УДК 532.517

С. Р. Богданов

О КОНСТАНТАХ КОЛМОГОРОВА В СПЕКТРАХ АНИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В [1, 2] предложен метод описания развитой изотропной турбулентности за решеткой, основанный на гипотезе скейлинга (ГС). В его рамках возмущения поля скорости в энергосодержащем и инерционном интервалах описываются универсальными спектральными функциями. При этом зависимость от расстояния x до решетки полностью определяется лишь двумя величинами, которые можно назвать секулярными: средней скоростью диссипации энергии $\langle\varepsilon\rangle$ и корреляционным радиусом (интегральным масштабом) турбулентности r_c. В частности, для компонент тензора

$$F_{ij} \equiv (2\pi)^{-3} \int \langle u_i(\mathbf{x})\, u_j(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = P_{ij}F \tag{1}$$

эта зависимость конкретизируется соотношением

$$\bar{F}(k, x) = \bar{r}_c^{\beta+2}\varphi(kr_c), \quad \bar{k} \ll 1. \tag{2}$$

Здесь $P_{ij} = \delta_{ij} - \theta_i\theta_j$; $\theta_i = k_i/k$; $k = |\mathbf{k}|$; $F = F_{ii}$; $\beta \approx 5/3$ — спектральный индекс; черта над величиной означает обезразмеривание с помощью колмогоровских масштабов длины $r_d = (\eta^3/\langle\varepsilon\rangle)^{1/4}$ и времени $t_d = (\eta/\langle\varepsilon\rangle)^{1/2}$; η — коэффициент кинематической вязкости; φ — универсальная функция. В инерционном интервале, где $kr_c \gg 1$, функция φ имеет асимптоту $\frac{C_1}{4\pi}(kr_c)^{-11/3}$, которая соответствует известному выражению для спектральной плотности энергии $E(k) = C_1\langle\varepsilon\rangle^{2/3}k^{-5/3}$ [3] (C_1 — константа Колмогорова).

В рамках такого подхода удается рассчитать зависимость всех параметров турбулентности от x. В частности, для C_1 с учетом масштабной размерности $-\mu/2$ поля ε получаем

$$C_1 \sim \left[\mathrm{Re}_M\left(\frac{x-x_0}{M}\right)^{1-n}\right]^{\alpha}, \tag{3}$$

где $\mathrm{Re}_M \equiv UM/\eta$; M — размер ячейки решетки; $n = 48/(40-3\mu) \approx 1{,}2$ — показатель затухания интенсивности турбулентности; $\alpha = 2\mu/(8-3\mu)$.

При обобщении метода на случай анизотропной турбулентности прежде всего возникает проблема описания зависимости спектральных тензоров от ориентации θ волнового вектора. Соответственно к параметрам $\langle\varepsilon\rangle$ и r_c необходимо добавить дополнительные секулярные величины, характеризующие анизотропию. В качестве таких величин используются, например, компоненты тензора Рейнольдса $\langle u_iu_j\rangle$ [4, 5], а также тензора, получаемого из F_{ij} в результате интегрирования по всем возможным значениям θ [6]. При этом параметризация спектральных тензоров осуществляется непосредственно, однако возникает функциональный произвол, связанный с определением вида скалярных функций. Его удается устранить лишь при слабой анизотропии, путем линеаризации.

К указанной проблеме можно подойти с другой стороны. В настоящее время накоплен значительный объем данных [7, 8], свидетельствующих об отсутствии изотропии не только в энергосодержащем, но и в инерционном интервале волновых чисел анизотропной турбулентности. В то же время и в продольных, и в поперечных спектрах, которые существенно отличаются с точки зрения ориентационной структуры, обнаруживаются участки, где выполняется «закон пяти третей». Указанные два факта совместимы лишь тогда, когда в инерционном интервале зависимости спектральных функций от k и θ факторизуются. Поскольку же в рамках ГС единым образом описываются все длинноволновые возмущения, факторизация должна сохраняться и в энергосодержащем интервале. В результате можно предложить следующие соотношения, обобщающие формулы (1), (2) на анизотропный случай:

$$F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = f_{ij}(\mathbf{x}, \theta)\, r_c^{-\beta+2}\varphi(kr_c), \quad \bar{k} \ll 1, \tag{4}$$

и аналогичные соотношения для спектральных функций более высокого порядка.

Некоторые следствия, вытекающие из (4), допускают непосредственную проверку. Так, например, с его помощью нетрудно получить формулы для констант Колмогорова C_{ij} и C_1^{a}, входящих в выражения для одномерных взаимных и полного спектров анизотропной турбулентности в инерционном интервале [8]:

$$C_{ij} = \frac{C_1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \varkappa^{2/3} f_{ij}(\mathbf{x}, \theta)\, d\varkappa\, d\varphi; \quad C_1^{\mathrm{a}} = \frac{C_1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 f_{ii}(\mathbf{x}, \theta)\, d\varkappa\, d\varphi. \tag{5}$$

Согласно (5), C_{ij} зависят от f_{ij}, а значит, являются функциями параметров анизотропии. Конкретизировать вид этих функций проще всего на примере осесимметричной турбулентности, для которой параметризация тензора f_{ij} осуществляется с использованием лишь θ и единичного вектора $\mathbf{n}$, направленного по потоку [9, 10]:

$$f_{ij} = P_{il}P_{jm}(\gamma_1\delta_{lm} + \gamma_2 n_l n_m), \quad \gamma_i = \gamma_i(x, \varkappa), \quad \varkappa = (\mathbf{n}, \theta).$$

В [10], где выполнялся численный расчет осесимметричной турбулентности в рамках модели DIA, показано, что в первом приближении (которое во всяком случае «энергетически состоятельно») можно не учитывать зависимость величин γ_i от $\varkappa$. В рамках такого приближения интегралы в формулах (5) вычисляются непосредственно:

$$C_{11} = \frac{9}{55}\left(\gamma_1 + \frac{12}{17}\gamma_2\right)C_1; \tag{6}$$

$$C_{22} = \frac{12}{55}\left(\gamma_1 + \frac{15}{136}\gamma_2\right)C_1; \tag{7}$$

$$C_1^{\mathrm{a}} = \left(\gamma_1 + \frac{1}{3}\gamma_2\right)C_1. \tag{8}$$

В изотропном случае, когда $f_{ij} = P_{ij}$ и $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$, из (6) — (8) следуют известные соотношения [3] для констант продольного (C_2) и поперечного (C_2') спектров: $C_2 = 2C_{11} = 18\, C_1/55$, $C_2' = 2C_{22} = 24C_1/55$.

Функции γ_i можно выразить через компоненты тензора Рейнольдса. Действительно, интегрируя (4) по всем $\mathbf{k}$ и учитывая, что основной вклад в интеграл вносит длинноволновый диапазон, получаем

$$\langle u_i u_j\rangle = \alpha\langle\varepsilon\rangle^{2/3} r_c^{2/3}\left(\frac{2}{3}\gamma_1\delta_{ij} + \gamma_2\left(\frac{7}{15}n_i n_j + \frac{1}{15}\delta_{ij}\right)\right),$$

где $\alpha = \int_0^\infty y^2\varphi(y)\,dy$ — структурная константа. Отсюда следует

$$\gamma_2/\gamma_1 = 10(\langle u_1{}^2\rangle - \langle u_2{}^2\rangle)/(8\langle u_2{}^2\rangle - \langle u_1{}^2\rangle), \tag{9}$$

индекс 1 соответствует оси, направленной вдоль потока.

С помощью (9) из (6) — (8) легко выводятся формулы, связывающие значения различных констант Колмогорова в анизотропном случае. В частности,

$$\frac{C_2}{C_2'} = \frac{3}{4}\,\frac{1 + 190z/119}{1 - 65z/68}. \tag{10}$$

Здесь $z = (\langle u_1{}^2\rangle - \langle u_2{}^2\rangle)/(\langle u_1{}^2\rangle + 2\langle u_2{}^2\rangle)$ — параметр, характеризующий степень анизотропии. При $z \to 0$ формула (10) дает известный результат $C_2 = 3C_2'/4$. Она также качественно согласуется с данными

[11], где исследовались спектры существенно неизотропной турбулентности за решеткой: для константы поперечного спектра получены заниженные по сравнению с изотропной оценкой значения.

Дальнейшие предсказания можно сделать, полагая, что константы Колмогорова полных спектров изотропной и анизотропной турбулентности совпадают. Это эквивалентно допущению о том, что зависимость полной энергии $\langle u^2 \rangle/2$ от x и в случае анизотропной турбулентности определяется лишь величинами $\langle \varepsilon \rangle$ и r_c. Указанное допущение, как следует из (8), приводит к дополнительному соотношению

$$\gamma_1 + \gamma_2/3 = 1. \tag{11}$$

Формулы (9) и (11) полностью конкретизируют зависимость γ_i от z. При этом соотношения (6), (7) преобразуются к виду

$$\widehat{C}_2 = \frac{55}{18}\frac{C_2}{C_1} = 1 + \frac{190z}{119}; \quad \widehat{C}_2' = \frac{55}{24}\frac{C_2'}{C_1} = 1 - \frac{65z}{68}. \tag{12}$$

Параметр z изменяется от —1/2 до 1, а $\widehat{C}_2$ и $\widehat{C}_2'$ — в интервалах [24/119, 309/119] и [201/136, 3/68] соответственно.

На первый взгляд столь большие интервалы изменения «констант» C противоречат экспериментальным данным. Следует, однако, иметь в виду, что диапазон достигнутых в эксперименте значений z относительно невелик: от 0 до 0,12. Это приводит, согласно (12), к вариации C_2 в пределах 18 %, а C_2' — 12 %, вполне совместимой с известным разбросом опытных данных.

Важно отметить, что этот разброс имеет место даже в потоках с приблизительно одинаковым числом Re [12], следовательно, его нельзя объяснить лишь с помощью формулы (3). Показательны в этом отношении результаты работы [13], в которой при «повторении» опытов Кистлера и Вребаловича [11] достигнут тот же диапазон Re, однако степень анизотропии и, как следствие, C_2 были существенно меньше. Соответствующие численные значения: $C_2 = 0{,}65$, $z = 0{,}12$ и $C_2 = 0{,}48 + 0{,}06$, $z = 0{,}02$ — хорошо согласуются с расчетом по формуле (12).

Зависимость C_2 от степени анизотропии косвенно подтверждается и некоторыми результатами исследования геофизических течений, в частности, обнаруженным в [14] при изучении приземного слоя атмосферы увеличением C_2 с уменьшением расстояния до поверхности.

В заключение отметим, что, строго говоря, не всегда допустимо пренебрегать зависимостью функций γ_i от $\varkappa$, поскольку из теоремы Крамера вытекают дополнительные ограничения на вид этих функций. Используя данные [15], ограничения запишем в виде

$$\gamma_1 \geqslant 0, \ \gamma_1 + \gamma_2 \geqslant 0.$$

Подставляя в эти формулы явные выражения для γ_i, имеем

$$8\langle u_2^2 \rangle \geqslant \langle u_1^2 \rangle \geqslant 2\langle u_2^2 \rangle/9. \tag{13}$$

Неравенство (13) устанавливает область применимости полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аджемян Л. Ц., Богданов С. Р., Сыщиков Ю. В.** Гипотеза подобия при описании длинноволновых спектров развитой турбулентности // Вестн. ЛГУ.— 1982.— № 10. Физика. Химия.— Вып. 2.
2. **Богданов С. Р.** Изучение закономерностей вырождения локально однородной и изотропной турбулентности на основе гипотезы скейлинга // ЖТФ.— 1983.— Т. 53, вып. 5.
3. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика.— М.: Наука, 1967.— Т. 2.
4. **Naot D., Shavit A., Wolfshtein M.** Two-point correlation model and the redistribution of Reynolds stresses // Phys. Fluids.— 1973.— V. 16, N 6.

5. **Лин А., Вольфштейн М.** Теоретическое исследование уравнений для напряжений Рейнольдса // Турбулентные сдвиговые течения. 1. – М.: Машиностроение, 1982.
6. **Матье Ж., Жандель Д.** Патологическое поведение турбулентных течений и спектральный метод // Методы расчета турбулентных течений. – М.: Мир, 1984.
7. **Mestayer P.** Local isotropy and anisotropy in a high-Reynolds-number turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. – 1982. – V. 125. – P. 475.
8. **Мьолснесс Р. К.** Возможные отклонения от локальной изотропии в мелкомасштабной структуре турбулентных полей скорости // Турбулентные сдвиговые течения. 2. – М.: Машиностроение, 1983.
9. **Chandrasekhar S.** The theory of axisymmetric turbulence // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. – 1950. – V. 242, N 855.
10. **Herring J. R.** Approach of axisymmetric turbulence to isotropy // Phys. Fluids. – 1974. – V. 17, N 5.
11. **Kistler A. L., Vrebalovich T.** Grid turbulence at large Reynolds numbers // J. Fluid Mech. – 1966. – V. 26, pt 1.
12. **Dickey T. D., Mellor G. R.** The Kolmogoroff $r^{2/3}$ law // Phys. Fluids. – 1979. – V. 22, N 6.
13. **Shedvin J., Stegen G. R., Gibson C. H.** Universal similarity at high grid Reynolds numbers // J. Fluid Mech. – 1974. – V. 65, pt 3.
14. **Gibson C. H., Stegen G. R., Williams R. B.** Statistics of the fine structure of turbulent velocity abd temperature fields measured at high Reynolds number // J. Fluid Mech. – 1970. – V. 41, pt 1.
15. **Kerschen E. J.** Constraints on the invariant functions of axisymmetric turbulence // AIAA J. – 1983. – V. 21, N 7.

г. Петрозаводск

Поступила 6/III. 1989 г.