определения давления с использованием противопоточной схемы записывается в виде выражения

$$\frac{p^{ij}-p_{ij}}{\Delta t}+u_{ij}^{-}\frac{p_{i+1j}-p_{ij}}{\Delta x}+u_{ij}^{+}\frac{p_{ij}-p_{i-1j}}{\Delta x}+v_{ij}^{-}\frac{p_{ij+1}-p_{ij}}{\Delta y}+v_{ij}^{+}\frac{p_{ij}-p_{ij-1}}{\Delta y}-$$

$$-c_{ij}^{2}\left(\frac{\rho^{ij}-\rho_{ij}}{\Delta t}+u_{ij}^{-}\frac{\rho_{i+1j}-\rho_{ij}}{\Delta x}+u_{ij}^{+}\frac{\rho_{ij}-\rho_{i-1j}}{\Delta x}+v_{ij}^{-}\frac{\rho_{ij+1}-\rho_{ij}}{\Delta y}+v_{ij}^{+}\frac{\rho_{ij}-\rho_{ij-1}}{\Delta y}\right)=0, \quad (19)$$

где

$$u_{ij}^{\pm}=\frac{1}{2}\left(u_{ij}\pm\left|u_{ij}\right|\right),\quad v_{ij}^{\pm}=\frac{1}{2}\left(v_{ij}\pm\left|v_{ij}\right|\right).$$

Ранее подобный подход показал свою эффективность в одномерных расчетах [12]. Отметим, что вычисленные значения давления из соотношений (18) и (19) совпадают.

Алгоритм приближенного решения задачи Римана

Для вычисления потоков массы, импульса и энергии, перетекающих через грани смежных ячеек, решаются одномерные задачи распада произвольного разрыва, параметры которых соответствуют значениям в этих смежных ячейках.

Точные решатели задачи Римана для одно- и многоскоростного вариантов модели смеси в адиабатическом приближении, требующие значительных временных затрат, описывались в работах [13] и [14]. Рассмотрим теперь линеаризованный римановский решатель для расчета задачи распада произвольного разрыва в одномерном случае.

Формула для решателя, по которой вычисляются параметры смеси на контактной границе ($\mathbf{U}_{(L+R)/2}$) по известным значениям слева ($\mathbf{U}_L$) от контактной границы и справа ($\mathbf{U}_R$) от нее, имеет вид

$$\mathbf{U}_{(L+R)/2}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{U}_L+\mathbf{U}_R\right)-\frac{1}{2}\sum_k a_k\,\mathrm{sign}(\lambda_k)\,\mathbf{X}_k, \quad (20)$$

где для односкоростной модели

$$\mathbf{U}_{(L+R)/2}=\left(R,U,P,A_{\mathrm{s}},T_{\mathrm{s}}\right)'_{(L+R)/2},\ \mathbf{U}_L=\left(\rho,u,p,\alpha_{\mathrm{s}},T_{\mathrm{s}}\right)'_L,\ \ \mathbf{U}_R=\left(\rho,u,p,\alpha_{\mathrm{s}},T_{\mathrm{s}}\right)'_R$$

и для многоскоростной

$$\mathbf{U}_{(L+R)/2}=\left(R,U,P,A_{\mathrm{s}},U_{\mathrm{s}},T_{\mathrm{s}}\right)'_{(L+R)/2},\ \ \mathbf{U}_L=\left(\rho,u,p,\alpha_{\mathrm{s}},u_{\mathrm{s}},T_{\mathrm{s}}\right)'_L,\ \mathbf{U}_R=\left(\rho,u,p,\alpha_{\mathrm{s}},u_{\mathrm{s}},T_{\mathrm{s}}\right)'_R.$$

Правые собственные векторы $\mathbf{X}_k$ для одно- и многоскоростной моделей определяются в соответствии с данными, полученными из (8) и (11). Значения констант a_k в выражении (20) находятся из системы линейных уравнений $\sum_i a_i\mathbf{X}_i=\Delta\mathbf{U}$, где $\Delta\mathbf{U}=\mathbf{U}_R-\mathbf{U}_L$.

Для бинарной смеси в односкоростном приближении имеем

$$a_1=(1/2)\left(\Delta p-\rho c\Delta u\right),\quad a_2=\Delta\rho-\Delta p/c^2,\quad a_3=\Delta\alpha_{\mathrm{s}}-\alpha_{\mathrm{s}}\Delta p/(\rho c^2),$$
$$a_4=\Delta T_{\mathrm{s}}-p\Delta p/(\rho c^2 c_{\mathrm{v}}\rho_{\mathrm{s}}^0),\ \ a_5=(1/2)\left(\Delta p+\rho c\Delta u\right)$$

и для двухскоростной модели

$$a_1=\frac{c_{\mathrm{s}}^2\left(\Delta p-\rho c\Delta u\right)}{2c_{\mathrm{v}}\rho_{\mathrm{s}}^0\left[\left(u-c-u_{\mathrm{s}}\right)^2-c_{\mathrm{s}}^2\right]},\quad a_2=\Delta\rho-\frac{\Delta p}{c^2},\quad a_3=\frac{c_{\mathrm{s}}^2\left(\Delta p+\rho c\Delta u\right)}{2c_{\mathrm{v}}\rho_{\mathrm{s}}^0\left[\left(u+c-u_{\mathrm{s}}\right)^2-c_{\mathrm{s}}^2\right]},$$

$$a_4 = \frac{c_\mathrm{s}^2}{2c_\mathrm{v}}\left\{\frac{\Delta\alpha_\mathrm{s}}{\alpha_\mathrm{s}} - \frac{\Delta u_\mathrm{s}}{c_\mathrm{s}} + \frac{(u-u_\mathrm{s}+c_\mathrm{s})\Delta p - \rho c^2 \Delta u}{c_\mathrm{s}\rho_\mathrm{s}^0\left[(u-u_\mathrm{s}+c_\mathrm{s})^2 - c^2\right]}\right\},$$

$$a_6 = \frac{c_\mathrm{s}^2}{2c_\mathrm{v}}\left\{\frac{\Delta\alpha_\mathrm{s}}{\alpha_\mathrm{s}} + \frac{\Delta u_\mathrm{s}}{c_\mathrm{s}} - \frac{(u-u_\mathrm{s}-c_\mathrm{s})\Delta p - \rho c^2 \Delta u}{c_\mathrm{s}\rho_\mathrm{s}^0\left[(u-u_\mathrm{s}-c_\mathrm{s})^2 - c^2\right]}\right\},$$

$$a_5 = \Delta T_\mathrm{s} - a_1 - a_3 - a_4 - a_6.$$

«Большие» величины на общей грани между ячейками (i, j) и (i+1, j) рассчитывались для односкоростной модели из соотношений

$$\left(R, U, P, A_\mathrm{s}, T_\mathrm{s}\right)_{i+1/2\,j} = \begin{cases} (\rho, u, p, \alpha_\mathrm{s}, T_\mathrm{s})_{i\,j}, & \text{если} \quad (u-c)_{i+1/2\,j} > 0 \\ (\rho, u, p, \alpha_\mathrm{s}, T_\mathrm{s})_{i+1\,j}, & \text{если} \quad (u+c)_{i+1/2\,j} < 0 \\ (\rho, u, p, \alpha_\mathrm{s}, T_\mathrm{s})_{i+1/2\,j}, & \text{если} \quad (u-c)_{i+1/2\,j} \le 0,\ (u+c)_{i+1/2\,j} \ge 0 \end{cases}$$

и для многоскоростной модели

$$\left(R, U, P, A_\mathrm{s}, U_\mathrm{s}, T_\mathrm{s}\right)_{i+1/2\,j} = \begin{cases} (\rho, u, p, \alpha_\mathrm{s}, u_\mathrm{s}, T_\mathrm{s})_{ij}, & \text{если}\ (u-c)_{i+1/2\,j} > 0 \\ (\rho, u, p, \alpha_\mathrm{s}, u_\mathrm{s}, T_\mathrm{s})_{i+1\,j}, & \text{если}\ (u+c)_{i+1/2\,j} < 0 \\ (\rho, u, p, \alpha_\mathrm{s}, u_\mathrm{s}, T_\mathrm{s})_{i+1/2\,j}, & \text{если}\ (u-c)_{i+1/2\,j} \le 0, (u+c)_{i+1/2\,j} \ge 0. \end{cases}$$

На остальных гранях рассматриваемой ячейки потоковые переменные определяются по аналогичным формулам.

Результаты численного моделирования

В качестве примера рассмотрим установившееся течение бинарной смеси идеального газа с показателем адиабаты γ и второй несжимаемой составляющей с плотностью ρ_s^0 около внешнего тупого угла (задача Прандтля–Майера, рис. 3), которое в односкоростном приближении описывается уравнениями

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0,\quad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,\quad u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + \rho c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\gamma - 1}{1-\alpha_\mathrm{s}}Q, \tag{21}$$

$$u\frac{\partial \alpha_\mathrm{s}}{\partial x} + v\frac{\partial \alpha_\mathrm{s}}{\partial y} + \alpha_\mathrm{s}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0,\quad u\frac{\partial T_\mathrm{s}}{\partial x} + v\frac{\partial T_\mathrm{s}}{\partial y} + \frac{p}{c_\mathrm{v}\rho_\mathrm{s}^0}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{Q}{\alpha_\mathrm{s} c_\mathrm{v}\rho_\mathrm{s}^0}.$$

Интенсивность межкомпонентного теплообмена на единицу объема смеси Q рассчитывалась из соотношения [15]

$$Q = \frac{12\alpha_\mathrm{s}\mu_\mathrm{g} C_{p\mathrm{g}}\left(T_\mathrm{s} - T_\mathrm{g}\right)}{d^2\,\mathrm{Pr}}, \tag{22}$$

где $\mathrm{Pr} = c_p\mu_\mathrm{g}/\lambda_\mathrm{g}$, d — диаметр частиц. При Q = 0 задача является автомодельной. При введении переменной $\xi = y/x$ [16] система уравнений в частных

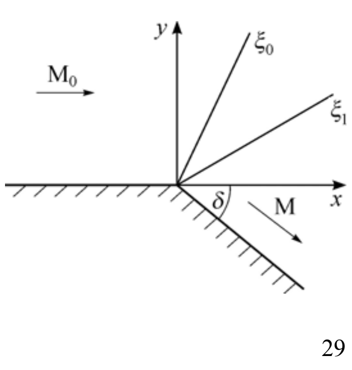

Рис. 3. Течение Прандтля–Майера.

производных (21) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\rho}{d\xi} = -\frac{\rho\left[u\left(v-u\xi\right)+c^2\xi\right]}{\left(v-u\xi\right)^2+\left(c^2(1+\xi^2)/2\right)\left(\alpha_{\text{s}}/(1-\alpha_{\text{s}})+\rho c^2/p-1\right)} \equiv \Omega,$$

$$\frac{dp}{d\xi} = c^2\Omega, \quad \frac{du}{d\xi} = \frac{(v-u\xi)\xi}{\rho\left(1+\xi^2\right)}\Omega, \quad \frac{dv}{d\xi} = -\frac{(v-u\xi)}{\rho\left(1+\xi^2\right)}\Omega, \tag{23}$$

$$\frac{d\alpha_{\text{s}}}{d\xi} = \frac{\alpha_{\text{s}}}{\rho}\Omega, \quad \frac{dT_{\text{s}}}{d\xi} = \frac{p}{\rho c_{\text{v}}\rho_{\text{s}}^0}\Omega.$$

При наличии скоростной неравновесности установившееся течение газопылевой смеси около внешнего тупого угла описывается системой

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}=0, \quad u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0, \quad u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0,$$

$$u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+\rho c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0, \quad u_{\text{s}}\frac{\partial \alpha_{\text{s}}}{\partial x}+v_{\text{s}}\frac{\partial \alpha_{\text{s}}}{\partial y}+\alpha_{\text{s}}\left(\frac{\partial u_{\text{s}}}{\partial x}+\frac{\partial v_{\text{s}}}{\partial y}\right)=0,$$

$$u_{\text{s}}\frac{\partial u_{\text{s}}}{\partial x}+v_{\text{s}}\frac{\partial u_{\text{s}}}{\partial y}+\frac{1}{\rho_{\text{s}}^0}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{p}{\alpha_{\text{s}}\rho_{\text{s}}^0}\frac{\partial \alpha_{\text{s}}}{\partial x}=\frac{\eta}{\alpha_{\text{s}}\rho_{\text{s}}^0}\left(u_{\text{g}}-u_{\text{s}}\right), \tag{24}$$

$$u_{\text{s}}\frac{\partial v_{\text{s}}}{\partial x}+v_{\text{s}}\frac{\partial v_{\text{s}}}{\partial y}+\frac{1}{\rho_{\text{s}}^0}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{p}{\alpha_{\text{s}}\rho_{\text{s}}^0}\frac{\partial \alpha_{\text{s}}}{\partial y}=\frac{\eta}{\alpha_{\text{s}}\rho_{\text{s}}^0}\left(v_{\text{g}}-v_{\text{s}}\right),$$

$$u_{\text{s}}\frac{\partial T_{\text{s}}}{\partial x}+v_{\text{s}}\frac{\partial T_{\text{s}}}{\partial y}+\frac{p}{c_{\text{v}}\rho_{\text{s}}^0}\left(\frac{\partial u_{\text{s}}}{\partial x}+\frac{\partial v_{\text{s}}}{\partial y}\right)=\frac{Q}{\alpha_{\text{s}}c_{\text{v}}\rho_{\text{s}}^0}.$$

Коэффициент сопротивления η рассчитывался из выражения (см. [15])

$$\eta = 3\alpha_{\text{g}}\rho_{\text{g}}^0\big/(4d)\left|\mathbf{u}_{\text{g}}-\mathbf{u}_{\text{s}}\right|C_D, \tag{25}$$

где

$$C_D = \begin{cases} \dfrac{24\left(1+0{,}1\text{Re}^{0{,}75}\right)}{\text{Re}}, & \text{при} \quad \text{Re}<1000, \\ 0{,}45, & \text{при} \quad \text{Re}\geq 1000, \end{cases}$$

здесь

$$\text{Re} = \alpha_{\text{g}}^{2{,}5}\rho_{\text{g}}^0 d\big/\mu_{\text{g}}\left|\mathbf{u}_{\text{g}}-\mathbf{u}_{\text{s}}\right|.$$

Вязкость воздуха определялась по формуле Сазерленда

$$\mu_{\text{g}} = \mu_0\frac{T_{\text{g0}}+C}{T_{\text{g}}+C}\left(\frac{T_{\text{g}}}{T_{\text{g0}}}\right)^{3/2},$$

где C = 120^0 K, μ_0 = 18,27 мкПа с, T_{g0} = 291^0 K. Температура газа вычислялась из термического уравнения состояния воздуха $p=\rho_{\text{g}}^0 R_{\text{g}}T_{\text{g}}$ (R_{g} — газовая постоянная).

Интенсивность межкомпонентного теплообмена на единицу объема смеси Q рассчитывалась из соотношения (см. [15])

$$Q = 6\alpha_{\text{s}}\mu_{\text{g}}C_{p\text{g}}\text{Nu}\left(T_{\text{s}}-T_{\text{g}}\right)\Big/\left(d^2\,\text{Pr}\right), \tag{26}$$

где $\text{Nu}=2+0{,}6\,\text{Re}^{1/2}\,\text{Pr}^{1/3}$.

Система уравнений в частных производных (24) при $Q = 0$ и $\eta = 0$ приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, методика их вывода аналогична приведенной в работе [17]

$$\frac{dp}{d\xi} = -\frac{\rho(v-\xi u)\left(u+\dfrac{\xi c^2}{v-\xi u}\right)}{\left(1+\xi^2\right)\left\{1+\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\alpha_\mathrm{s}\rho c^2\left(1+\xi^2\right)}{\left(1-\alpha_\mathrm{s}\right)\left[\rho_\mathrm{s}^0\left(v_\mathrm{s}-\xi u_\mathrm{s}\right)^2-p\left(1+\xi^2\right)\right]}+\dfrac{\rho c^2}{p}-1\right]\right\}} \equiv \Omega,$$

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{\xi\Omega}{\rho(v-\xi u)}, \quad \frac{dv}{d\xi} = -\frac{\Omega}{\rho(v-\xi u)}, \quad \frac{d\rho}{d\xi} = \frac{\left(1+\xi^2\right)\Omega}{\left(v-\xi u\right)^2}, \tag{27}$$

$$\frac{du_\mathrm{s}}{d\xi} = \frac{\xi\left(v_\mathrm{s}-\xi u_\mathrm{s}\right)\Omega}{\rho_\mathrm{s}^0\left(v_\mathrm{s}-\xi u_\mathrm{s}\right)^2-p\left(1+\xi^2\right)}, \quad \frac{dv_\mathrm{s}}{d\xi} = -\frac{\left(v_\mathrm{s}-\xi u_\mathrm{s}\right)\Omega}{\rho_\mathrm{s}^0\left(v_\mathrm{s}-\xi u_\mathrm{s}\right)^2-p\left(1+\xi^2\right)},$$

$$\frac{d\alpha_\mathrm{s}}{d\xi} = \frac{\alpha_\mathrm{s}\left(1+\xi^2\right)\Omega}{\rho_\mathrm{s}^0\left(v_\mathrm{s}-\xi u_\mathrm{s}\right)^2-p\left(1+\xi^2\right)}, \quad \frac{dT_\mathrm{s}}{d\xi} = \frac{p\left(1+\xi^2\right)\Omega}{c_\mathrm{v}\rho_\mathrm{s}^0\left[\rho_\mathrm{s}^0\left(v_\mathrm{s}-\xi u_\mathrm{s}\right)^2-p\left(1+\xi^2\right)\right]}.$$

Системы (23) и (27) интегрировались от $\xi_0 = 1\big/\sqrt{\mathrm{M}_0^2-1}$ до ξ_1, где поток направлен под углом $\delta = \mathrm{arctg}\left(|v|/u\right)$ к оси x (рис. 3). Здесь $\mathrm{M}_0 = u_0/c_0$ — число Маха в невозмущенном потоке. На рис. 4 приведены результаты вычислений зависимостей $p/p_0(\delta)$ при следующих исходных данных для систем (23) и (27): $\mathrm{M}_0 = u_0/c_0 = 2$, $p_0 = 0{,}1$ МПа, $\alpha_{\mathrm{g}0} = 0{,}99$ ($\gamma_\mathrm{g} = 1{,}4$, $c_{\mathrm{g}*} = 0$, $\rho_{\mathrm{g}*}^0 = 1{,}19$ кг/м^3, $\rho_\mathrm{s}^0 = 1000$ кг/м^3). Как видно из рисунка, решения системы (27), в отличии от соответствующих решений (23), ограничены некоторым предельным значением δ_*, что связано с особенностью системы (27), которая выражается в обращении в нуль знаменателя в уравнениях для несжимаемой фракции. На рис. 4 отмечены также относительные давления (*3*), полученные при интегрировании системы (21) описанным выше методом Годунова по достижении режима установившегося течения. При этом начальные данные во всей расчетной области задавались следующим образом: $p = p_0$, $u = c_0\mathrm{M}_0$, $v = 0$, $\alpha_\mathrm{g} = \alpha_{\mathrm{g}0}$. Типичные распределения давления при $\mathrm{M}_0 = 1{,}8$, $p_0 = 0{,}1$ МПа, $\alpha_{\mathrm{g}0} = 0{,}99$, $\delta = -5°$, $Q = 0$ для водно-воздушной смеси приведены на рис. 5.

В случае, когда $Q \neq 0$, задача становится неавтомодельной и ее решение возможно получить лишь численным интегрированием системы (21). Отметим, что полученные в результате расчета распределения давления и плотности в области течения смеси близки к данным для автомодельного варианта, различие наблюдаются в значениях температуры и объемной доли дисперсной фракции.

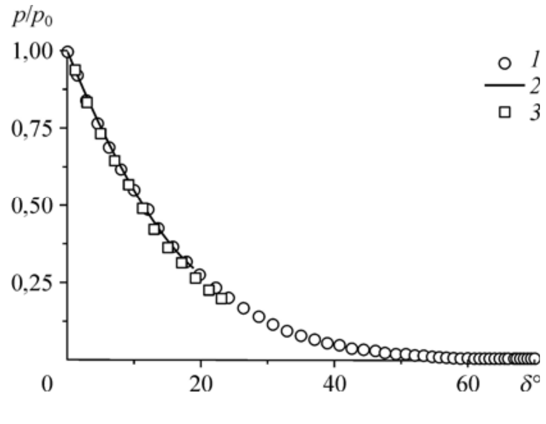

Рис. 4. Зависимости $p/p_0(\delta)$ для течения Прандтля–Майера при $\alpha_{\mathrm{g}0} = 0{,}99$.

1, *2* — данные по одно- и многоскоростной моделям смеси соответственно, *3* — результаты численного интегрирования системы (21).

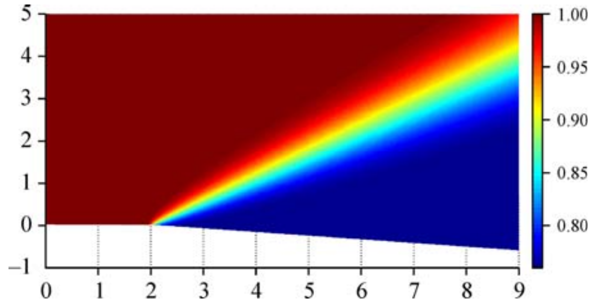

Рис. 5. Распределение давления для течения Прандтля–Майера при $Q = 0$.

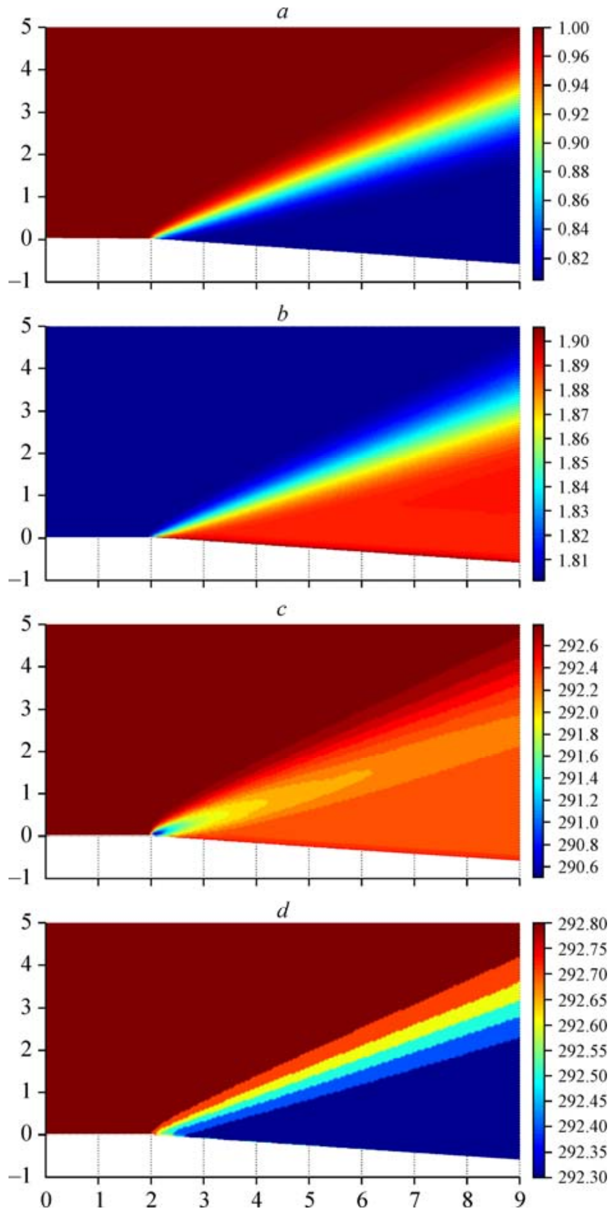

Рис. 6. Распределение относительного давления p/p_0 (*a*), чисел Маха (*b*), температуры газа (*c*) и температуры дисперсной фракции (*d*) при учете межфракционного теплообмена для течения Прандтля–Майера.

На рис. 6 представлены распределения относительного давления (*a*), чисел Маха (*b*), температуры газа (*c*) и температуры дисперсной фракции (*d*) при учете межфракционного теплообмена (*в*) для задачи Прандтля–Майера при $M_0 = 1{,}8$, $p_0 = 0{,}1$ МПа, $\alpha_{g0} = 0{,}99$, $\rho_{g0}^0 = 1{,}19$ кг/м^3, $\delta = -5°$ при течении воздушно-водной смеси, полученные в расчете на сетке из 200×100 ячеек для односкоростной модели. Число Прандтля полагалось равным 0,71, $C_{pg} = 1007$ дж$\big/\left(\text{c}^2\cdot\text{K}\right)$, диаметр частиц $d = 10$ мкм, плотность дисперсной фракции $\rho_s^0 = 1000$ кг/м^3, $c_v = 4{,}2\ 10^3$ м$^2\big/\left(\text{c}^2\cdot\text{K}\right)$.

В качестве следующей задачи рассматривается взаимодействие плоской воздушной ударной волны (УВ), которая распространяется по невозмущенному воздуху ($\gamma = 1{,}4$, $\rho_0 = 1{,}29$ кг/м^3, $p_0 = 0{,}1$ МПа), с неподвижным газопылевым слоем ($u = v = 0$, $p = p_0$), начальное расположение которого приведено на рис. 7*a*. Давление, скорость и плотность воздуха за фронтом УВ рассчитывались из соотношений

$$p_{\text{sh}} = \frac{p_0}{\gamma+1}\left[\left(2\text{M}^2-1\right)\gamma+1\right],\quad u_{\text{sh}} = \frac{2c_0}{\gamma+1}\left(\text{M}-\frac{1}{\text{M}}\right),\quad \rho_{\text{sh}} = \frac{\rho_0\left(\gamma+1\right)}{\gamma-1+2/\text{M}^2},$$

где c_0 и $\text{M} = D/c_0$ соответственно скорость звука в невозмущенном газе и число Маха, D — скорость перемещения фронта УВ.

С целью визуализации газопылевого слоя использовался метод маркеров [18], для этого в область, занятую дисперсной средой, помещались невесомые маркеры, которые перемещались с локальной скоростью смеси и в процессе вычислений не учитывались, а использовались лишь для целей визуализации деформации газопылевого слоя.

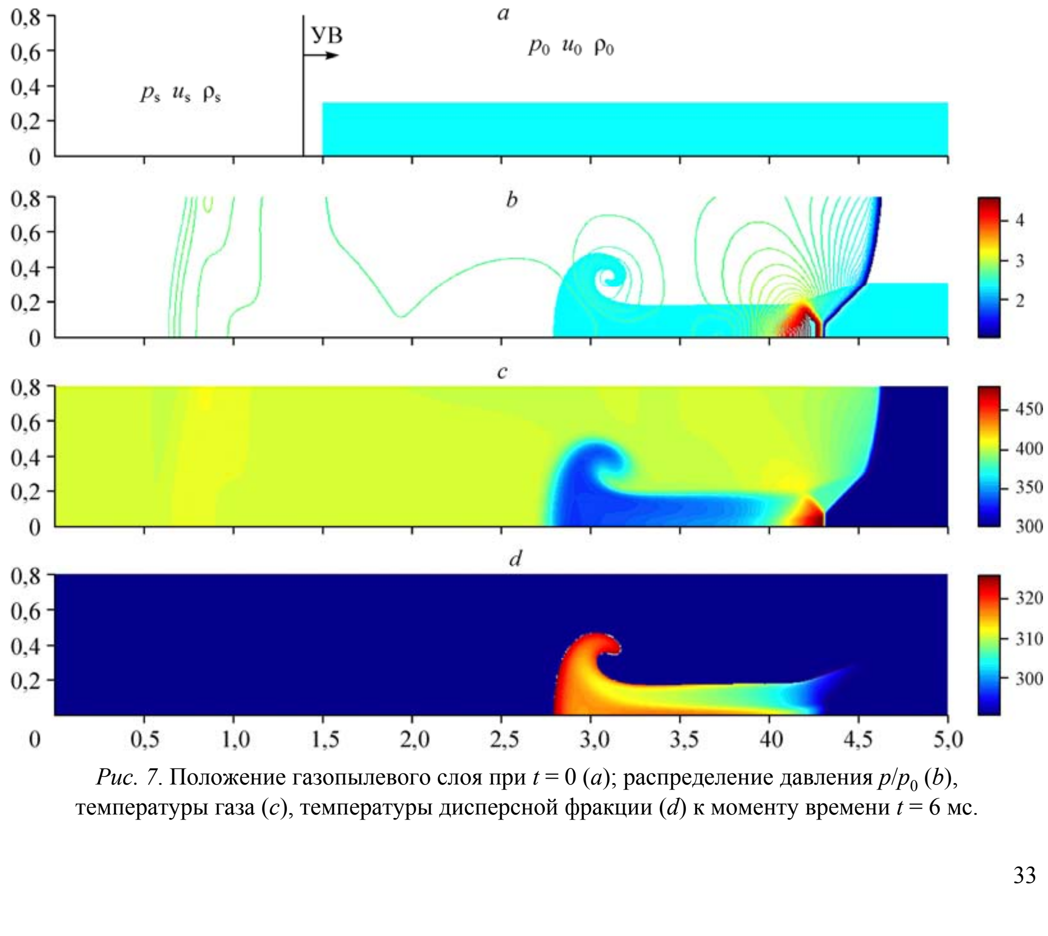

Рис. 7. Положение газопылевого слоя при $t = 0$ (*a*); распределение давления p/p_0 (*b*), температуры газа (*c*), температуры дисперсной фракции (*d*) к моменту времени $t = 6$ мс.

На рис. 7*b*–7*d* представлены форма деформированного слоя водно-воздушной смеси (ρ_s = 1000 кг/м^3, d = 25 мкм, c_v = 4200 м^2/(с^2·K), $\alpha_s = 10^{-3}$), распределения давления, температуры газа и температуры дисперсной фракции для УВ с числом Маха 1,6, полученные в рамках односкоростной модели к моменту времени t = 6 мс описанным выше методом Годунова. Вычисления проводились на сетке из 1000×160 ячеек.

Как видно из рис. 7*b*, по мере продвижения УВ вдоль слоя наблюдается сжатие слоя пыли. Преломленная в слое УВ отражается от преграды в маховском режиме. Максимальные значения температуры газа наблюдаются вблизи ножки Маха, что ведет к более интенсивному прогреву капель воды вблизи преграды (рис. 7*d*). Отметим, что если рассматривать запыленный слой с более мелкими каплями воды (d = 5 мкм), то в этом случае при прочих равных условиях режим отражения меняется с маховского на регулярный. В работе [19] смена режимов отражения преломленной УВ связывалась с изменением толщины газопылевого слоя.

Список литературы

1. **Kim S.W., Chang K.S.** Reflection of shock waves from a compression corner in a particle-laden gas region // Shock Waves. 1991. Vol. 1, Iss. 1. P. 65–73.
2. **Saito T.** Numerical analysis of dusty-gas flows // J. Comp. Physics. 2002. Vol. 176, Iss. 1. P. 129–144.
3. **Нигматулин Р.И.** Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука. 1987. 464 с.
4. **Суров В.С.** Односкоростная модель гетерогенной среды с гиперболичным адиабатическим ядром // Журн. вычисл. математ. и матем. физики. 2008. Т. 48, № 6. С. 1111–1125.
5. **Суров В.С.** Гиперболические модели в механике гетерогенных сред // Журн. вычисл. математ. и матем. физики. 2014. Т. 54, № 1. С. 139–149.
6. **Уоллис Г**. Одномерные двухфазные течения. М.: Мир, 1972. 436 с.
7. **Суров В.С.** Об одном варианте метода характеристик для расчета течений односкоростной многокомпонентной смеси // Инж.-физ. журнал. 2010. Т. 83, № 2. С. 345–350.
8. **Суров В.С.** Об одном способе приближенного решения задачи Римана для односкоростной многокомпонентной смеси // Инж.-физ. журнал. 2010. Т. 83, № 2. С. 351–356.
9. **Toro E.F.** Riemann solvers with evolved initial condition // Int. J. for Numerical Methods in Fluids. 2006. Vol. 52. P. 433–453.
10. **Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.** Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. Изд. 2-е, дополн. и исправл. М.: Физматлит, 2012. 656 с.
11. **Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.** Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
12. **Суров В.С.** Метод Годунова для расчета течений многоскоростной гетерогенной среды // Инж.-физ. журнал. 2014. Т. 87, № 2. С. 367–375.
13. **Суров В.С.** Задача Римана для односкоростной модели многокомпонентной смеси // Теплофизика высоких температур. 2009. Т. 47, № 2. С. 283–291
14. **Суров В.С.** Задача Римана для многоскоростной модели многокомпонентной среды // Инж.-физ. журнал. 2013. Т. 86, № 4. С. 869–876.
15. **Ishi M., Hibiki T.** Thermo-fluid dynamics of two-phase flow. N.-Y.: Springer, 2006. 462 p.
16. **Суров В.С.** О некоторых автомодельных задачах течения односкоростной гетерогенной среды // Инж.-физ. журнал. 2007. Т. 80, № 6. С. 164–172.
17. **Суров В.С.** Течение Прандтля–Майера для многокомпонентной смеси // Инж.-физ. журнал. 2013. Т. 86, № 3. С. 552–556.
18. **Суров В.С.** Взаимодействие ударных волн с каплями пузырьковой жидкости // Журнал технической физики. 2001. Т. 71, № 6. С. 17–22.
19. **Федоров А.В., Харламова Ю.В., Хмель Т.А.** Отражение ударной волны в облаке пыли // Физика горения и взрыва. 2007. Т. 43, № 1. С. 121–131.

Статья поступила в редакцию 26 октября 2015 г.