УДК 539.3

КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГИХ СЛОЯ, ЦИЛИНДРА И ПРОСТРАНСТВА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

В. М. Александров, А. В. Марк

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва
E-mail: alexand@ipmnet.ru

Рассмотрена контактная задача о взаимодействии жестких штампа, бандажа и вкладыша с вязкоупругими слоем, цилиндром и пространством с цилиндрической полостью соответственно. Предполагается, что штамп, бандаж и вкладыш движутся по границам вязкоупругих тел с постоянной скоростью. В пренебрежении трением в области контакта на первом этапе определяется перемещение границ указанных тел в зависимости от приложенных к ним нормальных нагрузок. На втором этапе выводятся интегральные уравнения собственно контактных задач для определения контактного давления. На третьем этапе с использованием модифицированного метода Мультоппа — Каландии строятся приближенные решения интегральных уравнений.

Ключевые слова: вязкоупругий слой, цилиндр, движущийся штамп, контактное давление.

1. Решение вспомогательной задачи. Пусть штамп, бандаж, вкладыш движутся с постоянной скоростью V по границам вязкоупругих слоя, цилиндра и пространства с цилиндрической полостью (рис. 1). Будем считать, что вязкоупругие тела описываются моделью Кельвина [1]. Движение штампа будем рассматривать в декартовых координатах x, y, z, а движение бандажа и вкладыша — в цилиндрических координатах r, φ, z.

Сначала выведем зависимости перемещений границ слоя, цилиндра и пространства с цилиндрической полостью от приложенных к ним нормальных нагрузок $q(\eta, z)$ в упругой постановке задачи (нагрузки неподвижны), а затем согласно [1] получим зависимости перемещений границ вязкоупругих тел от движущихся по ним с постоянной скоростью нагрузок.

Запишем уравнения упругого равновесия

$$2(1-\nu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} - (1-2\nu)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 0 \tag{1.1}$$

и граничные условия

$$\begin{gathered}\sigma_{\xi\xi}(l,\eta,z) = -q(\eta,z) \quad (|z| \leqslant a), \qquad \sigma_{\xi\xi}(l,\eta,z) = 0 \quad (|z| > a),\\ \sigma_{\xi\eta}(l,\xi,z) = \sigma_{\xi z}(l,\eta,z) = 0,\\ u_\xi(0,\eta,z) = u_\eta(0,\eta,z) = u_z(0,\eta,z) = 0\end{gathered} \tag{1.2}$$

(последнее условие выполняется только для слоя). В (1.1), (1.2) u_ξ, u_η, u_z — компоненты вектора перемещений $\boldsymbol{u}$ по направлениям ξ, η, z; $\sigma_{\xi\xi}$ — нормальное напряжение; $\sigma_{\xi\eta}$, $\sigma_{\xi z}$ —

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08-01-00003, 06-01-00022, 06-08-01595, 07-08-00730).

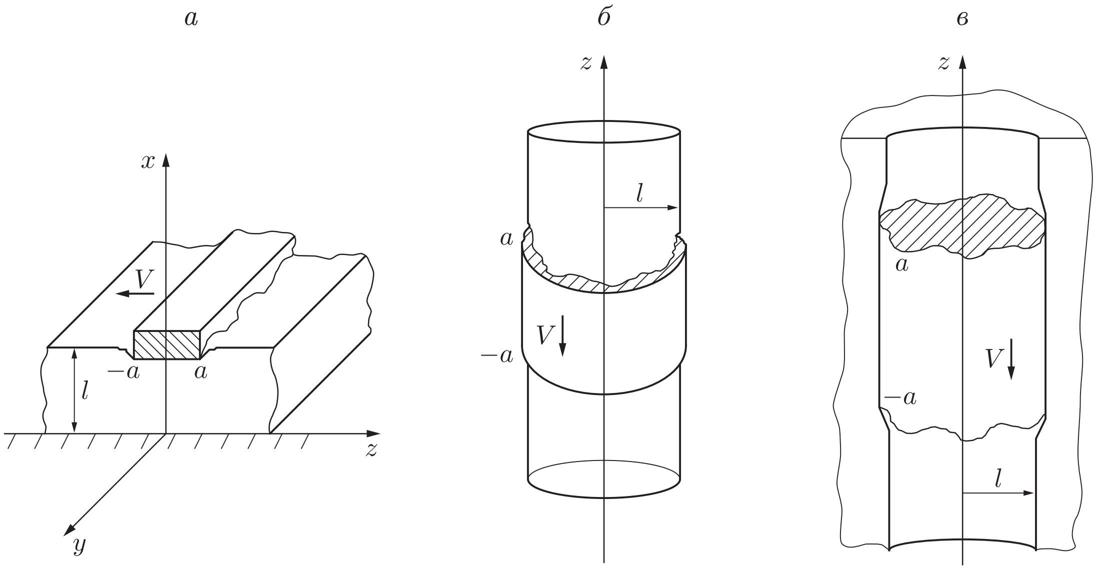

Рис. 1. Схемы контактных задач:
а — штамп; *б* — бандаж; *в* — вкладыш

касательные напряжения; ν — коэффициент Пуассона; l — толщина слоя либо радиус цилиндра или цилиндрической полости; под ξ понимается координата x (или r), под η — координата y (или φ).

Уравнения (1.1) будем решать с использованием преобразования Фурье по координате z и (вследствие периодичности задач) в виде ряда по координате η:

$$\boldsymbol{u} = \mathrm{e}^{-i\beta\eta}\,\boldsymbol{u}_\beta, \qquad \boldsymbol{u}_\beta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{U}_\beta(\alpha,\xi)\,\mathrm{e}^{-i\alpha z}\,d\alpha. \tag{1.3}$$

При этом

$$q(\eta,z) = \mathrm{e}^{-i\beta\eta}\,q_\beta(z), \qquad q_\beta(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q_\beta(\alpha)\,\mathrm{e}^{-i\alpha z}\,d\alpha. \tag{1.4}$$

Здесь $\boldsymbol{u}_\beta$ — вектор амплитуд перемещений с компонентами $u_{\beta\xi}$, $u_{\beta\eta}$, $u_{\beta z}$; $\boldsymbol{U}_\beta$, $Q_\beta(\alpha)$ — фурье-трансформанты функций $\boldsymbol{u}_\beta$ и $q_\beta(z)$; β — частота волны на поверхности штампа, бандажа или вкладыша.

Решение задачи (1.1) с граничными условиями (1.2) с учетом (1.3), (1.4) ищется при следующих дополнительных предположениях: при $z \to \infty$ напряжения отсутствуют, кроме того, в случае цилиндра при $\xi = 0$ напряжения ограничены, а в случае пространства с цилиндрической полостью при $\xi \to \infty$ напряжения отсутствуют. В результате для нормальных перемещений u_ξ границ указанных тел получим выражение

$$u_\xi(l,\eta,z) = \mp\frac{1}{\pi\Theta}\,\mathrm{e}^{-i\beta\eta}\int\limits_{-a}^{a} q_\beta(\zeta)\int\limits_{0}^{\infty}\frac{L_i(u)}{u}\cos\frac{u}{l}\,(\zeta - z)\,du\,d\zeta, \qquad \Theta = \frac{G}{1-\nu}, \tag{1.5}$$

где для слоя

$$L_1(u) = \frac{(2\varkappa\,\mathrm{sh}\,(2s) - 4s)u}{s(2\varkappa\,\mathrm{ch}\,(2s) + \varkappa^2 + 1 + 4s^2)}, \qquad s = \sqrt{u^2 + l^2\beta^2}, \qquad \varkappa = 3 - 4\nu, \tag{1.6}$$

для цилиндра
$$L_2(u) = k_\beta(u)/l_\beta(u), \tag{1.7}$$
для пространства с цилиндрической полостью
$$L_3(u) = m_\beta(u)/n_\beta(u) \tag{1.8}$$
(a — полудлина области контакта; G — модуль сдвига). В уравнении (1.5) и далее верхний знак (“+” или “−”) соответствует задаче о слое или цилиндре, нижний знак (“+” или “−”) — задаче о пространстве с цилиндрической полостью. В задаче о цилиндре или пространстве с цилиндрической полостью β является целым числом. Функции $k_\beta(u)$, $l_\beta(u)$, $m_\beta(u)$, $n_\beta(u)$ имеют вид [2]
$$\begin{gathered}
\left\{\begin{matrix} k_\beta(u) \\ m_\beta(u) \end{matrix}\right\} = -\frac{\beta^2}{2\alpha u^2}\left\{\begin{matrix} \omega_\beta(u) \\ \Omega_\beta(u) \end{matrix}\right\}^3\Big(1+\frac{\beta^2}{u^2}\Big) - \frac{\beta^2}{u^3}\left\{\begin{matrix} \omega_\beta(u) \\ \Omega_\beta(u) \end{matrix}\right\}^2 - \\
- \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} \omega_\beta(u) \\ \Omega_\beta(u) \end{matrix}\right\}\Big(1-\frac{\beta^2}{\alpha u^2}\Big) + \frac{1}{u}, \\
\left\{\begin{matrix} l_\beta(u) \\ n_\beta(u) \end{matrix}\right\} = \pm\frac{1}{2}\,u\left\{\begin{matrix} \omega_\beta(u) \\ \Omega_\beta(u) \end{matrix}\right\}^3\Big[\frac{\alpha\beta^2}{u^4} - \Big(1+\frac{\beta^2}{u^2}\Big)^3 + \frac{\beta^2}{u^4}\Big(1+\frac{\beta^2}{u^2}\Big)\Big] \pm \\
\pm \left\{\begin{matrix} \omega_\beta(u) \\ \Omega_\beta(u) \end{matrix}\right\}^2\Big[\Big(1+\frac{\beta^2}{u^2}\Big)\Big(1-\frac{\alpha\beta^2}{u^2}\Big) + \frac{\alpha\beta^2}{u^4}\Big] \pm \\
\pm\frac{1}{2}\,u\left\{\begin{matrix} \omega_\beta(u) \\ \Omega_\beta(u) \end{matrix}\right\}\Big[\frac{\alpha}{u^2} + \Big(1+\frac{\beta^2}{u^2}\Big)^2 - \frac{\beta^2}{u^4}\Big] \pm \frac{\alpha(\beta^2-1)}{u^2} \mp 1,
\end{gathered} \tag{1.9}$$
где $\omega_\beta(u) = I_\beta(u)/[I'_\beta(u)]$; $\Omega_\beta(u) = K_\beta(u)/[K'_\beta(u)]$; $\alpha = 2(1-\nu)$; $I_\beta(u)$, $K_\beta(u)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка β.

Рассмотрим вязкоупругую задачу. Движение нагрузки будем рассматривать в системе координат, которая движется с постоянной скоростью V в отрицательном направлении оси z вместе с нагрузкой. Движение считается установившимся. В данных координатах перемещение и нагрузка $q(\eta, z)$ не зависят от времени.

Итак, в упругой постановке задачи выражение для амплитуд нормальных перемещений имеет вид (1.5), в случае вязкоупругих слоя, цилиндра, пространства с цилиндрической полостью выражение (1.5) в соответствии с принципом Вольтерры принимает вид (по аналогии с формулой (49.2) в [1])
$$u_{\beta\xi}(z,l) = \mp\frac{1}{\pi\Theta_f}\int\limits_{-a}^{a} q_\beta(\zeta)\Big[K\Big(\frac{\zeta - z}{l}\Big) + \int\limits_{-\infty}^{0} p(-\tau)K\Big(\frac{\zeta - z - V\tau}{l}\Big)\,d\tau\Big]\,d\zeta, \tag{1.10}$$
где
$$K(t) = \int\limits_0^\infty \frac{L_i(u)}{u}\cos(ut)\,du, \qquad p(t) = k\exp\Big(-\frac{t}{\lambda}\Big), \qquad k = \frac{1}{\gamma}\Big(1-\frac{\gamma}{\lambda}\Big), \qquad \Theta_f = \frac{G_f}{1-\nu},$$
λ, γ — вязкие постоянные; G_f — мгновенный модуль сдвига.

2. Вывод интегрального уравнения. Исследуем контактную задачу, в которой величина $u_\xi(\eta, z, l)$ известна и равна $\mp\delta(\eta, z)$, а контактное давление $q(\eta, z)$ неизвестно. Если рассматривается задача для слоя, то величина $\delta(\eta, z)$ понимается как внедрение штампа в слой, а если рассматривается задача для цилиндра или пространства с цилиндрической полостью, то функция $\delta(\eta, z)$ определяется следующим образом:
$$\delta(\eta, z) = \mp(\rho(\eta, z) - l).$$
Здесь $\rho = \rho(\eta, z)$ — уравнение поверхности бандажа или вкладыша.

Будем считать, что функцию $\delta(\eta, z)$ можно представить в виде

$$\delta(\eta, z) = \delta_\beta(z)\,\mathrm{e}^{-i\beta\eta}\,.$$

Следует отметить, что исследуемые задачи являются суперпозицией двух задач: задачи при $\beta = 0$ (гладкие штамп, бандаж, вкладыш) и задачи при $\beta \neq 0$ (волнистые штамп, бандаж, вкладыш).

Все функции $L_i(u)$ $(i = 1, 2, 3)$ в (1.6)–(1.8) в окрестности значения $u = 0$ имеют вид $L(u) = Cu + O(u^3)$, исключение составляет функция $L_2(u)$ при $\beta = 1$. В последнем случае при $\beta = 1$ в (1.6) имеют место следующие разложения в окрестности нуля:

$$k_1(u) = -\frac{1}{4}\,\alpha^{-1}u - \frac{1}{24}\,\frac{2\alpha - 5}{\alpha}\,u^3 + O(u^5), \qquad l_1(u) = \Big(-\frac{1}{8} + \frac{1}{32}\,\alpha\Big)u^4 + O(u^6),$$

т. е. при $\beta = 1$ интеграл (1.5), содержащий $L_2(u)$, расходится. В данной работе этот случай не рассматривается.

Введем следующие безразмерные величины и обозначения:

$$\begin{gathered} \varphi(z') = \frac{q(z)}{\Theta_f}, \quad \varepsilon = \frac{l}{a}, \quad \mu = \frac{\lambda V}{a}, \quad g(z') = \frac{\delta_\beta(z)}{a}, \\ z' = \frac{z}{a}, \quad \zeta' = \frac{\zeta}{a}, \quad \tau' = \frac{\tau}{\lambda}, \quad w' = \zeta' - z'. \end{gathered} \tag{2.1}$$

В задаче о слое необходимо ввести величину $\beta' = \beta a$. С учетом (2.1) уравнение (1.10) запишем в виде

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi(\zeta)\,\Big[K_1\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big) + k\lambda K_2\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big)\Big]\,d\zeta = \pi g(z); \tag{2.2}$$

$$K_1\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big) = \int\limits_0^\infty \frac{L_i(u)}{u}\,\cos\Big(\frac{uw}{\varepsilon}\Big)\,du; \tag{2.3}$$

$$K_2\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big) = \int\limits_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\tau} \int\limits_0^\infty \frac{L_i(u)}{u}\,\cos\Big(u\,\frac{w - \mu\tau}{\varepsilon}\Big)\,du\,d\tau. \tag{2.4}$$

Здесь и далее штрихи опущены. С использованием представления

$$\ln|t| = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u} - \cos{(ut)}}{u}\,du$$

в уравнении (2.3) выделим логарифмическую часть. В результате получим

$$K_1\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big) = -\ln\Big|\frac{w}{\varepsilon}\Big| + F_1\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big),$$

$$F_1\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big) = -\int\limits_0^\infty \frac{[1 - L_i(u)]\cos{(uw/\varepsilon)} - \mathrm{e}^{-u}}{u}\,du.$$

Преобразуем уравнение (2.4):

$$K_2\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big) = \int\limits_0^\infty \frac{L_i(u)}{u} \int\limits_{-\infty}^0 \mathrm{e}^\tau \cos\Big(u\,\frac{w-\mu\tau}{\varepsilon}\Big)\,d\tau\,du =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{L_i(u)}{u}\,\frac{\varepsilon^2\cos(uw/\varepsilon) - \varepsilon\mu u\sin(uw/\varepsilon)}{\varepsilon^2+\mu^2u^2}\,du = J_1\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big) + J_2\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big).$$

Здесь

$$J_1\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big) = \varepsilon^2\int\limits_0^\infty \frac{L_i(u)}{u}\,\frac{\cos(uw/\varepsilon)}{\varepsilon^2+\mu^2u^2}\,du, \qquad J_2\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big) = -\varepsilon\mu\int\limits_0^\infty \frac{L_i(u)\sin(uw/\varepsilon)}{\varepsilon^2+\mu^2u^2}\,du. \tag{2.5}$$

Выполнив преобразования, для улучшения сходимости интегралов в (2.5) ядро интегрального уравнения (2.2) представим в виде

$$M(w) = -\ln\Big|\frac{w}{\varepsilon}\Big| + F(w), \tag{2.6}$$

где для задачи о слое

$$F(w) = F_1\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big) + k\lambda\Big[\sum_{i=1}^3 F_i\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big) + E_1(w)\Big], \tag{2.7}$$

для задачи о цилиндре и пространстве с цилиндрической полостью

$$F(w) = F_1\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big) + k\lambda\Big[J_1\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big) + F_3\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big) + E_2(w)\Big]. \tag{2.8}$$

В (2.7), (2.8)

$$F_2\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big) = \mu^2\int\limits_0^\infty \frac{[1-L(u)]u}{\varepsilon^2+\mu^2u^2}\cos\Big(\frac{uw}{\varepsilon}\Big)\,du, \qquad F_3\Big(\frac{w}{\varepsilon}\Big) = \varepsilon\mu\int\limits_0^\infty \frac{1-L(u)}{\varepsilon^2+\mu^2u^2}\sin\Big(\frac{uw}{\varepsilon}\Big)\,du,$$

$$E_1(w) = \exp\Big(\frac{w}{\mu}\Big)\,\mathrm{Ei}\Big(-\frac{w}{\mu}\Big) - \ln\Big|\frac{w}{\varepsilon}\Big|,$$

$$E_2(w) = -\frac{1}{2}\Big[\exp\Big(-\frac{w}{\mu}\Big)\,\mathrm{Ei}\Big(\frac{w}{\mu}\Big) - \exp\Big(\frac{w}{\mu}\Big)\,\mathrm{Ei}\Big(-\frac{w}{\mu}\Big)\Big],$$

$\mathrm{Ei}(x)$ — интегральная показательная функция [3]. Функция $F(w)$ непрерывна.

Выражения (2.7), (2.8), по сути, определяют одну и ту же функцию, но в силу того, что поведение функций $L_i(u)$ на бесконечности различно, для лучшей сходимости интегралов целесообразно использовать эти выражения в соответствующих задачах.

Итак, имеем уравнение

$$\int\limits_{-1}^1 \varphi(\zeta)M(w)\,d\zeta = \pi g(z) \tag{2.9}$$

с ядром (2.6).

3. Решение контактной задачи о штампе, бандаже и вкладыше с острыми краями. В случае штампа, бандажа и вкладыша с острыми краями решение интегрального уравнения (2.9) с ядром (2.6) можно представить в виде

$$\varphi(z) = \Phi(z)(1-z^2)^{-1/2},$$

где $\Phi(z) \in C_n(-1,1)$ (см. теорему 2.1 в [4]).

Для данной задачи положим $g(z) \equiv g$. Уравнение (2.8) с ядром (2.6) будем решать модифицированным методом Мультоппа — Каландии [2]. Для функции $\Phi(z)$ построим интерполяционный полином Лагранжа по узлам

$$z_n = \cos\theta_n, \qquad \theta_n = \pi(2n-1)/(2N) \qquad (n = 1, 2, \ldots, N),$$

являющимся нулями полинома Чебышева $T_N(z)$. Такой многочлен имеет вид

$$\Phi(\cos\vartheta) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Phi_n\Bigl(1 + 2\sum_{m=1}^{N-1}\cos m\theta_n \cos m\vartheta\Bigr). \tag{3.1}$$

Перейдя к новым переменным $z = \cos\vartheta$, $\zeta = \cos\psi$, уравнение (2.9) запишем в виде

$$\int_0^\pi \Phi(\cos\psi)\,\ln\Bigl|\frac{\cos\psi - \cos\vartheta}{\varepsilon}\Bigr|\,d\psi = \pi g - \int_0^\pi \Phi(\cos\psi) F(\cos\psi - \cos\vartheta)\,d\psi, \qquad \vartheta \in [0, \pi]. \tag{3.2}$$

Подставив (3.1) в уравнение (3.2), с использованием соотношения

$$-\int_0^\pi \cos s\psi\,\ln\Bigl|\frac{\cos\psi - \cos\vartheta}{\varepsilon}\Bigr|\,d\psi = \begin{cases} \pi\ln(2\varepsilon), & s = 0, \\ \pi s^{-1}\cos s\vartheta, & s \ne 0 \end{cases}$$

и квадратурной формулы Гаусса

$$\int_0^\pi \chi(\psi)\,d\psi = \frac{\pi}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi(\theta_n)$$

получим

$$\sum_{n=1}^{N}\Phi_n\Bigl(\ln(2\varepsilon) + 2\sum_{m=1}^{N-1}\frac{\cos m\theta_n\,\cos m\vartheta}{m}\Bigr) = Ng - \sum_{n=1}^{N}\Phi_n F(\cos\theta_n - \cos\vartheta).$$

Применяя метод коллокации, т. е. полагая $\vartheta = \theta_k$, получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения Φ_n:

$$\sum_{n=1}^{N}\Phi_n\Bigl(\ln(2\varepsilon) + 2\sum_{m=1}^{N-1}\frac{\cos m\theta_n\,\cos m\theta_k}{m} + F(\cos\theta_n - \cos\theta_k)\Bigr) = Ng, \qquad k = 1, 2, \ldots, N.$$

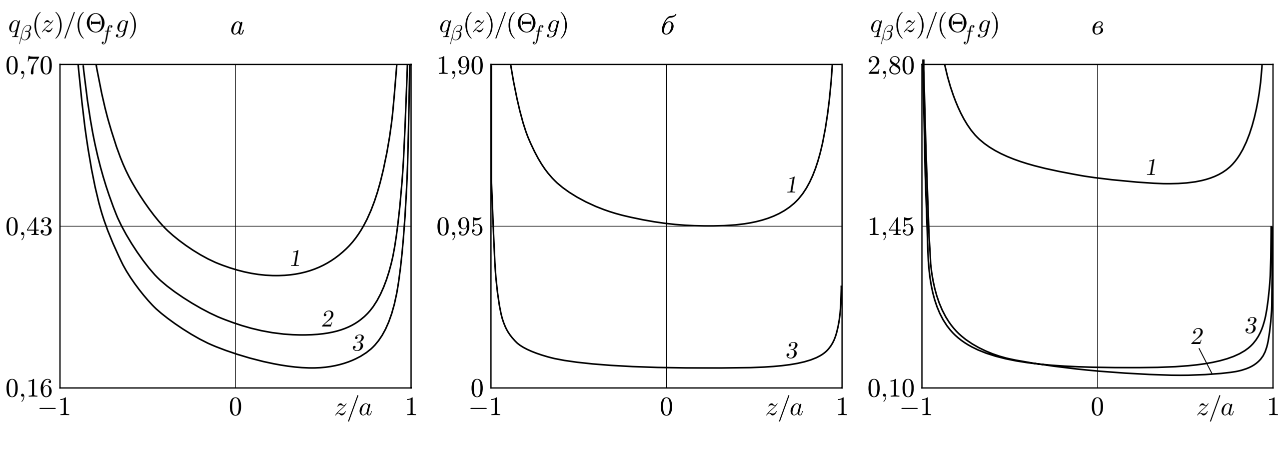

Рис. 2. Распределение контактных давлений по координате z:
а — $\beta = 0$; *б* — $\beta = 1$; *в* — $\beta = 2$; *1–3* — контактное давление (*1* — под штампом; *2* — под бандажом; *3* — под вкладышем)

4. Примеры численных расчетов. В качестве вязкоупругой среды рассмотрим один из видов резины, для которой $\nu = 0{,}3$, $\lambda/\gamma = 1001$.

На рис. 2 показаны распределения контактных давлений по координате z для рассматриваемых тел при $\beta = 0$, 1, 2. Кривые *1, 2, 3* соответствуют распределениям контактных давлений под штампом, бандажом, вкладышем соответственно. Расчеты проводились при значениях $\mu = 10^4$, $\varepsilon = 8$. Кривая *2* на рис. 2,*б* отсутствует, так как она соответствует случаю $\beta = 1$ для цилиндра, который не рассматривается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
2. **Александров В. М.** Контактные задачи в машиностроении / В. М. Александров, Б. Л. Ромалис. М.: Машиностроение, 1986.
3. **Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Физматгиз, 1962.
4. **Александров В. М.** Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями / В. М. Александров, Е. В. Коваленко. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 29/I 2008 г.,
в окончательном варианте — 19/IX 2008 г.