9. **Григолюк Э. И., Куликов Г. М.** Приближенный анализ анизотропных трехслойных пластин конечного прогиба // Механика композит. материалов.— 1980.— № 1.
10. **Григолюк Э. И., Куликов Г. М.** Приближенный анализ нелинейных трансверсально-изотропных трехслойных пластин // Механика композит. материалов.— 1980.— № 2.
11. **Бубнов И. Г.** Напряжения в обшивке судов от давления воды // Труды по теории пластин.— М.: ГИТТЛ, 1953.

г. Москва, г. Тамбов *Поступила 13/I 1989 г.*

УДК 539.2

С. В. Мелешко

ДВОЙНЫЕ ВОЛНЫ В ИДЕАЛЬНОМ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЛЕ ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Одним из методов получения точных решений систем дифференциальных уравнений с частными производными является метод вырожденного годографа. Широкое применение решений с вырожденным годографом в газовой динамике [1] позволяет надеяться на успешное приложение этого метода в теории пластичности. Суть метода состоит в понижении размерности независимых переменных путем наложения конечных связей между зависимыми переменными. Решения, получаемые таким способом, с точки зрения групповой классификации частично инвариантные [2]. В теории пластичности из решений с вырожденным годографом использовались простые волны систем с двумя независимыми переменными [3, 4]. Когда число независимых переменных больше двух, известны отдельные примеры построения простых [5] и двойных [6] волн в теории пластичности. В [6] сделана попытка подойти к решениям с вырожденным годографом с точки зрения обобщения бегущих волн и инвариантов Римана, когда число независимых переменных больше двух. Это привело к ограничительному условию на существование решения вида двойной волны (в смысле [6]). В данной работе дана полная классификация двойных волн с функциональным произволом уравнений движения идеального жесткопластического тела при плоской деформации

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}=\frac{\partial\sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha},\quad \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}=0\quad (i=1,2), \tag{0.1}$$

$$\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2\sigma_{12}}=\frac{\partial v_1/\partial x_1-\partial v_2/\partial x_2}{\partial v_1/\partial x_2+\partial v_2/\partial x_1},\quad (\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+4\sigma_{12}^2=4k^2.$$

Здесь приняты обычные обозначения. По повторяющимся греческим индексам происходит суммирование от 1 до 2. Без ограничения общности можно считать $\rho=1$.

После подстановки в уравнения (0.1) соотношений $\sigma_{11}=\sigma-k\sin 2\theta$, $\sigma_{22}=\sigma+k\sin 2\theta$, $\sigma_{12}=k\cos 2\theta$ получается система четырех дифференциальных уравнений относительно $\sigma(t, x_1, x_2)$, $\theta(t, x_1, x_2)$, $v_i(t, x_1, x_2)$ $(i=1, 2)$:

$$\partial v_1/\partial t=\partial\sigma/\partial x_1-2k(\cos 2\theta\partial\theta/\partial x_1+\sin 2\theta\partial\theta/\partial x_2), \tag{0.2}$$

$$\partial v_2/\partial t=\partial\sigma/\partial x_2-2k(\sin 2\theta\partial\theta/\partial x_1-\cos 2\theta\partial\theta/\partial x_2),$$

$$\partial v_\alpha/\partial x_\alpha=0,\ \partial v_2/\partial x_1+\partial v_1/\partial x_2-2\operatorname{ctg}2\theta\partial v_2/\partial x_2=0.$$

Из дальнейшего рассмотрения исключается тривиальный случай $\theta=\mathrm{const}$.

1. Пусть в двойной волне скорости v_1 и v_2 функционально независимы. Тогда в качестве параметров двойной волны можно взять переменные v_1 и v_2, т. е. положить

$$\sigma=\sigma(v_1, v_2),\ \theta=\theta(v_1, v_2). \tag{1.1}$$

После подстановки (1.1) в (0.2) получается переопределенная система четырех дифференциальных уравнений на две функции v_1, v_2 $(x\equiv x_1,\ x_2\equiv y)$

$$\mathbf{v}_t+G_1\mathbf{v}_y=0,\ \mathbf{v}_x+G_2\mathbf{v}_y=0, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2)'$ матрицы G_1 и G_2 имеют вид

$$G_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 - a_1 2\operatorname{ctg} 2\theta \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\operatorname{ctg} 2\theta \end{pmatrix},$$

$$a_1 = \sigma_2 + 2k(\theta_1 \sin 2\theta - \theta_2 \cos 2\theta),$$

$$a_2 = \sigma_1 + 2k(\theta_1 \cos 2\theta + \theta_2 \sin 2\theta),$$

$$\sigma_i = \partial\sigma/\partial v_i, \ \theta_i = \partial\theta/\partial v_i \ (i = 1, 2).$$

Максимально возможный произвол в решении системы (1.2) при заданных функциях (1.1) определяется числом $2 - r$ $(r = \operatorname{rank}(G_1G_2 - G_2G_1))$, что следует из рассмотрения системы, полученной продолжением (1.2). Поэтому для существования двойных волн уравнений (0.1) с заданными функциями (1.1), имеющих функциональный произвол в решении, необходимо, чтобы $r \leqslant 1$.

Если $r = 0$, то $a_i = 0$ $(i = 1, 2)$, что соответствует стационарному течению, т. е. происходит редукция частично инвариантного решения к инвариантному [2] (это исключается из дальнейшего рассмотрения).

З а м е ч а н и е. Следствие существования двойных волн в смысле [6] — требование $r = 0$.

Рассмотрим случай, когда $r = 1$. Из этого условия и из вида матрицы $(G_1G_2 - G_2G_1)$

(1.3) $$a_2 = a_1(\alpha + \cos 2\theta)/\sin 2\theta \ (\alpha = \pm 1).$$

Если якобиан $\partial(v_1, v_2)/\partial(x, y) = 0$, то после перехода от независимых переменных (t, x, y) к новым (v_1, v_2, x) или (v_1, v_2, y) получается противоречие функциональной независимости v_1 и v_2. Значит, $\partial(v_1, v_2)/\partial(x, y) \neq 0$. Сделаем переход к новым независимым переменным (v_1, v_2, t)

(1.4) $$x = P(v_1, v_2, t), \ y = Q(v_1, v_2, t)$$

в системе (1.2):

(1.5) $$\begin{gathered} P_2Q_t - P_tQ_2 - a_1P_2 + P_1(a_2 - a_1 2\operatorname{ctg} 2\theta) = 0, \\ P_1Q_t - P_tQ_1 - a_2P_2 + a_1P_1 = 0, \\ Q_2 + P_1 = 0, Q_1 + P_2 + 2\operatorname{ctg} 2\theta P_1 = 0, \end{gathered}$$

где

$$P_i = \partial P/\partial v_i; \ Q_i = \partial Q/\partial v_i; \ P_t = \partial P/\partial t; \ Q_t = \partial Q/\partial t;$$

(1.6) $$P_1Q_2 - P_2Q_1 \neq 0.$$

Так как (1.5) как система алгебраических уравнений относительно переменных P_i, Q_i $(i = 1, 2)$ линейна и однородна, то в силу (1.6) ее определитель необходимо удовлетворяет равенству

$$\Delta \equiv (P_t)^2 - (Q_t)^2 - 2P_tQ_t \operatorname{ctg} 2\theta - ((a_2)^2 - (a_1)^2 - 2a_1a_2 \operatorname{ctg} 2\theta) = 0.$$

Поскольку a_1 и a_2 связаны соотношением (1.3), то из последнего равенства

(1.7) $$P_t = \lambda Q_t$$

$(\lambda = (\beta + \cos 2\theta)/\sin 2\theta, \ \beta = \pm 1, \ \lambda_i = \partial\lambda/\partial v_i \ (i = 1, 2))$.
При интегрировании (1.7) относительно t получается

(1.8) $$P = \lambda Q + \chi(v_1, v_2).$$

После подстановки (1.8) в последние два уравнения системы (1.5) имеем

(1.9) $$\begin{gathered} Q_2 + \lambda Q_1 + (\lambda_1 Q + \chi_1) = 0, \\ (\lambda - 2\operatorname{ctg} 2\theta)Q_2 + Q_1 + (\lambda_2 Q + \chi_2) = 0. \end{gathered}$$

Так как λ удовлетворяет уравнению $\lambda^2 - 2\lambda \operatorname{ctg} 2\theta - 1 = 0$, то из (1.9) $(\lambda_1 - \lambda\lambda_2)Q + \chi_1 - \lambda\chi_2 = 0$. В последнем соотношении при $\lambda_1 - \lambda\lambda_2 \neq 0$

следует $Q_t = 0$ и $P_t = 0$ (случай исключен из рассмотрения). Поэтому

$$\lambda_1 - \lambda\lambda_2 = 0, \ \chi_1 - \lambda\chi_2 = 0. \tag{1.10}$$

После подстановки (1.8) в первые два уравнения системы (1.5) с учетом (1.10) вытекает $\alpha = \beta$ и

$$(a_2\lambda + a_1)Q_1 + (a_2\lambda + Q_t)(\lambda_2 Q + \chi_2) = 0. \tag{1.11}$$

Из равенства $\alpha = \beta$, уравнений (1.10) и из вида функций λ и a_i $(i = 1, 2)$ следует $\sigma = \sigma(\lambda)$, $\chi = \chi(\lambda)$. Таким образом, функция $Q(v_1, v_2, t)$ удовлетворяет системе двух квазилинейных дифференциальных уравнений: первому уравнению (1.9) и уравнению (1.11). Стандартным приемом эта система приводится к линейной однородной системе, совместность которой исследуется скобками Пуассона. После получения одной скобки Пуассона имеем

$$Q_t(cQ + d) = 0,$$

где $c = (\partial/\partial v_1)((1 + \lambda^2)\sigma' - 2\beta k)^{-1}$, $d = (\partial/\partial v_1)(\chi'/((1 + \lambda^2)\sigma' - 2\beta k))$. Так как $Q_t \neq 0$, то $c = 0$, $d = 0$, или после интегрирования $(1 + \lambda^2)\sigma' - 2\beta k = \varphi(v_2)$, $\chi' = \psi(v_2)$ с произвольными функциями $\varphi(v_2)$, $\psi(v_2)$.

Если $(d(\sigma'(1 + \lambda^2))/d\lambda)^2 + (\chi'')^2 \neq 0$, то $\lambda = \lambda(v_2)$, но тогда из (1.10) следует, что $\lambda = \mathrm{const}$. Поэтому

$$\chi = c_2\lambda - c_1; \tag{1.12}$$

$$\sigma + 2\beta k\theta + c_3\theta = c_4 \tag{1.13}$$

(c_i — постоянные, $i = 1, 2, 3, 4$).

После подстановки (1.12) в (1.4) в силу (1.8)

$$x + c_1 = \lambda(Q + c_2), \ y + c_2 = Q + c_2.$$

Из последних уравнений имеем

$$\lambda = (x + c_1)/(y + c_2). \tag{1.14}$$

Тем самым из (1.13), (1.14) и $\lambda = \lambda(\theta)$ получается, что поле напряжений в рассматриваемой двойной волне «статически» определимо: функции $\theta = \theta(x, y)$, $\sigma = \sigma(x, y)$ находятся из (1.13) и соотношения

$$\operatorname{tg}\theta = -(x + c_1)/(y + c_2), \ \beta = -1, \ \operatorname{tg}\theta = (y + c_2)/(x + c_1), \ \beta = 1.$$

Из «статической» определимости поля напряжений следует

$$v_i = tH_i(x, y) + g_i(x, y) \ (i = 1, 2), \tag{1.15}$$

где в силу уравнений (0.2), (1.13), (1.14) $H_i = (c_3\lambda_{x_i})/(1 + \lambda^2)$ $(i = 1, 2)$, а функции $g_i(x, y)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\partial g_1/\partial x + \partial g_2/\partial y = 0, \ \partial g_2/\partial x + \partial g_1/\partial y + ((1 - \lambda^2)/\lambda)\partial g_2/\partial y = 0. \tag{1.16}$$

Для $\lambda(x, y)$ из (1.14) у системы (1.16) есть общее решение

$$\begin{aligned} g_1 &= (\Phi_1 + \Phi_2 + \lambda(\lambda^2 + 1)\Phi_1')/\sqrt{1 + \lambda^2}, \\ g_2 &= ((1 + \lambda^2)\Phi_1' - \lambda(\Phi_1 + \Phi_2))/\sqrt{1 + \lambda^2} \end{aligned} \tag{1.17}$$

с произвольными функциями $\Phi_1 = \Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2 = \Phi_2(r)$ своих аргументов $(r = \sqrt{(x + c_1)^2 + (y + c_2)^2})$. В полярной системе координат (r, φ) $(x + c_1 = r\cos\varphi$, $y + c_2 = r\sin\varphi$ полученное поле скоростей (1.15), (1.17) запишется как

$$v_r = -\Phi_1', \ v_\varphi = c_3 t/r + \Phi_1 + \Phi_2.$$

З а м е ч а н и е. Решение уравнений (0.1), в котором поле скоростей имеет вид (1.15), а поле напряжений не зависит от времени t, является инвариантным относительно подгруппы, порожденной инфинитезимальным оператором [5] $N = t\partial_t + v_\alpha\partial_{x_\alpha}$.

2. Рассмотрим случай, когда компоненты скорости v_1 и v_2 функционально зависимы: $v_2 = \Phi(v_1)$.

После подстановки $v_2 = \Phi(v_1)$ в последние два уравнения системы (0.2) в силу неравенства $(\partial v_1/\partial x_1)^2 + (\partial v_2/\partial x_2)^2 \neq 0$ получается, что $\theta = \theta(v_1)$, причем

$$\Phi' = -(\alpha + \cos 2\theta)/\sin 2\theta \quad (\alpha = \pm 1). \tag{2.1}$$

Здесь в двойной волне в качестве независимых параметров могут быть выбраны переменные (σ, v_1). Подставляя $v_2 = \Phi(v_1)$ в первые два уравнения системы (0.2), вычитая из первого уравнения (продифференцированного по y) второе уравнение (продифференцированное по x), используя (2.1) и интегрируя по t, получим

$$\partial v_1/\partial y - \Phi' \partial v_1/\partial x = g(x, y).$$

Тогда из уравнения неразрывности и последнего уравнения выводим

$$\partial v_1/\partial y = g/(1 + (\Phi')^2), \; \partial v_1/\partial x = -g\Phi'/(1 + (\Phi')^2). \tag{2.2}$$

После перекрестного дифференцирования уравнений (2.2)

$$g_x + \Phi' g_y + \Phi'' g^2/(1 + (\Phi')^2) = 0.$$

Если последнее уравнение можно разрешить относительно v_1, то двойная волна редуцируется к стационарному решению. Следовательно, необходимо вытекает

$$\Phi''/(1 + (\Phi')^2) = c_2\Phi' + c_1, \; g = (c_3 + c_1 x + c_2 y)^{-1} \tag{2.3}$$

(c_i — постоянные, $i = 1, 2, 3$). Без ограничения общности можно считать $c_2 = 0$ (это достигается поворотом системы координат). При интегрировании (2.2) с использованием (2.3) получим

$$\Phi'(v_1) = (y + h(t))/(x + c), \; (c = c_3/c_1) \tag{2.4}$$

с произвольной функцией $h = h(t)$. Из уравнений движения с учетом (2.1), (2.3), (2.4) имеем

$$\sigma = 2\alpha k\theta + (h'/2c_1) \ln ((x + c)^2 + (y + h)^2) + \mu(t). \tag{2.5}$$

Таким образом, в случае функциональной зависимости v_1 и v_2 решение вида двойной волны определяется уравнениями (2.1), (2.3)—(2.5).

3. Решения системы (0.1), инвариантные относительно инфинитезимального оператора N [5], следует искать в виде

$$\sigma = \sigma(x, y), \; \theta = \theta(x, y), \; v_i = tH_i(x, y) + g_i(x, y) \; (i = 1, 2). \tag{3.1}$$

После подстановки соотношений (3.1) в (0.2) на функции σ, θ, H_1, H_2 получается замкнутая система дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \partial R_1/\partial x + \operatorname{tg} \theta \partial R_1/\partial y = H_1 + H_2 \operatorname{tg} \theta, \\ \partial R_2/\partial x - \operatorname{ctg} \theta \partial R_2/\partial y = H_1 - H_2 \operatorname{ctg} \theta, \\ \partial H_1/\partial x + \partial H_2/\partial y = 0, \; \partial H_2/\partial x + \partial H_1/\partial y - 2 \operatorname{ctg} 2\theta \partial H_2/\partial y = 0, \end{gathered} \tag{3.2}$$

а функции $g_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ находятся решением системы

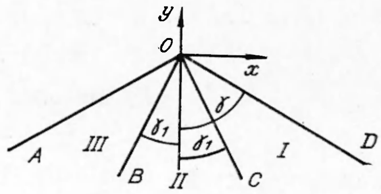
$$\partial g_1/\partial x + \partial g_2/\partial y = 0, \; \partial g_2/\partial x + \partial g_1/\partial y - 2 \operatorname{ctg} 2\theta \partial g_2/\partial y = 0$$

с подставленными в нее значениями $\theta(x. y)$ из решения системы (3.2). Здесь $R_i = \sigma + (-1)^i 2k\theta$ $(i = 1, 2)$.

Базис алгебры Ли, которая соответствует группе преобразований, допустимой системой (3.2), образован операторами [2]

$$\begin{aligned} & X_i = \partial_{x_i}, \quad X_3 = \partial_{R_1} + \partial_{R_2}, \quad X_4 = H_\alpha \partial_{H_\alpha} - x_\alpha \partial_{x_\alpha}, \\ & X_5 = H_2 \partial_{H_1} - H_1 \partial_{H_2} + x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2} + 2k(\partial_{R_1} - \partial_{R_2}), \\ & X_{5+i} = x_i(\partial_{R_1} + \partial_{R_2}) + \partial_{H_i} \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Оптимальная система однопараметрических подалгебр для алгебры Ли (3.3) имеет вид



$$X_3,\ X_6,\ X_4 + \gamma X_5 + \beta X_3,$$
$$X_5 + \beta X_3,\ X_1 + \beta X_6 + \gamma X_7$$

(γ, β — произвольные постоянные; различным значениям γ и β соответствуют неподобные подалгебры).

Для дальнейшего необходимо решение инвариантное относительно подгруппы, порожденной оператором X_4. Оно (в полярной системе координат (r, φ)) запишется как

(3.4) $$H_\varphi = c_3/r,\ H_r = (-2k \sin 2(\theta - \varphi) + c_1 \sin (c_2 - 2\varphi))/r,$$
$$2k \cos 2(\theta - \varphi) = c_3 + c_1 \cos (c_2 - 2\varphi),$$
$$\sigma = (c_1 \sin (c_2 - 2\varphi) - 2k \sin 2(\theta - \varphi))/2 + c_4.$$

4. Рассмотрим задачу о жесткопластическом состоянии плоской деформации клина угла раствора $2\gamma > \pi/2$, нагруженного равномерным давлением p на одной грани. Эта задача в статической постановке рассматривалась многими авторами (достаточно полный обзор в [7]). Возникает вопрос, каким будет распределение напряжений, если давление p превышает предельную нагрузку $p_* = 2k(1 + 2\gamma - \pi/2)$ ($p \geqslant p_*$). Напряженно-деформированное состояние в этой задаче может быть построено так: в областях I и III (см. рисунок) осуществляется напряженно-деформированное состояние, определяемое уравнениями (3.4). Как и в стационарном случае, полагается, что из-за действия односторонней нагрузки клин «изгибается», тогда следует ожидать растягивающего напряжения на стороне OD и сжимающего на стороне OA. Эти две области соединяются решением вида двойной волны, полученным в п. **1** (область II).

Произвольные постоянные в этих решениях определяются из условий непрерывности поля скоростей и напряжений на линиях примыкания $\varphi = 3\pi/2 - \gamma_1$ и $\varphi = 3\pi/2 + \gamma_1$ и из заданных нормальных напряжений на границах клина

$$\tau_{r\varphi} = 0,\ \sigma_\varphi = -p \quad \text{при } \varphi = 3\pi/2 + \gamma,$$
$$\tau_{r\varphi} = 0,\ \sigma_\varphi = 0 \quad \text{при } \varphi = 3\pi/2 - \gamma.$$

Угол γ_1 также находится из этих условий. При этом получается, что сначала необходимо найти $\zeta = \zeta(p)$ решением уравнения

(4.1) $$p = (2k - \zeta)(2\gamma_1(\zeta) + \sin 2(\gamma - \gamma_1(\zeta))).$$

Здесь угол $\gamma_1(\zeta)$ определяется из соотношения $\cos 2(\gamma - \gamma_1(\zeta)) = \zeta/(\zeta - 2k)$. После этого устанавливается угол $\gamma_1 = \gamma_1(\zeta(p))$. В результате имеем следующее напряженно-деформированное состояние: в области I ($3\pi/2 + \gamma_1 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2 + \gamma$) поле напряжений

$$2k \cos 2(\theta - \varphi) = \zeta + (2k - \zeta) \cos (3\pi - 2\varphi + 2\gamma_1),$$
$$\sigma = -p + (2k - \zeta) \sin (\gamma - \varphi + 3\pi/2) \cos (\gamma + \varphi - 2\gamma_1 - 3\pi/2) - k \sin 2(\theta - \varphi),$$

поле скоростей

$$v_\varphi = \zeta/r,\ v_r = (-2k \sin 2(\theta - \varphi) + (2k - \zeta) \sin (3\pi + 2\gamma_1 - 2\varphi))/r;$$

в области II ($3\pi/2 - \gamma_1 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2 + \gamma_1$)

$$v_r = 0,\ v_\varphi = \zeta/r,\ \theta = \varphi - 2\pi,$$
$$\sigma = \zeta\varphi - 2k\varphi - p + (2k - \zeta)(\sin 2(\gamma - \gamma_1) + 3\pi + 2\gamma_1)/2;$$

в области III $(3\pi/2 - \gamma \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2 - \gamma_1)$ поле напряжений

$$2k \cos 2(\theta - \varphi) = \zeta + (2k - \zeta) \cos (3\pi - 2\varphi - 2\gamma_1),$$
$$\sigma = (2k - \zeta) \sin (3\pi/2 - \varphi - \gamma) \cos (3\pi/2 + \gamma - \varphi - 2\gamma_1) -$$
$$- k \sin 2(\theta - \varphi),$$

поле скоростей

$$v_\varphi = \zeta/r, \ v_r = (-2k \sin 2(\theta - \varphi) + (2k - \zeta) \sin (3\pi - 2\varphi - 2\gamma_1))/r.$$

Стационарное решение реализуется, когда $p = p_*$ $(\zeta(p_*) = 0)$. Так как $(dp/d\zeta)_{\zeta=0} = -8k^2(1 + \gamma - \pi/4)$, то из теоремы о неявной функции следует разрешимость уравнения (4.1) относительно ζ в окрестности предельной нагрузки p_*. При этом если $p > p_*$, то $\zeta(p) < 0$. Когда $p \to \infty$, то $\zeta(p) \to -\infty$, а $\gamma_1 \to \gamma$, т. е. область II расширяется до всего клина.

Замечание. «Стационарная» часть скорости (g_1, g_2) получается после построения поля напряжений. В частности, если в начальный момент $t = 0$ клин находился в состоянии покоя, то решением будет $g_1 = g_2 = 0$. Линия $r = g(\varphi)$, отделяющая зону пластичности от покоящейся жесткой зоны, определяется следующим образом: в области II $g = g_0 = \text{const}$, в области I (III) функция $g(\varphi)$ находится решением линейного обыкновенного дифференциального уравнения $\zeta g' - g(rH_r) = 0$ с начальными условиями $g = g_0$ при $\varphi = 3\pi/2 + \gamma_1$ $(\varphi = 3\pi/2 - \gamma_1)$.

Автор выражает благодарность Б. Д. Аннину за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.** Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике.— Новосибирск: Наука, 1984.
2. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
3. **Соколовский В. В.** Теория пластичности.— М.: Высш. шк., 1969.
4. **Новацкий В. К.** Волновые задачи теории пластичности.— М.: Мир, 1978.
5. **Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И.** Групповые свойства уравнений упругости и пластичности.— Новосибирск: Наука, 1985.
6. **Peradzynski Z.** Hyperbolic flows in ideal plasticity // Arch. Mech.— 1975.— V. 27, N 1.
7. **Галин Л. А.** Упругопластические задачи.— М.: Наука, 1984.

г. Новосибирск *Поступила 29/XII 1988 г.*

УДК 539.4

Б. Д. Аннин, А. Г. Колпаков

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СЛОИСТЫХ И ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ С ЗАДАННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Задача проектирования композитов с заданными наборами усредненных характеристик [1, 2], имеющая значительный практический интерес, представляет в общем случае обратную задачу, относящуюся по общей классификации [3] к задачам синтеза. Она близка также к задачам оптимального управления дифференциальными уравнениями с частными производными [4] и при поиске частных решений может быть сведена к ней (см. [5]). Исследование задачи проектирования в общем случае ограничено небольшим числом теоретических результатов [5].

Вместе с тем для широко используемых в практике классов композитов (слоистых и волокнистых) наличие явных выражений для усредненных характеристик и результаты работ [2, 6, 7] (в части оценки локальных напряжений) позволяют свести задачу проектирования к частным случаям интегральных уравнений первого рода, для которых удастся развить методы решения, достаточно эффективные для их использования в решении практических задач.

1. Проектирование слоистых композитов с заданными усредненными характеристиками. Пусть композит образован периодически чередующи-