Проблемы логики и методологии науки

УДК 165.4
DOI: 10.15372/PS20220205

А.В. Хлебалин, В.В. Целищев

ПОНИМАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА: ЛОГИКА vs. МАТЕМАТИКА*

Анализируется противопоставление понимания математического доказательства его формализации. Показано, что в этом противопоставлении смешаны две проблемы: соотношение математической логики и математической практики доказательства и соотношение математического и формального доказательств. Демонстрируется, что математическое доказательство, являясь содержательным, имеет целью объяснение, тогда как формальное доказательство лишено смысла и ограничивается представлением правил. Анализируется претендующая на то, чтобы преодолеть это противопоставление, стратегия Д. Макбет, согласно которой целостная система знаков соотносится с математическими идеями, которые выражены в обыденном языке, и логическая реконструкция перевода этих идей в серию манипуляций со знаками упускает из виду содержание идей. Показана уязвимость такой позиции и вместо нее предлагается интерпретация интенсионального содержания математического дискурса как результата перевода математического утверждения в формальную систему.

Ключевые слова: математическое доказательство; понимание; логика; математика; язык математики

A.V. Khlebalin, V.V. Tselishchev

UNDERSTANDING OF THE MATHEMATICAL PROOF: LOGIC vs. MATHEMATICS

The article analyzes the opposition of the understanding of the mathematical proof and its formalization. It is shown that two problems are mixed in this opposition; those are

* Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-011-00723).

the relation between mathematical logic and mathematical proof practice and the one between mathematical and formal proofs. It is demonstrated that the mathematical proof being meaningful aims at explaining, while the formal proof is meaningless and confines itself to representing the rules. The strategy of D. Macbeth, which claims to overcome the mentioned opposition, is analyzed. According to this strategy, the integral system of signs is correlated with mathematical ideas that are expressed in ordinary language and the logical reconstruction of the translation of these ideas into a series of manipulations with signs loses sight of the content of the ideas. The vulnerability of such a position is shown and instead an interpretation of the intensional content of mathematical discourse as a result of the translation of a mathematical statement into a formal system is proposed.

Keywords: mathematical proof; understanding; logic; mathematics; language of mathematics

Одной из наиболее интересных тем в философии математики последнего времени является концепция понимания математического доказательства в противовес формальному его представлению. Сама по себе проблематика подобного рода взывает к широкому кругу тем – от роли математической логики и теории доказательства до семантики математического дискурса. В этих дискуссиях все громче звучат призывы к признанию важности неформальных контекстов, вплоть до попыток создания логики неформальной математики. Преимущества неформальных контекстов состоят прежде всего в том, что они представляют собой практику математики. Если не принимать во внимание ранние интуиционистские идеи Л. Брауэра, согласно которым язык не является адекватным средством математического творчества, практика здесь понимается как выражение в естественном языке идей и концепций математики. Естественно, что в связи с этим возникает вопрос о месте математической логики, которая была призвана устранить «естественную расплывчатость» естественного языка. Этот процесс устранения расплывчатости непосредственно связан с усилением строгости математического теоретизирования.

Строгость подобного рода имеет много вариаций и градаций, но конечным этапом в этом ряду является «механизация» процесса доказательства, представляющего собой формальную структуру манипулирования знаками по четко определенным правилам. Именно этот «механический» характер фрагмента математического мышления (а именно доказательства) часто противопоставляется творческой активности в получении доказательства. Это противопоставление имеет ряд аспектов, одним из которых является противопоставление манипуляций с не обладающими значением знаками или символами и вполне осмысленными контекстами математического теоретизирования. В последнем случае речь идет о «понимании», в то время как в первом – о простой «комбинаторике».

В первую очередь укажем на странность этого противопоставления в буквальном виде. Дело в том, что при анализе доказательства максимальная ясность (и стало быть, строгость) достигается тогда, когда это доказательство может быть выполнено человеком с максимальной тщательностью. Именно этот идеал человеческой тщательности (математик с карандашом и бумагой) лежит в основе концепции «механического» доказательства. Таким образом, оказывается, что при окончательном анализе описанное выше противопоставление является противопоставлением «ментальной» активности математика (с имеющимся под рукой естественным языком) его «механической» активности (с записью в некоторой системе нотации). При такой постановке вопроса механицизм утрачивает часть своей зловещей функции потери понимания концепций в процессе доказательства.

При обсуждении подобного рода вопросов следует различать две отдельные темы. Первая состоит в соотношении математической логики, которая ассоциируется с «механизмом», и математической практики. Значительная часть математиков полагают, что математическая логика не оказала и не оказывает никакого влияния на математику и даже такие значимые результаты, как теоремы Гёделя о неполноте арифметики, никак не отразились на развитии математических исследований. Г. Крайзель, видный специалист в области теории доказательства, очень четко выражает эту точку зрения, полагая упомянутое влияние очень малым [6]. Вторая тема – соотношение математического доказательства с формальным доказательством. Предметом настоящей статьи является именно соотношение «математического» дискурса в форме содержательного размышления и «логического» дискурса, оперирующего правилами, в соответствии с которыми осуществляются манипуляции с символами. Другими словами, это упомянутая выше вторая тема, обсуждение которой вносит существенный вклад в понимание первой темы.

Прежде всего, важным аспектом здесь является противопоставление «логического» и «математического» вопреки распространенному мнению, что логика является математической по крайней мере в той области, которая имеет дело с кодификацией математического мышления. Противопоставление может быть проиллюстрировано параллельным представлением некоторого доказательства в «математическом» виде и в «логическом» виде. Первое содержит лакуны, которые должны заполняться вторым. Интуитивно подразумевается чуть ли не автоматический перевод первого во второе. На самом деле это очень нетривиальный процесс, требующий сноровки и изобретательности, итогом которого является нечто такое, из-за чего трудно признать обе стороны доказательством одного и того же утверждения. Другими словами, мы можем считать в некоторых случаях, что утверждение имеет два разных доказательства.

Эта проблема является более общей, выходящей за пределы формализации математического доказательства. Действительно, известные математические результаты передоказываются, и зачастую нет легкого способа перевода одного доказательства в другое. В данной статье мы не останавливаемся на этом феномене и просто подчеркиваем различие концептуальных посылок осуществляемых доказательств, которое ведет к различному «пониманию» доказательства. В качестве крайнего случая можно привести эпистемологические посылки компьютерного доказательства (обозримость доказательства, погрешимость программы и т.д.). Если попытаться как-то эксплицировать это обстоятельство, то можно, очевидно, сказать, что содержательное математическое доказательство является по природе своей объяснительным, подразумевая под этим, что в нем цепочка размышлений, или извлечения следствий, взывает к смыслу. Что касается формального доказательства, то оно взывает к правилам, которые лишены смысла.

Само понятие смысла, к которому мы прибегаем здесь, крайне расплывчато. Это может быть апелляция к семантике, или же к «идеям», статус которых гораздо неопределеннее, чем сам смысл. Явно предполагается, что извлечение следствий из идей радикально отличается от извлечения следствий по правилам. Здесь, пожалуй, более внятной стратегией является апелляция не к «идеям» как таковым, а к определениям. Д. Гильберт говорит о «хорошо подобранных определениях», структура которых позволяет определить поле смысловых переходов [1, с. 228]. Более важное обстоятельство – введение в рамках этого поля сокращений, являющихся важным ингредиентом математического размышления. Сокращение подобного рода позволяет отдельным символам представлять совокупность идей, и установление соотношений таких символов и есть существенная часть математического доказательства. Если же мы попытаемся установить параллелизм математического и логического доказательств, рассматривая роль сокращения, то обнаружим заметное расхождение, поскольку в логике «сокращение» есть просто сокращение, в то время как в математике это часть математического творчества.

Однако разная роль понятия сокращения в качестве признака различия между математическим и логическим доказательствами сталкивается с двумя затруднениями. Первое состоит в том, что сокращение есть операция с символами, которые в математике играют креативную роль. Но вкладывание смысла в символ превращает последний в особую категорию, где символ перестает играть роль знака как обозначающего некоторый объект. В этом отношении следует признать важность вводимого Г. Фреге различения денотата и смысла знака. Тогда математическое доказательство проводится в пространстве смыслов, а логическое – в пространстве денотатов. Как известно, отсутствие одно-однозначного соответствия между смыслом и денотатом знака (наличие денотата и отсутствие смысла, и наоборот) делает математику «безденотатной», что вряд ли удовлетворительно.

Второе затруднение связано с существованием такого вида математического дискурса, в котором одинаково присутствуют как математический, так и логический компоненты. Речь идет об алгоритмах, где правила столь же важны, как и идеи в основе алгоритма. Зачастую идеи облекаются в форму алгоритма в такой степени, что их различение на определенной стадии математического образования попросту непостижимо. Например, попробуйте объяснить школьнику, что лежит в основе алгоритма деления «столбиком» или извлечения корня квадратного из 2.

Эти два затруднения говорят о том, что формализация не есть какая-то вынужденная трансформация математической практики, лишенная определенных достоинств содержательного математического доказательства. Такое заключение может расцениваться как некоторого рода мостик между постижимостью математического доказательства и резонностью доказательства формального. Быть может, большего понимания различения формального и содержательного в математическом дискурсе можно достичь выходом за пределы собственно математики, обратившись к философскому объяснению двух испостасей математического доказательства: доказательства по Декарту и доказательства по Лейбницу.

По Декарту, размышление над доказательством приводит внезапно к полному его пониманию. По Лейбницу, установление доказательства состоит в проверке каждого шага механическим образом. Как замечает Я. Хакинг, «эти два идеала [доказательства] тянут в разные стороны» [3, с. 61], и признания этого обстоятельства достаточно для самого противопоставления «доказательство – понимание». «Математическое» доказательство апеллирует к пониманию всего доказательства в целом, даже если нет четкого представления о его шагах или даже если эти шаги отсутствуют. «Логическое» доказательство есть вычисление, где эти самые шаги и составляют это самое доказательство. Соотношение этих двух типов доказательства определяется текущей математической практикой. С одной стороны, «определенный тип философского ума глубоко впечатлен переживанием картезианского доказательства, видением того, почему то-то и то-то должно быть истиной. Это совершенно не похоже, например, на арифметические вычисления или вообще следование правилу. …[С другой стороны, говорится] об отклонениях в феномене математического доказательства, которые возникли в последние полвека. Многие доказательства столь длинны, что в лучшем случае могут быть только лейбницевскими. …Сегодняшняя математическая реальность в значительной степени лейбницевская, а не декартова» [2, с. 47–48].

Таким образом, под противопоставление доказательства и понимания можно подвести философскую базу, которая выводит за пределы вопросов математической практики. Больше того, обращение к философии в данном случае вполне оправданно, поскольку каждая из двух тенденций в осмыслении природы доказательства взывает к рассмотрениям, которые выходят за пределы математики. Картезианская концепция доказательства тесно связана с понятием интуиции. Лейбницевская концепция взывает к представлению об ограниченности возможностей человеческого ума относительно постижения необозримых доказательств. Лучшее осмысление какой-либо идеи состоит в доведении ее до абсурда, а лучшее осмысление какого-либо противопоставления состоит в представлении крайностей. В данном случае такими крайностями является видение доказательства двумя «антагонистами» – А. Гротендиком и В. Воеводским. Гротендик полагал, что доказательство состоит в создании очевидного, в то время как Воеводский не доверяет человеку и передоверяет доказательство компьютерным программам (пруверам). И все же есть определенного рода надежды на преодоление этого дуального способа осмысления феномена доказательства.

Сопоставление Гротендика с Воеводским можно представить как определенного рода пародию, доведение до крайности контраста между картезианским и лейбницевским доказательствами. «Эта пародия, – пишет Дж. Грей, – искажает философию обоих математиков, но, тем не менее, это поучительное сопоставление. Какое видение вы предпочитаете? Крайнее картезианство Гротендика? Или крайнюю лейбницевскую идею Воеводского? ...Они не являются несовместимыми… и я верю, что мы сможем приспособить друг к другу эти взгляды» [2, с. 50].

Один из способов такого приспособления предлагает Д. Макбет, и она движется в противоположном Хакингу направлении. Содержательное математическое доказательство осуществляется в естественном языке, и поэтому понимание доказательства зависит от семантических аспектов языка, включающего огромное число связей и ассоциаций. Однако во многих случаях мы имеем дело с символьным языком, как это происходит в случае алгебраического символизма. Важнейшим фактом оперирования этим символизмом является возможность механического обращения с символами, которые несут в себе семантическую составляющую доказательства.

В такой стратегии осмысления доказательства, которую выдвинула Макбет, есть серьезные лакуны. В частности, она предполагает, что символ, служащий сокращением некоторого контента согласно определению, может быть предметом формальной манипуляции. Больше того, она приписывает эту идею Лейбницу: «По Лейбницу, язык должен проявлять математическое содержание математически прослеживаемым образом, т.е. в форме управляющих манипуляциями знаками правил» [7, p. 43]. Это уже несколько иная классификация идей Лейбница, которая на самом деле взывает к противопоставлению в трактовке языка *lingua characteristic* и *lingua ratiocinator*. Это традиционное противопоставление должно быть преодолено следующим образом: язык должен проявлять математическое содержание математически прослеживаемым образом, т.е. в форме, позволяющей размышлять под личиной серии управляемых правилами манипуляций знаками. То есть язык понимается одновременно как *lingua characteristic* и как *lingua ratiocinator*. Такого рода синкретизм в философии математики требует пояснения. Как при этом, например, мыслится простое арифметическое действие?

Вот пример того, что имеет в виду Макбет. Рассмотрим выражение $7 + 5 = 12$. Как оно получается? В духе кантовского размышления сначала считаем 5 штрихов, затем 7 штрихов и после этого считаем окончательную совокупность – 12 штрихов. Для Канта это было свидетельством того, что в содержании 5 и 7 не было содержания 12, и отсюда, 5 + 7 = 12 является синтетическим утверждением. С другой стороны, можно отметить, что сам акт счета эмпирических объектов является процедурой механической.

Однако можно «зацепиться» за статус считаемых штрихов. Как уже было упомянуто, Д. Гильберт отдал этот вопрос на откуп Канту. Теперь Макбет пытается показать, что синтетическое видение математического символизма Кантом должно уступить место «фрегевскому» Лейбницу, так что каждый знак имеет содержание и смысл. Здесь за штрихом не стоит отдельный объект, который может быть сосчитан. Здесь каждый штрих выражает фрегевский смысл, вносящий свой вклад в смысл всей совокупности.

В механическом доказательстве изображается конкретный вариант совокупности или фигуры. В математическом доказательстве формулируется содержание. Математическое мышление происходит в символической системе, сама природа которой позволяет рассматривать счет как математическую операцию, а не как нечто механическое. Примером такой точки зрения может считаться манипуляция формулами, которая не выглядит чисто механической, а является математически значимой. Любопытно, что значимость подобного рода приобретается за счет семантического содержания терминов обыденного языка, например в теореме, согласно которой произведение двух сумм квадратов целых чисел равно сумме квадратов чисел. Перевод этого утверждения на язык символов позволяет осуществить серию манипуляций с символами, но сами манипуляции при этом уже несут содержательную нагрузку, унаследованную от идей, выраженных в обыденном языке.

Итак, исходная посылка представлена в символическом виде:

$$(a^2 + b^2)\,(c^2 + d^2).$$

Далее следуют чисто механические манипуляции по знакомым правилам:

$$\begin{aligned}
&a^2 c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = \\
&= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = \\
&= a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2abdc + b^2c^2 = \\
&= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.
\end{aligned}$$

И хотя каждый шаг в этих преобразованиях является механическим, целостная процедура обладает математической значимостью.

Д. Макбет настаивает на том, что целостная система знаков обладает этой самой математической значимостью, которой лишена логическая машинерия манипуляции знаками. Другими словами, целостная система знаков соотносится с математическими идеями, которые выражены в обыденном языке, и логическая реконструкция перевода этих идей в серию манипуляций со знаками упускает из виду содержание идей.

Здесь затрагивается еще один аспект математического дискурса. Представление математических идей следует принципу экстенсиональности, что противоречит намекам на присутствие содержания в чистом символизме. Однако как показывает рассмотрение доказательства второй теоремы Гёделя о неполноте арифметики, в математический дискурс вкрадывается интенсиональность, т.е. смысл [5]. Одно из объяснений такого феномена состоит в указании на роль перевода содержательных математических утверждений в формальные, символические системы [4]. Именно здесь нужно искать появление в математическом формальном дискурсе фрегеанского смысла, а не в таинственном «двойственном» прочтении алгебраических формул, которое предлагает Макбет.

Но вот понятие целостной знаковой системы оказывается действительно важным в другом отношении – в различении компонентов того, что подразумевается под собственно логикой как знаковой системой. Логику привычно ассоциировать с синтаксисом, а математический дискурс – с понятием структуры. И в этом случае конфликт между пониманием и доказательством оборачивается конфликтом между структурой и синтаксисом, а именно, что из этих вещей важнее. В связи с этим крайне интересна полемика между (преимущественно) математиком Дж. Саксом и (преимущественно) логиком Б. Дребеном, описанная Дж. Ролзом: «Сакс определяет структуру следующим образом: а) универсум непустых множеств; б) отношения между членами этих множеств. …Изучение математики состоит в осознании структур. В этом и заключается математический опыт. Конечных множеств недостаточно, так что для определения структур используются аксиомы. Аксиомы использовались Никола Бурбаки, которые считали математику наукой о структурах. Гильберт и его последователи использовали аксиомы… для выражения структур. Гёдель иногда использовал синтаксический язык для доказательства теоремы о структуре. Сакс допускал, что синтаксис проще и поэтому имеет смысл начинать изучение логики с синтаксиса. Но, утверждал он, синтаксис не является тем, что представляется фундаментальным. Сакс утверждает, что Дребен думает, что синтаксис является фундаментальным, потому что он прост, а это вообще неверно. …[Со своей стороны] Дребен полагает, что фундаментальной проблемой логики является понимание. Если начать с теории моделей или математических структур как способа понимания логики, получения о ней ясности… мы не можем использовать структуры для прояснения языка, для понимания базисных логических понятий. Взгляд Сакса ведет к представлению о том, что есть нечто метафизическое о языке и логике, что имеется нечто глубинное о них, открываемое изучением структур. Но эта мысль ведет к мистификации» [8, p. 423].

Эта полемика показывает, что «логическое» и «математическое» видения математики, различаемые как «механицизм» и «понимание», вводят в заблуждение, потому что та же самая проблема различения синтаксиса и понимания свойственна и логике, отделенной от математического дискурса. Понимание является проблемой не только для последнего, но и для языка в целом.

Математический дискурс в естественном языке оставляет неопределенными множество понятий, и логическая его формализация преследует цель устранения неоднозначностей. Такая формализация достигается определенной ценой. Эта цена зависит от ряда вещей. Может быть скепсис в отношении того, нужно ли торопиться сделать математическое рассуждение формальным. Большая цена заключается в том, что при формализации есть существенные потери. Дж. Сакс говорит более категорично: «Чем более определенным становится математическое понятие, тем более велика вероятность потерь» [9, p.414]. Конечно же, в реальной математической практике баланс потерь и приобретений является предметом споров. В этом отношении любопытен следующий пример: «Хартли Роджерс прояснил теорию вычислимости, представив сначала основы в интуитивном ключе, и затем уже перешел к выведению следствий в более строгой манере. Клини, отец теории вычислимости, возражал, говоря, что Роджерс не доказал ничего. Но стиль аргументации Роджерса выиграл» [9, p. 415].

Но как было указано выше, дело не только в проблеме формализации именно математического дискурса. Например, логика первого порядка родилась к 1928 г. [1] из принятия одних идей и отбрасывания других в процессе кристаллизации самой идеи «канонической» логики, и многие жалуются, что такая формализация логики упускает многое из того, что было бы желательным для философских целей. Так что кодификация математического рассуждения и соответствующая формализация доказательства представляют собой запутанный процесс, в котором разделение «логически» формального и «математически» содержательного аспектов не может быть проведено ясным и отчетливым образом.

Литература

1. *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. М.: URSS, 2010.

2. *Грей Дж.* Призрак Платона: модернистская трансформация математики. М.: Канон+, 2021.

3. *Хакинг Я.* Почему вообще существует философия математики? М.: Канон+, 2019.

4. *Auerbach D.* Intensionality and the Gödel theorems // Philosophical Studies. 1985. Vol. 48, No. 3. P. 337–351.

5. *Curtis F.* The Autonomy of Mathematical Knowledge: Hilbert's Program Revisited. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

6. *Kreisel G.* Mathematical logic: what has it done for the philosophy of mathematics? // Bertrand Russell: Philosopher of the Century / Ed. by R. Schoenman. London: George Allen & Unwin, 1967. P. 201–272.

7. *Macbeth D.* Proof and understanding in mathematical practice // Philosophia Scientiae. 2012. No. 16–1. P. 29–54.

8. *Rawls J.* Afterword: A reminiscence // Future Pasts: The Analytic Tradition in Twentieth-Century Philosophy / Ed. by J. Floyd, S. Shieh. Oxford: Oxford University Press, 2001. P. 417–430.

9. *Sacks G.* Formal losses // Future Pasts: The Analytic Tradition in Twentieth-Century Philosophy / Ed. by. J. Floyd, S. Shieh. Oxford: Oxford University Press, 2001. P. 413–416.

References

1. *Hilbert, D. & W. Ackermann.* (2010). Osnovy teoreticheskoy logiki [Principles of Theoretical Logic]. Moscow, URSS Publ. (In Russ.).

2. *Gray, J.* (2021). Prizrak Platona: modernistskaya transformatsiya matematiki [Plato's Ghost: The Modernist Transformation of Mathematics]. Moscow, Kanon+ Publ. (In Russ.).

3. *Hacking, I.* (2019). Pochemu voobshche sushchestvuet filosofiya matematiki? [Why Is There Philosophy of Mathematics at All?]. Moscow, Kanon+ Publ. (In Russ.).

4. *Auerbach, D*. (1985). Intensionality and the Gödel theorems. Philosophical Studies, Vol. 48, No. 3, 337–351.

5. *Curtis, F.* (2009). The Autonomy of Mathematical Knowledge: Hilbert's Program Revisited. Cambridge, Cambridge University Press.

6. *Kreisel, G*. (1967). Mathematical logic: what has it done for the philosophy of mathematics? In: Schoenman, R. (Ed.). Bertrand Russell: Philosopher of the Century. London, George Allen & Unwin, 201–272.

7. *Macbeth, D.* (2012). Proof and understanding in mathematical practice. Philosophia Scientiae, 16-1, 29–54.

8. *Rawls, J.* (2001). Afterword: A Reminiscence. In: Floyd, J. & S. Shieh (Eds.). Future Pasts: The Analytic Tradition in Twentieth-Century Philosophy. Oxford, Oxford University Press, 417–430.

9. *Sacks, G.* (2001). Formal losses. In: Floyd, J. & S. Shieh (Eds.). Future Pasts: The Analytic Tradition in Twentieth-Century Philosophy. Oxford, Oxford University Press, 413–416.

Информация об авторах

Целищев Виталий Валентинович – доктор философских наук, профессор, научный руководитель Института философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8).

leitval@gmail.com

Хлебалин Александр Валерьевич – кандидат философских наук, старший научный сотрудник Института философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8).

sasha_khl@mail.ru

Information about the authors

Tselishchev, Vitaliy Valentinovich – Doctor of Sciences (Philosophy), Professor, Scientific Director of the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090, Russia).

leitval@gmail.com

Khlebalin Aleksandr Valerievich – Candidate of Sciences (Philosophy), Senior Researcher at the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090, Russia).

sasha_khl@mail.ru

Дата поступления 31.03.2022