$= 3{,}11 \cdot 10^{-4}$ мм²/кг, $a_{2222} = 4{,}86 \cdot 10^{-4}$, $a_{1122} = 9{,}76 \cdot 10^{-6}$, $b_{11} = -4{,}73 \cdot$ $\cdot 10^{-3}$ (кг/мм²)$^{-1/2}$, $b_{22} = -3{,}78 \cdot 10^{-3}$.

На фиг. 2 показано распределение нормального перемещения по образующей тора. Фиг. 3 иллюстрирует изменение деформации $\varepsilon_{11}$ по внутренней поверхности тороидального сегмента. Указанные зависимости изображены сплошными линиями, штриховыми — аналогичные результаты для тора из анизотропного неразномодульного материала с константами $E_1^t = E_1^c = 6000$, $E_2^t = E_2^c = 3000$, $\nu_1^t = 0{,}25$. Заметно существенное влияние разномодульности на результаты.

В расчетах оболочки принималось 55 точек по образующей (из них одиннадцать точек ортогонализации) и семь точек по толщине. Интегрирование по параметру $t$ проводилось с точностью, позволившей сохранить верными четыре значащих цифры для напряжений. Указанные данные устанавливались в ходе численных экспериментов.

Время решения рассмотренного примера по описанному выше алгоритму на ЭВМ БЭСМ-6 составило 5 мин.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Соснин О. В.** О ползучести материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие.— ПМТФ, 1970, № 5.
2. **Никитенко А. Ф., Цвелодуб И. Ю.** О ползучести анизотропных материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1979, вып. 43.
3. **Амбарцумян С. А.** Основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3.
4. **Ломакин Е. В.** Соотношение теории упругости для анизотропного тела, деформационные характеристики которого зависят от вида напряженного состояния.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 3.
5. **Золочевский А. А.** Об учете разносопротивляемости в теории ползучести изотропных и анизотропных материалов.— ПМТФ, 1982, № 4.
6. **Саркисян Н. Е.** Анизотропия статической и циклической деформативности стеклопластиков типа СВАМ.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1971, т. 24, № 3.
7. **Амбарцумян С. А.** Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982.
8. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
9. **Цвелодуб И. Ю.** К разномодульной теории упругости изотропных материалов.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1977, вып. 32.
10. **Цвелодуб И. Ю.** О построении определяющих уравнений установившейся ползучести.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3.
11. **Исабекян Н. Г.** Две задачи осесимметрично нагруженных оболочек вращения, изготовленных из ортотропного разномодульного материала.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1973, т. 26, № 6.
12. **Азарова Г. Н.** Расчет оболочек из разномодульного материала методом переменных параметров упругости.— В кн.: Тр. XII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван: Ереванский ун-т, 1980, т. 1.
13. **Статика** и динамика тонкостенных оболочечных конструкций/А. В. Кармишин, В. А. Лясковец, В. И. Мяченков, А. Н. Фролов. М.: Машиностроение, 1975.


*Поступила 12/IV 1984 г.*

---

УДК 539.375

# МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ КВАЗИХРУПКИХ СРЕД

*О. В. КОВАЛЕНКО, В. К. СИРОТКИН*

(*Москва*)

Поведение материалов под действием различных нагрузок существенно зависит от характера пластического течения, который определяется внутренней структурой материала, наличием в нем различных дефектов, неоднородностей и т. п. Например, механизм пластического течения металлов связан в основном с движением дислокаций [1, 2]. Разрушение хрупких сред определяется наличием в них микротрещин, приводящих к концентрации напряжений в вершине трещины, где образуется пластическая зона [3]. Поэтому в хрупких средах пластическое течение оказывается микроскопически неоднородным, что существенно отличает их от пластических сред. На необходимость учитывать наличие внутренних неоднородностей при описании деформации и разрушения хрупких сред указано в [4]. В данной работе предполагается, что носителями таких неоднородностей в хрупких средах являются микротрещины.

Модель пластического течения хрупких сред до разрушения впервые предложена в [5], где в основу механизма пластического течения положено взаимное смещение берегов трещины, возникающее из-за наличия пластической зоны вблизи вершины. Однако в [5] предполагалось, что все трещины имеют одинаковый размер. В данной работе эта модель обобщается на случай микротрещин различной длины. Учитывается также ориентация микротрещин относительно главных осей напряжений. Получено уравнение, описывающее поведение материала до разрушения при различных видах нагружения. Предложен критерий разрушения, основанный на представлении о разрушении как пересечении растущих трещин. В рамках предложенного подхода удается, в частности, определить зависимость среднего размера кусков разрушенной породы от параметров нагружения. Результаты решения предложенных уравнений сравниваются с экспериментальными результатами по медленному сжатию образцов канифоли [4, 6].

1. Рассмотрим макроскопические деформации трещиноватой среды. Эти деформации можно представить в виде суммы упругих и пластических деформаций, связанных с наличием пластической зоны вблизи вершины трещины. Упругие деформации искажаются из-за наличия трещин, что приводит, в частности, к зависимости упругих модулей от трещиноватости [7]. Однако в данной работе эти эффекты рассматриваться не будут. Пластическое течение связано с ростом трещин, что приводит к движению пластической зоны через объем образца.

Величину пластических деформаций можно вычислить аналогично тому, как выводится соотношение Орована в рамках дислокационной модели [1, 2]. Для этого рассмотрим сечение образца с линейным размером $L$. Сдвиговые деформации этого образца, вызываемые при движении одной трещины, будут определяться соотношением $\gamma = (\Delta/L)(s/L)$, где $\Delta$ — смещение берегов трещины, связанное с пластическим течением в ее вершине, $s$ — изменение длины этой трещины. Заметим, что величина $\Delta/L$ определяет угол сдвига от одной трещины, а $s/L$ — относительный размер зоны, охваченной деформацией. Дифференцируя полученное соотношение по времени и суммируя по всем трещинам, получим соотношение для скорости сдвиговой деформации

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{G}\frac{d\tau}{dt} + \cos 2\varphi \cdot \Delta \int_0^\infty v(l)\, n(l, t)\, dl, \tag{1.1}$$

где $\gamma$ — макроскопическая сдвиговая деформация; $\tau$ — касательное напряжение; $\Delta$ — смещение берегов трещины; $v$ — скорость роста трещины. Величина $n(l, t)dl$ определяет число границ трещин, пересекающих единицу поверхности, линейные размеры которых лежат в интервале от $l$ до $l + dl$. При выводе этого соотношения предполагалось, что значение $\Delta$ одинаково для всех растущих трещин. В качестве оценки значения $\Delta$ разумно выбрать величину критического раскрытия трещины, входящую в модель Леонова — Панасюка [3, 8]. Множитель $\cos 2\varphi$ учитывает различную ориентацию главных осей упругих и неупругих деформаций, где $\varphi$ — разница между углом скольжения и кулоновским углом. В дальнейшем этот коэффициент будем опускать.

Функция $n(l, t)$ нормирована на полное число трещин, пересекающих единицу поверхности. Предполагая, что число трещин остается постоянным, получим уравнение для функции $n(l, t)$

$$\frac{\partial n(l, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l}\{n(l, t)\, v(l)\} = 0, \tag{1.2}$$

которое, по существу, является уравнением непрерывности для плотности распределения трещин по размерам.

Скорость роста трещин $v(l)$ зависит как от длины трещины, так и от величины внешних нагрузок. Будем предполагать, что при сжатии скорость роста трещин определяется эффективным касательным напряжением [9, 10], которое учитывает взаимодействие берегов трещин:

$$\tau_{эфф} = |\sigma_\tau| = \mu|\sigma_n|, \quad |\sigma_\tau| = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}|\sin 2\theta|, \quad |\sigma_n| = -\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\theta, \tag{1.3}$$

где $\theta$ — угол между направлением $\sigma_1$ и плоскостью трещины; $\sigma_\tau$ и $\sigma_n$ — касательное и нормальное напряжение на трещине; $\mu$ — коэффициент трения между берегами трещин. В данной работе будет использоваться простейшая зависимость скорости роста трещин от $l$ и $\tau_{эфф}$:

$$v(l, \tau_{эфф}) = \begin{cases} 0, & K < K_0, \\ v_п, & K \geqslant K_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

где $K = \tau_{эфф}\sqrt{l}$ — коэффициент концентрации напряжений в вершине трещины. Согласно зависимости (1.4), могут расти только трещины, длина которых превышает величину $K_0^2/(\tau_{эфф}^2)$. При этом скорость роста всех таких трещин одинакова и равна $v_п$.

Из (1.3) и (1.4) следует, что наиболее интенсивно растут трещины максимальных длин в направлениях, близких к направлениям максимальных эффективных напряжений, определяемых условием $\operatorname{ctg} 2\theta = \mu$. Для простоты будем временно пренебрегать разбросом начальных направлений микротрещин, начинающих расти в первую очередь. Ниже такой разброс будет учитываться, это приведет к изменению функции числа растущих трещин.

Соотношения (1.1)—(1.4) определяют динамику деформаций сдвига до момента разрушения. В качестве критерия разрушения примем условие равенства расстояния между растущими трещинами и их средней длины $\bar{l}_m$:

$$\bar{l}_m N_m^{-1/2} = 1, \tag{1.5}$$

где $N_m$ — число растущих трещин, определяемых выражением

$$N_m = \int\limits_{K_0^2/\tau_{\text{эфф}}^2}^{\infty} n(l, t)\, dl. \tag{1.6}$$

Тогда средняя длина растущих трещин будет даваться соотношением

$$\bar{l}_m = N_m^{-1} \int\limits_0^{\infty} l n(l, t)\, dl. \tag{1.7}$$

Уравнение (1.1) с учетом (1.6) перепишем в виде

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{G}\frac{d\tau}{dt} + \Delta v_{\text{п}} N_m. \tag{1.8}$$

Критерий разрушения вида (1.5) корректен в случае, когда рост трещины сопровождается их эффективным пересечением. Такая ситуация должна наблюдаться, в частности, при разрушении за счет сдвига, когда наиболее интенсивный рост трещин происходит в двух взаимно пересекающихся направлениях. Использование критерия (1.5) позволяет не только установить момент разрушения, но и определить средний размер куска разрушенной породы.

2. Прежде чем решать уравнения, описывающие деформации среды для конкретного случая нагружения, их надо привести к безразмерной форме, что позволяет исследовать их основные свойства. Для этого введем функцию

$$N(l, t) = \int\limits_l^{\infty} n(l', t)\, dl',$$

определяющую концентрацию трещин, размер которых превышает $l$. Из уравнения (1.2) следует, что полное число трещин $N_t = N(0, t)$ остается постоянным в процессе деформирования и является характеристикой среды. Из уравнения (1.1) вытекает, что характерным временем, определяющим скорость пластического деформирования, является величина $t_* = (N_t \Delta v_{\text{п}})^{-1}$. Предположим, что в начальном состоянии выполнялось условие $N_t^{-1/2} l_0 \ll 1$, т. е. среда была далека от точки разрушения. Тогда характерной длиной выберем $l_* = v_{\text{п}} t_* = (N_t \Delta)^{-1}$. Наконец, из (1.4) следует, что характерным параметром прочности надо выбрать $\tau_0 = K_0/\sqrt{l_0}$, где $l_0$ — характерный размер микротрещин в начальном состоянии.

Вводя безразмерные величины

$$T = t/t_*,\quad L = l/l_*,\quad s = \tau_{\text{эфф}}/\tau_0,\quad f_m(s) = N_m/N_t,\quad g = \tau_0/G,\quad D = N_t^{1/2}\Delta, \tag{2.1}$$

уравнение (1.8) и условие разрушения (1.5) можно представить в безразмерном виде

$$d\gamma/dt = g\,ds/dt + f_m(s); \tag{2.2}$$

$$f_m(s)\, \bar{L}_m^2 = D^2. \tag{2.3}$$

Из соотношений (2.1)—(2.3) видно, что характер деформирования до разрушения определяется единственным безразмерным параметром $g$, который определяет величину упругих деформаций. Кроме того, необходимо задать закон деформирования (например, зависимость $\gamma(T)$ или $s(T)$). В то же время сам момент разрушения будет определяться безразмерным параметром $D$ — отношением смещения берегов трещины к расстоянию между трещинами.

Для решения уравнений, описывающих деформацию среды, необходимо задать характер внешнего нагружения. Рассмотрим случай постоянной скорости деформации $\dot{\gamma} = \text{const}$. Единственным безразмерным параметром, характеризующим внешнее нагружение, будет

$$R = \dot{\gamma}/(N_t \Delta v_{\text{п}}) \equiv d\gamma/dT.$$

Тогда уравнение (2.2) запишем как

$$g\,ds/dT = R - f_m(s).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$T = g\int_0^s \frac{ds'}{R - f_m(s')} \tag{2.4}$$

и задает в неявном виде зависимость $s(T)$.

Как видно из определения (2.2), функция $f_m(s) \ll 1$. Тогда из выражения (2.4) следует, что необходимо рассмотреть два случая: $R > 1$ и $R < 1$. В первом случае знаменатель в подынтегральной функции (2.4) никогда не обращается в нуль. При малых напряжениях $f_m(s) \ll 1$ и зависимость $s(T)$ носит линейный характер:

$$s(T) = RT/g. \tag{2.5}$$

С ростом напряжений $f_m(s)$ растет и пластическое течение начинает играть заметную роль. При этом на кривой $s(T)$ появляется нелинейный участок. При дальнейшем возрастании $s$ $f_m(s)$ достигает своего предельного значения и зависимость $s(T)$ снова становится линейной: $s(T) = (R - 1)T/g$. В этом случае пластическое течение приводит к уменьшению модуля $G$ ($G_{эфф} = G(1 - 1/R)$), и появляется зависимость эффективного модуля упругости $G_{эфф}$ от скорости деформации.

Во втором случае ($R < 1$) роль пластического течения оказывается более существенной. При малых $s$ зависимость $s(T)$ носит упругий характер, задаваемый выражением (2.5). С ростом напряжений $f_m(s)$ растет и знаменатель в выражении (2.4) стремится к нулю. При этом $s$ асимптотически приближается к своему предельному значению $s_{max}$, определяемому неявным выражением

$$f_m(s_{max}) = R. \tag{2.6}$$

Для того чтобы получить конкретный вид деформационных кривых, момент разрушения и средний размер кусков разрушенной породы, необходимо задаться конкретным видом распределения трещин по размерам. В качестве такого распределения возьмем равномерное распределение

$$n_0(l) = (N_t/l_0)\eta(l_0 - l), \tag{2.7}$$

но оно плохо описывает распределение трещин в широком интервале $l$. Однако в случае малых скоростей деформации ($R \ll 1$) вклад в деформации дает небольшая доля трещин вблизи максимального размера $l_0$. Поэтому в этом случае распределение вида (2.7) оказывается довольно общим.

Для величины $f_m$, определяемой формулами (2.1), в случае начального распределения (2.7) нетрудно получить выражение

$$f_m(s) = (1 - s^{-2})\eta(1 - s^{-2}). \tag{2.8}$$

Здесь учтено, что при постоянной скорости деформации трещины не останавливаются, поэтому растущими являются все трещины, чей начальный размер превосходит величину $K_0^2/\tau_{эфф}^2$. Доля этих трещин от общего их числа, очевидно, равна $(1/l_0)\left(1 - K_0^2/\tau_{эфф}^2\right)$, откуда имеем (2.8).

Подставляя (2.8) в (2.4) и производя интегрирование, получим

$$T = \begin{cases} g\dfrac{1}{R}s, & s \leqslant 1, \\[2ex] g\left\{\dfrac{1}{R} + 1 - s + \dfrac{1}{2\sqrt{1-R}}\ln\left[\dfrac{1 + s\sqrt{1-R}}{1 - s\sqrt{1-R}}\,\dfrac{1-\sqrt{1-R}}{1+\sqrt{1-R}}\right]\right\} & s \geqslant 1. \end{cases}$$

Максимальное напряжение, определяемое соотношением (2.6), $s_{max} = (1 - R)^{-1/2}$. При малых скоростях деформирования ($R \ll 1$) превышение максимального значения $s_{max}$ над упругим пределом $s = 1$ оказывается очень малым: $s_{max} - 1 = R/2$. Отсюда видно, что экспериментальное наблюдение «переходной» зоны, где происходит переход от упругого режима к режиму пластического течения, весьма затруднено.

Перейдем к определению величины куска разрушенной породы. Разрушение может произойти на почти упругом участке, в «переходной» зоне и на асимптотике. Случай разрушения на линейном участке отвечает условию

$$f_m(s_p) \ll R, \tag{2.9}$$

где $s_p$ — напряжение в момент разрушения, а условие разрушения принимает вид

$$s_p - 1 = (2R^2D^2/g^2)^{1/3}. \tag{2.10}$$

Подставляя (2.8) и (2.10) в условие (2.9), получим, что разрушение происходит на линейном участке, если выполняется условие $R \gg 16D^2/g^2$. В этом случае получим следующее выражение для среднего размера кусков: $\bar{L}_m - (gD^2/4R)^{1/3}$.

Таким образом, при достаточно больших скоростях размер кусков разрушенной породы оказывается обратно пропорционален корню кубическому из скорости деформации.

Второй случай, допускающий аналитическое рассмотрение, отвечает разрушению на асимптотике. При этом должно выполняться условие $s_{max} - s_p \ll s_{max} - 1 \approx \approx R/2$. Поэтому средний размер кусков разрушенной породы находится просто из условия $f_m(s_{max}) = R$. Тогда

$$\bar{L}_m = D/\sqrt{R}. \tag{2.11}$$

Условие применимости этого приближения будет определяться неравенством $R \ll \ll 4D^2/g^2$.

Таким образом, при малых скоростях деформирования средний размер кусков разрушенной породы оказывается обратно пропорционален корню квадратному из скорости деформации.

3. Рассмотрим влияние ориентации микротрещин. Предположим, что в среде до нагружения не было какого-либо выделенного направления. В этом случае распределение микротрещин по углам должно быть изотропным: $n_0(l, \theta) = (1/\pi)n_0(l)$ ($\theta$ — угол между плоскостью трещины и главным напряжением $\sigma_1$).

В каждый момент времени угловая плотность растущих трещин в направлении $\theta$

$$N_m(\theta) = \frac{N_t}{\pi}\left(1 - \frac{\tau_0^2}{\tau^2_{эфф}(\theta)}\right)\eta\left(1 - \frac{\tau_0^2}{\tau^2_{эфф}(\theta)}\right), \tag{3.1}$$

где $\tau_{эфф}(\theta)$ взято из (1.3).

Проинтегрировав (3.1) по углам $\theta$, получим полное число растущих трещин. Если выполняется условие $R \ll 1$, то работает узкая область углов $|\theta - \theta_0| \ll 1$ вблизи направлений максимальных эффективных напряжений, определяемых соотношением $\operatorname{ctg} 2\theta_0 = \mu$. В этом случае полное число растущих трещин дается формулой

$$N_m(\tau_{эфф}) = \frac{8}{3\pi\sqrt{2}} N_t \left(\frac{\tau_{эфф} - \tau_0}{\tau_0}\right)^{3/2} \left[\frac{\tau_0\sqrt{1+\mu^2}}{\frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}}\right]^{1/2}, \tag{3.2}$$

где $\tau_{эфф} = \tau_{эфф}(\theta_0)$ — эффективные напряжения в направлении $\theta_0$. В безразмерных обозначениях п. 2 имеем

$$f_m(s) = \alpha(s-1)^{3/2}\left[\frac{\tau_0\sqrt{1+\mu^2}}{\frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}}\right]^{1/2}, \tag{3.3}$$

где $\alpha = 8/(3\pi\sqrt{2})$ — численный коэффициент.

Отметим, что без учета ориентации при $s - 1 \ll 1$ $f_m(s)$ была бы линейной функцией от $s - 1$, как это видно из формулы (2.8). Нелинейность выражения (3.3) по $(s - 1)$ обусловлена зависимостью от напряжения ширины угла, в котором возможен рост трещин. Кроме того, дополнительный эффект возникает из-за наличия последнего множителя в (3.3), в знаменателе которого стоит $(|\sigma_1 - \sigma_3|)/2 \approx \tau_0 + \mu P$. При сильном гидростатическом обжатии ($P \gg \tau_0$) этот множитель существенно уменьшает полное число растущих трещин. Если же обжатие несущественно, то этот множитель близок к единице. В целом влияние ориентации микротрещин сводится к изменению зависимости числа растущих трещин от напряжений.

Для безразмерного максимально достижимого напряжения из уравнения (2.4) с учетом (3.3) получаем $s_{max} - 1 \approx (R/\alpha)^{2/3}$. При этом, если выполняется условие

$$\frac{s_p - 1}{s_{max} - 1} \approx \left[\left(\frac{5}{2}\frac{D}{g}\right)^6 \frac{\alpha^4}{R}\right]^{2/21} \ll 1, \tag{3.4}$$

разрушение произойдет на линейном участке деформационной кривой. В этом случае средний размер куска разрушенной породы

$$d/l^* \approx \left(\frac{144\pi^2}{125}\right)^{1/7}\left(\frac{g^3D^4}{R^3}\right)^{1/7}\left(\frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2\tau_0\sqrt{1+\mu^2}}\right)^{1/7}. \tag{3.5}$$

Когда $1 - \left[\left(\frac{5}{2}\frac{D}{g}\right)^6 \frac{\alpha^4}{R}\right]^{-\frac{2}{21}} \ll 1$, разрушение происходит на асимптотике, а средний размер куска определяется формулой (2.11).

4. Перейдем к сравнению результатов предложенной модели с экспериментальными данными [4], где производилось медленное сжатие цилиндрических образцов с постоянной скоростью осевой деформации $\dot{\varepsilon}_1 = \mathrm{const}$ и постоянным радиальным обжатием $\sigma_2 = \mathrm{const}$, что достигалось пластическим течением металлической обоймы. Такая геометрия несколько отличается от рассмотренного случая постоянной скорости сдвиговой деформации при постоянном нормальном давлении. Однако, предполагая линейность зависимости объемных деформаций от давления и учитывая уравнение (1.1), нетрудно получить следующее выражение для скорости деформации:

$$\frac{3}{2}\dot{\varepsilon}_1 = \left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{G}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2} - \mu}\frac{d\tau}{dt} + \Delta v_{\text{п}} N_t, \tag{4.1}$$

где $K$ — модуль объемного сжатия.

Это уравнение фактически эквивалентно уравнению (1.1), и поэтому к нему применимы решения п. 3.

Величину $\Delta$ можно оценить, используя связь между максимальным критическим раскрытием и предельным коэффициентом концентрации напряжений [3]. Так, для сред типа эпоксидной смолы получим $\Delta \sim 10^{-6}$ см. Отношение $g = \tau_0/G$ для канифоли составляет $\sim 10^{-3}$, если в качестве $\tau_0$ взять прочность на сдвиг; $N_t$ возьмем $\sim 10^3$ см$^{-2}$ [11]. Более сложен вопрос об оценке скорости роста трещин при медленном деформировании, когда рост трещины происходит за счет пластического течения в вершине. Поэтому разумно предположить, что увеличение длины трещины происходит в результате поглощения дислокаций. В этом случае получим оценку

$$v_{\text{п}} \sim N_d^{1/2} b v_d \sim 10^{-4} v_d,$$

где $N_d$ и $v_d$ — плотность и скорость движения дислокаций; $b$ — вектор Бюргерса. Беря для $v_d$ предельное значение $v_d \sim 10^5$ см/с, имеем $v_{\text{п}} \sim 10$ см/с.

В [4] исследовались две скорости деформации $\dot{\varepsilon}_1 = 3\cdot10^{-6}$ и $9\cdot10^{-5}$ с$^{-1}$. Тогда, используя приведенные выше параметры модели и учитывая уравнение (4.1), найдем $R = 4{,}5\cdot10^{-4}$ и $1{,}4\cdot10^{-2}$.

При этих значениях параметров левая часть неравенства (3.4) равна $\approx 0{,}3$, что дает основание при определении среднего размера куска пользоваться формулой (3.5). Для использовавшихся в эксперименте [4] скоростей деформации $\dot{\varepsilon}_1 = 3\cdot10^{-6}$ и $90\cdot10^{-6}$ с$^{-1}$ формула (3.5) дает средний размер куска 53 и 11 мм соответственно. Экспериментальные размеры имеют существенно меньшие значения — соответственно 13 и 3,9 мм. По-видимому, столь сильное несоответствие результатов обусловлено дополнительным дроблением уже разрушенной среды, описанным в [6]. Условием применимости полученных формул (3.5) и (2.11) является сброс напряжений сразу после пересечения трещин, тогда как в эксперименте нагружение проводилось до достижения определенного значения деформации и размер куска в момент разрушения не известен. Ясно, что в этих условиях формула (2.11) для разрушения на асимптотике должна давать результаты, более близкие к экспериментальным. Средние размеры кусков, рассчитанные по формуле (2.11), равны соответственно 14 и 2,5 мм для двух скоростей деформации, что хорошо согласуется с результатами эксперимента. В случае разрушения на асимптотике даваемый формулой (2.11) средний размер куска не зависит от полного числа трещин $N_t$, которое заранее нам не известно.

Следует заметить, что желательны эксперименты с бóльшим числом скоростей деформации, так как по двум экспериментальным точкам нельзя проверить полученные зависимости. Можно ожидать, что при малых скоростях деформации зависимость среднего размера куска от скорости деформации будет близка к $\sim \dot{\varepsilon}^{-1/2}$, а при больших скоростях $\sim \dot{\varepsilon}^{-3/7}$.

Авторы благодарят Б. М. Тулинова за ценные обсуждения в процессе работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Гилман Д. Д.** Динамика дислокаций и поведение материалов при ударном воздействии.— Сб. пер. Механика, 1970, № 2.
2. **Kelly J. M., Gillis P. P.** Continuum description of dislocations under stress reversals.— J. Appl. Phys., 1974, v. 45, N 3.
3. **Ирвин Дж., Парис П.** Основы теории роста трещин и разрушение.— В кн.: Разрушение. М.: Мир, 1976, т. 3.
4. **Родионов В. Н., Сизов И. А.** Проявление неоднородности напряженного состояния при разрушении горных пород.— ФТПРПИ, 1981, № 4.

5. **Belgaumker B. M.** Shock propagation and crack in materials.— In: Proc. Int. Conf. Fract. Mech. and Technol., Hong-Hong, 1977, v. 2. Alphen aan den Rijn, 1977.
6. **Цветков В. М., Лукишов Б. Г., Лифшиц Л. Д.** Формирование осколков при дроблении хрупкой среды в условиях всестороннего сжатия.— ФТПРПИ, 1979, № 3.
7. **Салганик Р. Л.** Механика тел с большим числом трещин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
8. **Панасюк В. В.** Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1966.
9. **Черепанов Г. П.** О развитии трещин в сжатых телах.— ПММ, 1966, т. 30, № 1.
10. **Melville P. H.** Fracture mechanics of brittle materials in compression.— Intern. J. Fracture, 1977, v. 13, p. 532.
11. **Бетехтин В. И., Владимиров В. И. и др.** Сообщение 1. Деформация и развитие микротрещин.— Пробл. прочности, 1979, № 7.


*Поступила 17/IV 1984 г.*

---

УДК 539.217.1+539.214

# О ПОРООБРАЗОВАНИИ, УРАВНЕНИЯХ СОСТОЯНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ

*О. Б. НАЙМАРК*

(*Пермь*)

Под сверхпластическим понимают такое состояние и поведение материалов, при котором существенно возрастает их способность деформироваться (иногда на сотни и тысячи процентов) без признаков макроскопического разрушения с одновременным уменьшением напряжения текучести [1, 2]. В настоящее время установлено, что эффект сверхпластичности проявляется почти на всех машиностроительных сплавах на основе железа, никеля, титана, алюминия, включая труднодеформируемые инструментальные и жаропрочные стали и сплавы, композиционные, металлокерамические и керамические материалы.

Традиционно выделяют два основных вида сверхпластичности: структурную (изотермическую) сверхпластичность, обусловленную ультрамелкозернистой структурой, и сверхпластичность перехода в интервале температур фазового превращения. Особенности проявления эффекта сверхпластичности свидетельствуют о необходимости учета структуры материала, а сильное влияние скорости деформирования на режимы сверхпластичности — корректного описания релаксационных процессов. Изучению влияния структуры материала, порообразования на сверхпластическое поведение и его устойчивость посвящена данная работа.

Основным структурным признаком сверхпластической деформации при определенных температурно-скоростных режимах является массовое перемещение зерен типа «перетекания». Массовость таких перемещений обеспечивает исключительно высокую пластичность без заметной деформации отдельных зерен. Развитие почти «гидродинамического» характера течения по отношению к каждому конкретному зерну при сверхпластичности естественно связать с появлением свободного объема. Известно, что пластическое деформирование сопровождается образованием микротрещин, пор и это явление получило название пластического разрыхления [3]. В [4, 5] изучен механизм сверхпластичности, сопровождающийся интенсивным порообразованием, и показано, что наличие пор, микротрещин является важным структурным фактором, обеспечивающим необычно высокую пластичность.

В качестве параметра, определяющего объемную концентрацию и преимущественную ориентацию пор, микротрещин, может служить симметричный тензор $p_{ik} = n\langle s_{ik}\rangle$, где $n$ — число микротрещин в единице объема, а «микроскопическая» величина

$$s_{ik} = s\nu_i\nu_k \tag{1}$$

характеризует объем и ориентацию микротрещины нормального отрыва с основанием $\mathbf{S}_D = S_D\nu$ и вектором $\mathbf{b} = b\nu$ скачка смещений [6]. Объем микротрещины есть $s = \mathrm{Sp}\,s_{ik} = S_D b$, а билинейная по отношению к компонентам единичного вектора $\nu$ структура тензора $s_{ik}$ аналогична, например, структуре тензора ориентации в физике полимеров и жидких кристаллов [7].

Закономерности трещинообразования в поликристаллических твердых телах связаны с существенной гетерогенностью их микроструктуры [8]. Зародышами микротрещин в металлах являются скопления дислокаций, границы блоков, межзеренные границы. Зародыши, превышающие некоторый критический размер, способны при определенных условиях увеличить свой объем и развиться в микротрещину. В [9, 10] экспериментально исследован механизм микроразрушения, заключающийся в ускорении роста имеющихся микротрещин и в зарождении новых в результате сброса энергии упругой деформации, выделяющейся при разрушении микрообъема. Этот механизм позволяет предложить модель разрушения, основанную на вычислении энергии упру-