

УДК 621.791.011
DOI: 10.15372/PMTF202215213

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ ДУГОВОЙ СВАРКЕ ПОД ФЛЮСОМ

Д. Дутта

Инженерно-технологический колледж Св. Томаса, Калькутта, Индия
E-mail: jaideep.dutta@mechresearch.net.in

С использованием теоремы Дюамеля и конечных интегральных преобразований разработан метод построения аналитического решения задачи теплопроводности, моделирующего температурное поле, возникающее в процессе сварки под флюсом. Исследуется температурное поле, возникающее при сварке толстых пластин из стали марки ЕН36. Предполагается, что движущийся источник тепла имеет эллипсоидальную форму. Возникающее тепловое поле исследовано при различных значениях параметров процесса, таких как скорость перемещения источника тепла, количество подводимого тепла, время задержки движения источника тепла, участвующего в процессе сварки.

Ключевые слова: интегральное преобразование, теорема Дюамеля, температурное поле, дуговая сварка под флюсом, сталь марки ЕН36

Введение. Толстостенные стальные пластины широко используются в нефтяной, газовой, химической промышленности, а также в ветроэнергетике и судостроении. В частности, в судостроении применяется сталь марки ЕН36, обладающая высокой прочностью на разрыв [1]. Результаты исследования температурного поля, возникающего при сварке различных конструкций, используются при определении в конструкции температурных и остаточных напряжений и деформаций, а также усталости конструкции [2].

При сварке толстых стальных листов в случаях, когда необходимы длинные сварные швы, применяется дуговая сварка под флюсом — процесс формирования сварного шва между стальными пластинами с помощью электрической дуги, погруженной в слой зернистого флюса [3].

В работе [4] приведены результаты экспериментального и численного исследований температурного поля и напряженного состояния в двухсторонних угловых соединениях, сваренных под флюсом. В [5] предложена аналитическая модель распределения неустановившейся температуры в двух стальных пластинах, сваренных под флюсом. Математическое моделирование температурного поля, возникающего при сварке под флюсом, выполнено в работе [6]. В [7] на основе метода конечных элементов разработана трехмерная модель теплопередачи в случае двухдуговой сварки под флюсом при соединении стальных труб. В работе [8] приведены результаты численного и экспериментального исследований процесса сварки под флюсом при использовании нестационарного источника тепла. В работе [9] найдено численное решение задачи о теплопередаче при сварке под флюсом и проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными. Результаты экспериментального исследования температурного поля в пластинах из мягкой стали и влияния

на это поле геометрии сварного шва и микроструктуры зон термического воздействия приведены в [10].

В настоящее время известно небольшое количество работ [5, 6], в которых строятся аналитические решения, описывающие температурное поле, возникающее при сварке под флюсом. Данная работа посвящена построению аналитического решения, описывающего двумерное температурное поле, возникающее при сварке под флюсом пластин из стали марки ЕН36. При этом использовалась модель двойного эллипсоидального источника тепла гауссова типа.

1. Математическая модель. Ниже приводятся дифференциальные уравнения, краевые и начальные условия задачи теплопроводности для нестационарного температурного поля, возникающего при дуговой сварке под флюсом, описан метод решения задачи.

1.1. *Формулировка дифференциальных уравнений задачи.* Решаются уравнения двумерной задачи о неустановившейся теплопроводности [11]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q_g}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < L, \quad (1)$$

где T — локальная температура, $^{\circ}\text{C}$; $Q_g(x, y, t)$ — мощность эллипсоидального источника тепла гауссова типа, движущегося в виде факела при сварке под флюсом [9]:

$$Q_g(x, y, t) = \frac{6\sqrt{3} f_f Q}{a_f b c \pi^{3/2}} \exp\left(-\frac{3[x + v(\tau - t)]^2}{a_f^2} - \frac{3y^2}{b^2}\right), \quad (2)$$

k — теплопроводность; α — коэффициент термодиффузии; L — длина области в направлении координаты x , м; f_f — количество тепла, излучаемого передней частью эллипсоидального источника ($x > 0$); a_f — длина полуоси в направлении x , м; b — длина эллипсоида, м; c — ширина эллипсоида, м; v — скорость движения источника тепла, м/с; τ — время запаздывания движущегося источника тепла.

Для уравнения (1) ставятся краевые условия

$$\begin{aligned} x = 0: \quad \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, & x = L: \quad \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \\ y = 0: \quad \frac{\partial T}{\partial y} &= 0, & y = L: \quad \frac{\partial T}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

и начальные условия

$$t = 0: \quad T = T_i.$$

С учетом (2) уравнение (1) в безразмерных переменных записывается в виде

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + C Q^* \exp\left(-\frac{3[X + U(\xi - F)]^2}{A_f^2} - \frac{3Y^2}{B^2}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial F}, \quad (3)$$

где $\theta = (T - T_i)/T_i$; $X = x/L$; $Y = y/L$; $C = 6\sqrt{3} f_f / \pi^{3/2}$; $Q^* = Q L^2 / (k a_f b c T_i)$; $A_f = a_f/L$; $B = b/L$; $F = \alpha t/L^2$; $U = vL/\alpha$; $\xi = \alpha\tau/L^2$.

1.2. *Метод решения на основе теоремы Дюамеля и конечных интегральных преобразований.* В силу теоремы Дюамеля [11] уравнение (3) сводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial Y^2} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial F}, \quad (4)$$

где

$$\theta(X, Y, F) = \int_{\bar{F}=0}^F \bar{\theta}(X, Y, F; \bar{F}) d\bar{F}, \quad (5)$$

а начальные условия приводятся к виду

$$\bar{\theta}|_{(X,Y,F=\bar{F})} = CQ^* \exp \left(-\frac{3[X+U(\xi-\bar{F})]^2}{A_f^2} - \frac{3Y^2}{B^2} \right). \quad (6)$$

Применяя к уравнению (4) интегральное косинус-преобразование по X [11]:

$$\int_{X=0}^1 \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial X^2} \cos(m\pi X) dX + \int_{X=0}^1 \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial Y^2} \cos(m\pi X) dX - \int_{X=0}^1 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial F} \cos(m\pi X) dX = 0,$$

получаем

$$-m^2\pi^2\bar{\theta}' + \frac{\partial^2 \bar{\theta}'}{\partial Y^2} - \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial F} = 0, \quad (7)$$

где

$$\bar{\theta}'(m, Y, F) = \int_{X=0}^1 \bar{\theta}(X, Y, F) \cos(m\pi X) dX.$$

Применяя к уравнению (7) интегральное косинус-преобразование по Y , имеем

$$(m^2\pi^2 + n^2\pi^2)\bar{\theta}'' + \frac{d\bar{\theta}''}{dF} = 0, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

где

$$\bar{\theta}''(m, n, F) = \int_{Y=0}^1 \bar{\theta}'(m, Y, F) \cos(n\pi Y) dY = \int_{X=0}^1 \int_{Y=0}^1 \bar{\theta}(X, Y, F) \cos(m\pi X) \cos(n\pi Y) dX dY.$$

Решение уравнения (8) записывается в следующем виде:

$$\bar{\theta}''(m, n, F) = C_{XY} \exp [-(m^2\pi^2 + n^2\pi^2)F]. \quad (9)$$

Применяя к (9) обратное интегральное преобразование, получаем

$$\bar{\theta}(X, Y, F; \bar{F}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{XY} \exp [-(m^2\pi^2 + n^2\pi^2)F] \cos(m\pi X) \cos(n\pi Y). \quad (10)$$

Используя начальное условие (6), из (10) находим соотношение для констант C_{XY} :

$$C_{XY} \cos(m\pi X) \cos(n\pi Y) = CQ^* \exp \left(-\frac{3[X+U(\xi-\bar{F})]^2}{A_f^2} - \frac{3Y^2}{B^2} \right). \quad (11)$$

Умножая левую и правую части равенства (11) на $\cos(m\pi X) \cos(n\pi Y)$ и интегрируя по X , Y , имеем

$$\begin{aligned} & \int_{X=0}^1 \int_{Y=0}^1 C_{XY} \cos^2(m\pi X) \cos^2(n\pi Y) dX dY = \\ & = CQ^* \int_{X=0}^1 \int_{Y=0}^1 \exp \left(-\frac{3[X+U(\xi-\bar{F})]^2}{A_f^2} - \frac{3Y^2}{B^2} \right) \cos(m\pi X) \cos(n\pi Y) dX dY. \end{aligned}$$

Из условия ортогональности функций $\cos(m\pi X) \cos(n\pi Y)$ находим

$$\begin{aligned}
 C_{XY} = & \frac{\sqrt{\pi} A_f}{4\sqrt{3}} \exp\left(\frac{3\xi^2 U^2}{A_f^2} - \pi\xi U + \frac{\pi^2 A_f^2}{12}\right) \times \\
 & \times \left\{ \exp(2\pi\xi U) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{6\xi U + \pi A_f^2 + 6}{2\sqrt{3} A_f}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{6\xi U + \pi A_f^2}{2\sqrt{3} A_f}\right) \right] + \right. \\
 & + \operatorname{erf}\left(\frac{6\xi U - \pi A_f^2 + 6}{2\sqrt{3} A_f}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{6\xi U - \pi A_f^2}{2\sqrt{3} A_f}\right) \left. \right\} \frac{\sqrt{\pi} B \exp(\pi^2 B^2/12)}{4\sqrt{3}} \times \\
 & \times \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\pi B^2 + 6}{2\sqrt{3} B}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\pi B^2 - 6}{2\sqrt{3} B}\right) \right] 4CQ^* \exp\left(-\frac{3U^2(\xi - \bar{F})^2}{A_f^2}\right). \quad (12)
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\bar{\theta}(X, Y, F; \bar{F}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{XY} \exp[-(m^2\pi^2 + n^2\pi^2)F] \cos(m\pi X) \cos(n\pi Y).$$

С учетом (5) из (12) получаем

$$\begin{aligned}
 \theta(X, Y, F) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 4CQ^* M_1 M_2 \exp[-(m^2\pi^2 + n^2\pi^2)F] \times \right. \\
 & \times \left. \frac{\sqrt{\pi} A_f}{2\sqrt{3} U} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{U\sqrt{3}(F - \xi)}{A_f}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{U\xi\sqrt{3}}{A_f}\right) \right] \cos(m\pi X) \cos(n\pi Y) \right\}, \quad (13)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 M_1 = & \frac{\sqrt{\pi} A_f}{4\sqrt{3}} \exp\left(\frac{3\xi^2 U^2}{A_f^2} - \pi\xi U + \frac{\pi^2 A_f^2}{12}\right) \times \\
 & \times \left\{ \exp(2\pi\xi U) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{6\xi U + \pi A_f^2 + 6}{2\sqrt{3} A_f}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{6\xi U + \pi A_f^2}{2\sqrt{3} A_f}\right) \right] + \right. \\
 & + \operatorname{erf}\left(\frac{6\xi U - \pi A_f^2 + 6}{2\sqrt{3} A_f}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{6\xi U - \pi A_f^2}{2\sqrt{3} A_f}\right) \left. \right\}, \\
 M_2 = & \frac{\sqrt{\pi} B \exp(\pi^2 B^2/12)}{4\sqrt{3}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\pi B^2 + 6}{2\sqrt{3} B}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\pi B^2 - 6}{2\sqrt{3} B}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Используя обратное преобразование Фурье, из (13) можно получить распределение температуры. Интегралы можно аппроксимировать с помощью квадратурной формулы [13]. В результате получаем

$$\theta(X, Y, F) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k_x=1}^{\infty} \sum_{k_y=1}^{\infty} \theta_0 \exp[i(k_x X + k_y Y + \omega F)], \quad (14)$$

где $k_x = 1, 2, 3, \dots$, $k_y = 1, 2, 3, \dots$ — волновые числа; $\omega = i\alpha(k_x + k_y)^2$; $i = \sqrt{-1}$; θ_0 — частота волны:

$$\theta_0 = 4CQ^* M_1 M_2 \frac{\sqrt{\pi} A_f}{2\sqrt{3} U} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{U\sqrt{3}(F - \xi)}{A_f}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{U\xi\sqrt{3}}{A_f}\right) \right].$$

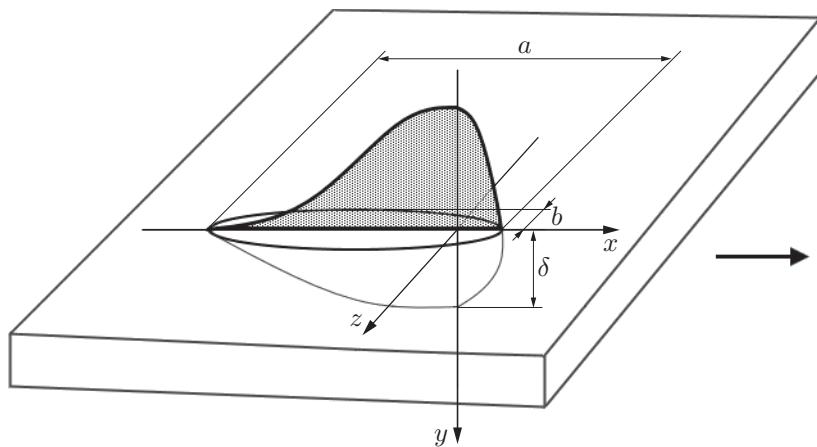


Рис. 1. Схема эллипсоидального источника тепла в толстой пластине (стрелка — направление сварки)

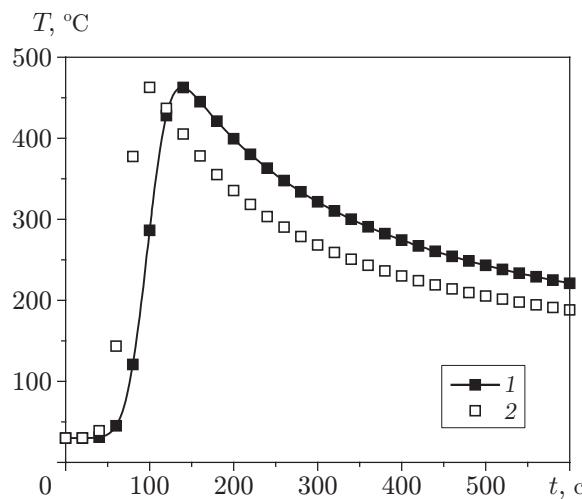


Рис. 2. Полученная в данной работе теоретическая (1) и экспериментальная [9] (2) зависимости температуры от времени

2. Результаты исследования и их обсуждение. В судостроении используются толстые пластины из стали марки ЕН36 (температура плавления $T_m = 1425$ °C, теплопроводность $k = 52$ Вт/(м·°C), плотность $\rho = 7800$ кг/м³, удельная теплоемкость $C_p = 470$ Дж/(кг·°C) [12]). В данной работе исследуется распределение температурного поля в пластине длиной 100 мм и толщиной 30 мм (рис. 1).

В работе [9] приведены результаты экспериментального исследования сварки под флюсом пластин из мягкой стали. Рассматривался источник тепла эллипсоидальной формы (по осям x , y) [9] и использовались следующие значения параметров процесса: $Q = 14\,000$ Вт, $y = 0,025$ м, $x = 0,3$ м, $v = 0,5$ м/мин, $ff = 0,42$, $k = 31,3$ Вт/(м·°C), $\rho = 7850$ кг/м³.

На рис. 2 приведены экспериментальная [9] и полученная в данной работе теоретическая зависимости температуры от времени. Видно, что характер кривых один и тот же. Максимальное значение температуры в эксперименте равно 462,28 °C, а теоретическое значение температуры равно 460,88 °C. На обеих кривых имеются участок быстрого нагрева и участок постепенного охлаждения. Такое поведение зависимостей $T(t)$ характерно при сварке под флюсом [6–8]. Имеется некоторое различие углов наклона кривых.

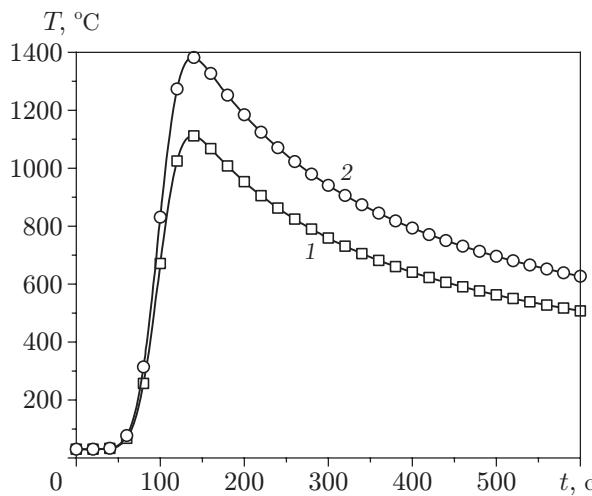


Рис. 3

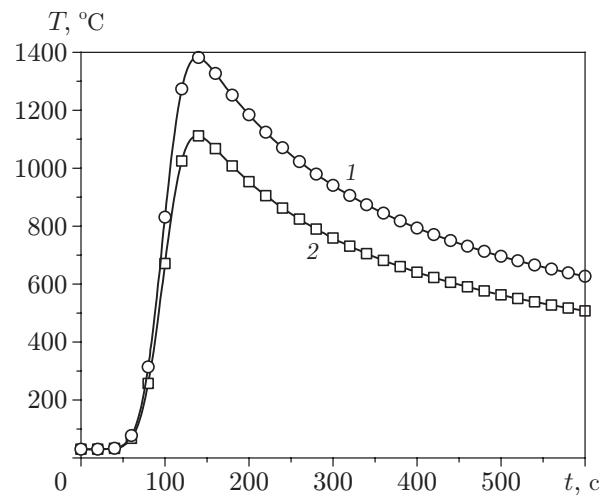


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость температуры от времени при различных значениях мощности источника:

1 — $Q = 20\ 000$ Вт, 2 — $Q = 25\ 000$ Вт

Рис. 4. Зависимость температуры от времени при различных значениях скорости движения дуги:

1 — $v = 0,0045$ м/с, 2 — $v = 0,0050$ м/с

На рис. 3 показана зависимость температуры от времени при $y = 0,03$ м, $x = 0,01$ м, $v = 0,005$ м/с, $f_f = 0,42$, $k = 52$ Вт/(м · °C), $\rho = 7850$ кг/м³, $C_p = 470$ Дж/(кг · °C), $\tau = 20$ с, $a_f = 0,03$ м, $b = 0,005$ м, $\delta = 0,008$ м, $T_i = 30$ °C и различных значениях мощности источника Q . С увеличением Q максимальная температура увеличивается.

На рис. 4 представлена зависимость температуры от времени при $y = 0,03$ м, $x = 0,01$ м, $Q = 25\ 000$ Вт, $f_f = 0,42$, $k = 52$ Вт/(м · °C), $\rho = 7850$ кг/м³, $C_p = 470$ Дж/(кг · °C), $\tau = 25$ с, $a_f = 0,03$ м, $b = 0,005$ м, $\delta = 0,008$ м и различных значениях скорости движения дуги. При увеличении скорости с 0,0045 до 0,0050 м/с максимальная температура уменьшается. Увеличение скорости движения дуги означает, что источник перемещается по поверхности пластины с большей скоростью. При этом уменьшается энергия (количество теплоты), выделяемая на поверхность пластины.

На рис. 5 показана зависимость температуры от времени при значениях параметров процесса $y = 0,03$ м, $x = 0,01$ м, $Q = 25\ 000$ Вт, $f_f = 0,42$, $k = 52$ Вт/(м · °C), $\rho = 7850$ кг/м³, $C_p = 470$ Дж/(кг · °C), $v = 0,005$ м/с, $a_f = 0,03$ м, $b = 0,005$ м, $\delta = 0,008$ м и различных значениях времени τ задержки нагрева источником тепла. Видно, что с увеличением времени задержки с $\tau = 20$ с до $\tau = 25$ с температура уменьшается.

На рис. 6 показано распределение температуры по длине пластины из стали марки ЕН36 при $y = 0,03$ м, $x = 0,01$ м, $Q = 25\ 000$ Вт, $v = 0,005$ м/с, $f_f = 0,42$, $k = 52$ Вт/(м · °C), $\rho = 7850$ кг/м³, $C_p = 470$ Дж/(кг · °C), $a_f = 0,03$ м, $b = 0,005$ м, $\delta = 0,008$ м, $\tau = 20$ с и различных значениях времени нагрева. Видно, что с увеличением времени нагрева с 10 до 30 с температура уменьшается и кривая зависимости $T(x)$ постепенно становится плоской (угол наклона кривой уменьшается). Из приведенных на рис. 6 зависимостей следует, что при $x = 0$ и $x = 0,1$ м граничные условия выполняются.

Поскольку в основе математического моделирования лежит преобразование Фурье, решения получаются как в физической, так и в комплексной области. Однако температуру

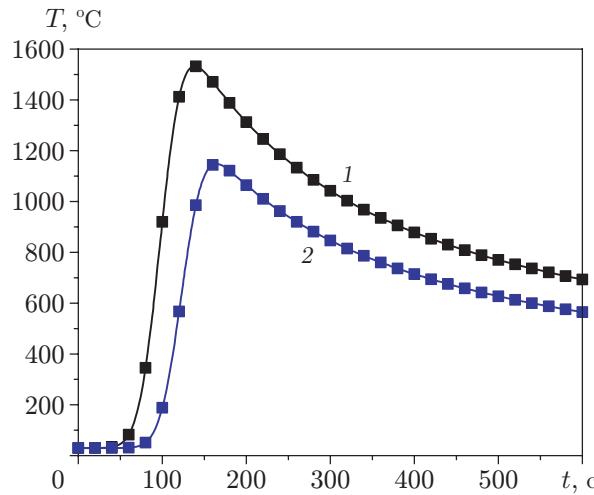


Рис. 5

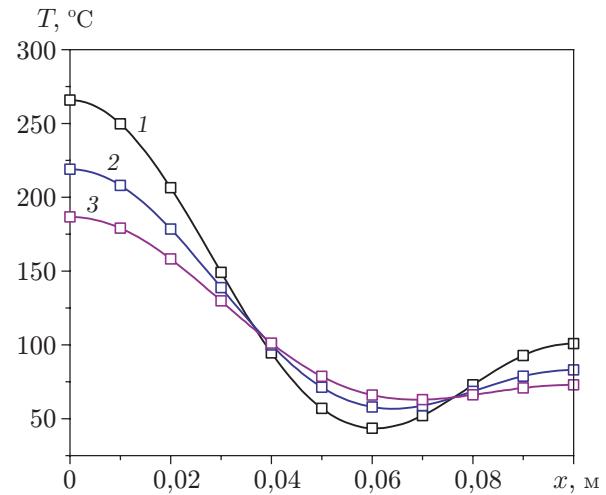


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость температуры от времени при различных значениях времени задержки нагрева τ :

1 — $\tau = 20$ с, 2 — $\tau = 25$ с

Рис. 6. Распределение температуры по длине пластины при различных значениях времени нагрева:

1 — $t = 10$ с, 2 — $t = 20$ с, 3 — $t = 30$ с

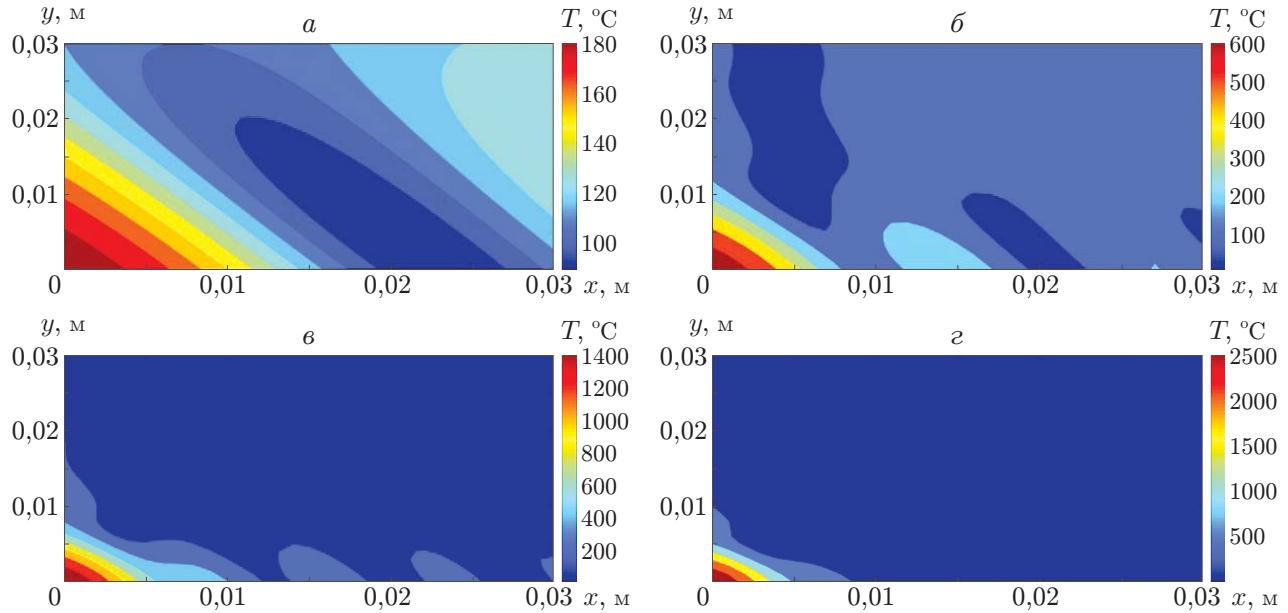


Рис. 7. Распределение температуры при различном числе пространственных гармоник N :

а — $N = 5$, б — $N = 15$, в — $N = 25$, г — $N = 35$

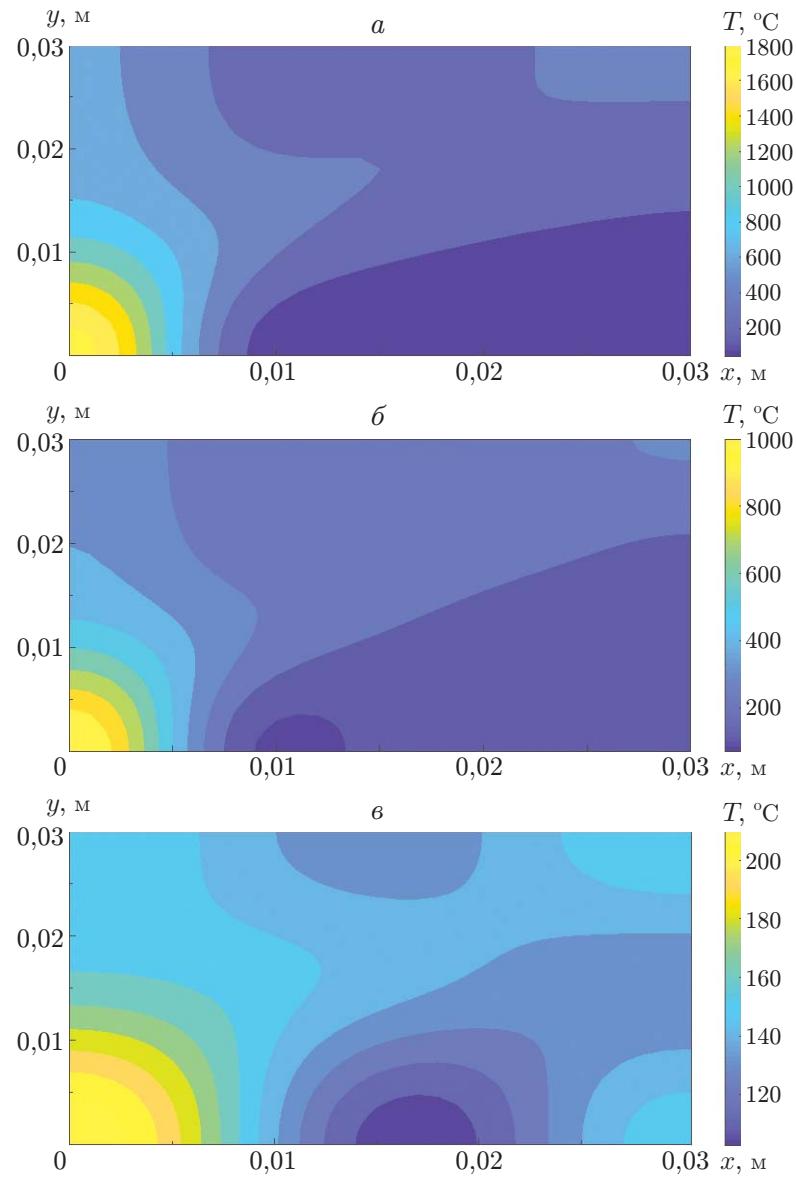


Рис. 8. Изолинии температуры при различных значениях времени нагрева:
a — $t = 5$ с, *б* — $t = 15$ с, *в* — $t = 20$ с

в физической области можно получить путем преобразования температуры в комплексной области за счет выбора подходящих пространственных гармоник (см. уравнение (14)).

На рис. 7 показано распределение температуры при $v = 0,005$ м/с, $a_f = 0,03$ м, $b = 0,005$ м, $\delta = 0,008$ м, $Q = 25\,000$ Вт, $f_f = 0,42$ и различном числе пространственных гармоник. Из результатов, приведенных на рис. 7, следует, что в зависимости от числа гармоник (5, 15, 25 и 35) тепловой поток изменяется. При числе гармоник $N = 5, 15$ в тепловом потоке наблюдаются изолинии температуры различной формы. Однако при числе гармоник $N = 25, 35$ различие потоков незначительно. Таким образом, для адекватного описания процесса распространения тепла с использованием предлагаемого метода достаточно 35 гармоник.

На рис. 8 приведены изолинии температуры при различных значениях времени нагрева. По распределению изолиний температуры на рис. 8 можно судить о направлении

распространения энергии в физической области. Приведенные результаты соответствуют наблюдаемым при дуговой сварке под флюсом процессам быстрого нагрева и постепенного охлаждения.

Заключение. В работе предложен метод построения аналитического решения задачи теплопроводности, моделирующего теплопередачу в процессе сварки под флюсом. Проведено сравнение результатов моделирования предложенным методом температурного поля, возникающего при сварке под флюсом пластин из стали марки ЕН36, с экспериментальными данными. Полученные результаты могут быть использованы при выборе оптимальных параметров процесса сварки под флюсом.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Davis J. R.** ASM specialty handbook carbon and alloy steels. S. l.: ASM Intern., 1996.
2. **Goldak J., Bibby M., Moore J., et al.** Computer modelling of heat flow in welds // Metallurg. Trans. B. 1986. V. 17. P. 587–600.
3. **Daemen A., Dept F.** Submerged-arc stainless steel strip cladding // Weld. Res. Suppl. 1970. P. 33–40.
4. **Biswas P., Mahapatra M. M., Mandal N. R.** Numerical and experimental study on prediction of thermal history and residual deformation of double-sided fillet welding // Proc. Inst. Mech. Engrs. B. J. Engng Manufacture. 2009. V. 224. P. 125–134.
5. **Ghosh A., Barman N., Chattopadhyay H., Bag S.** Modelling of heat transfer in submerged arc welding process // Proc. Inst. Mech. Engrs. B. J. Engng Manufacture. 2013. V. 227, N 10. P. 1467–1473.
6. **Ghosh A., Chattopadhyay H.** Mathematical modeling of moving heat source shape for submerged arc welding process // Intern. J. Adv. Manufactur. Tech. 2013. V. 69. P. 2691–2701.
7. **Birsan D. C., Scutelnicu E., Visan D.** Modeling of heat transfer in pipeline steel joint performed by submerged double-arc welding procedure // Adv. Materials Res. 2013. V. 814. P. 33–40.
8. **Sudnik V. A., Erofeev V. A., Maslennikov A. V., et al.** A mathematical model of the submerged-arc welding process and phenomena in the arc cavity // Weld. Intern. 2013. V. 27, N 8. P. 629–637.
9. **Podder D., Mandal N. R., Das S.** Heat source modeling and analysis of submerged arc welding // Weld. J. 2014. V. 183. P. 1–10.
10. **Yadav A., Ghosh A., Kumar A.** Experimental and numerical study of thermal field and weld bead characteristics in submerged arc welded plate // J. Materials Process. Technol. 2017. V. 248. P. 262–274.
11. **Dutta J., Mandal N., Chatterjee P., Kibria G.** Evaluation of thermal characteristics of laser induced heating of microfilm in relation to printed circuit board manufacturing // Proc. Inst. Mech. Engrs. E. J. Proc. Mech. Engng. 2022. DOI: 10.1177/09544089221116165.
12. **Sharma H., Rajput B., Singh R. P.** A review paper on effect of input welding process parameters on structure and properties of weld in submerged arc welding process // Materials Today: Proc. 2020. V. 26, N 2. P. 1931–1935.

Поступила в редакцию 10/X 2022 г.,
после доработки — 25/VI 2023 г.
Принята к публикации 27/XI 2023 г.