Физика горения и взрыва

3

1967 г.

УДК 536.46+662.311.1

МЕТОД ПРИВЕДЕНИЯ К ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ В ЗАДАЧАХ НЕСТАЦИОНАРНОГО ГОРЕНИЯ ПОРОХА

Ю. А. Гостинцев

(Москва)

Задача о нестационарном горении пороха в пределах существующей математической модели горения [1, 2] сводится в основном к решению уравнения теплопроводности в области с движущейся границей. В связи с тем, что в общем случае точное аналитическое решение такой задачи получить невозможно, приходится изыскивать приближенные методы ее решения [3—6].

Одним из методов приближенного решения уравнений в частных производных является метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью интегральных соотношений.

Смысл метода сводится к следующему [7]. Пусть в области D изменения переменных x, y ищется решение уравнения $L(U)=0$, удовлетворяющего некоторым граничным условиям на границе Γ области D. $L(U)$ — заданный дифференциальный оператор с двумя переменными. Будем разыскивать приближенное решение задачи в виде

$$\widetilde{U}_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x, y) f_k(x) + \psi_0(x, y), \tag{1}$$

где $\psi_k(x, y)$ $(k=1, 2, ..., n)$ — первые n функции некоторой полной в области D системы функций $\{\psi_k(x, y)\}$. Все $\psi_k(x, y)=0$ на контуре Γ, а $\psi_0(x, y)$ удовлетворяют граничным условиям задачи. $\widetilde{U}_n$ было бы точным решением поставленной задачи, если бы тождественно выполнялось $L(\widetilde{U}_n)=0$. При условии неразрывности $L(\widetilde{U}_n)$ это равносильно требованию ортогональности выражения $L(\widetilde{U}_n)$ ко всем функциям системы $\{\psi_k(x, y)\}$

$$\int_{D_y} L(\widetilde{U}_n) \psi_k(x, y)\, dy = 0, \tag{2}$$

где D_y — сечение области D прямой $y=\mathrm{const}$.

Практически можно удовлетворить лишь нескольким первым соотношениям вида (2), получив приближенное решение $\widetilde{U}_n$. Выполнение операций интегрирования приводит к уменьшению числа переменных на единицу. Так, если $L(U)$ — оператор с двумя переменными, то вместо уравнения в частных производных из (1) и (2) получим систему n обыкновенных дифференциальных уравнений для определения n неизвестных функций $f_k(x)$ в (1).

Оценку сходимости метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям для случая исходных уравнений эллиптического типа сделал Л. В. Канторович [7], а для обобщенного уравнения теплопроводности в ограниченной области I. W. Green [9].

В качестве примеров использования метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям рассмотрим два класса задач нестационарного горения пороха.

1. В пределах существующей математической теории горения порохов [1, 2] задача о нестационарном горении топлива, занимающего полубесконечную область пространства, при изменении давления или скорости газа, обдувающего горящую поверхность, сводится к решению следующей системы уравнений [5, 8]:

$$\left.\begin{aligned}
&L(\Theta) = \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - \omega \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant \xi < \infty \\ 0 \leqslant \tau < \infty \end{pmatrix};\\
&\Theta(\tau, \xi = 0) = 1{,}0;\ \Theta(\tau, \xi \to \infty) \to 0;\ \Theta(\tau = 0, \xi) = \exp(-\xi);\\
&\omega = F\left\{\pi,\ V, \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right)_{\xi = 0}\right\}, \quad \omega = 1{,}0 \text{ при } \tau = 0;\\
&\pi = \pi(\tau) \quad (\pi = 1{,}0 \quad \tau = 0),\\
&V = V(\tau) \quad (V = V_0 \quad \tau = 0).
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Здесь приняты следующие безразмерные величины: температура $\Theta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0}$; время $\tau = t\frac{u_0^2}{\varkappa}$; координата $\xi = x\frac{u_0}{\varkappa}$; давление $\pi = p/p_0$; скорость потока газа $V = v/v_0$; скорость горения $\omega = u/u_0$. Индексом 0 отмечены значения величин до возмущения.

В соответствии с методом приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям будем искать решение системы (3) среди функций вида

$$\Theta_n(\xi, \tau) = \exp(-\xi)\,[1 - a_1(\tau) - a_2(\tau)\,\xi - \ldots - a_n(\tau)\,\xi^{n-1}] +$$
$$+ \exp(-\xi / a_0(\tau)\,[a_1(\tau) + a_2(\tau)\,\xi + \ldots + a_n(\tau)\,\xi^{n-1}]. \tag{4}$$

Тогда для нахождения $n+1$ неизвестной функции имеем $n+1$ интегральное соотношение (в качестве нулевого момента использован закон сохранения энергии в интегральном виде)

$$\begin{gathered}
\int_0^\infty L(\widetilde{\Theta}_n)\,d\xi = 0,\\
\int_0^\infty L(\widetilde{\Theta}_n)\,\exp(-\xi)\,d\xi = 0, \qquad (5)\\
\int_0^\infty L(\widetilde{\Theta}_n)\,\xi^n \exp(-\xi)\,d\xi = 0
\end{gathered}$$

Ограничимся для простоты в (4) двумя неизвестными функциями $a_0(\tau)$ и $a_1(\tau)$. Тогда после преобразования (5) вместо уравнения в частных производных из (3) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{da_1}{d\tau} = \frac{1}{(1-a_0)^2}\{-1+\omega+3a_1-\omega a_1+2a_0-2a_1a_0-$$
$$-2\omega a_0+a_0^2-a_1a_0^2-\omega a_0^2+\omega a_1 a_0^2\}, \qquad (6)$$

$$\frac{da_0}{d\tau} = \frac{1+a_0}{1-a_0}\,\frac{1}{a_1}\left\{\frac{a_1}{a_0}-\omega a_1+a_0-a_1a_0-\omega a_0+\omega a_1 a_0\right\} \qquad (7)$$

с начальными условиями $a_0=a_1=0$.

Система уравнений (6) и (7) имеет в начальной точке особенность, характер которой зависит от того, как ведет себя функция ω вблизи $\tau=0$. Если $\omega=\omega_0\neq 1{,}0$ при $\tau=0$, то, поделив (7) на (6) и учитывая, что $\frac{d\,a_1}{d\tau}=\omega_0-1$, получим

$$\frac{da_0}{da_1}=\frac{a_1-a_0^2\,(\omega_0-1)}{a_1\,a_0\,(\omega_0-1)}$$

(членом a_0^2 нельзя пренебрегать, так как он одного порядка с a_1). Можно заметить, что в координатах $a_0^2\div a_1$ точка (0,0) является особой точкой типа «седла» (рис. 1)

$$a_0^2=\frac{C}{a_1^2}+\frac{2}{3}\,\frac{a_1}{\omega_0-1} \qquad (8)$$

и прямая $a_0^2=\frac{2}{3}\,\frac{a_1}{\omega_0-1}$ определяет решение в начале процесса.

Вблизи линии $a_0=1{,}0$ решение (6), (7) имеет вид $a_1(a_0-1)=\text{const}$. Поле интегральных кривых задачи в координатах $a_0\div a_1$ для случая $\omega_0\neq 1{,}0$ представлено на рис. 2.

Рассматриваемому случаю, когда $\omega_0\neq 1{,}0$ при $\tau=0$, соответствует, например, физическая задача о нестационарном горении пороха при ступенчатом изменении давления по закону

$$\pi=\begin{cases}1 & \tau<0\\ \pi_1 & \tau\geqslant 0\end{cases}. \qquad (9)$$

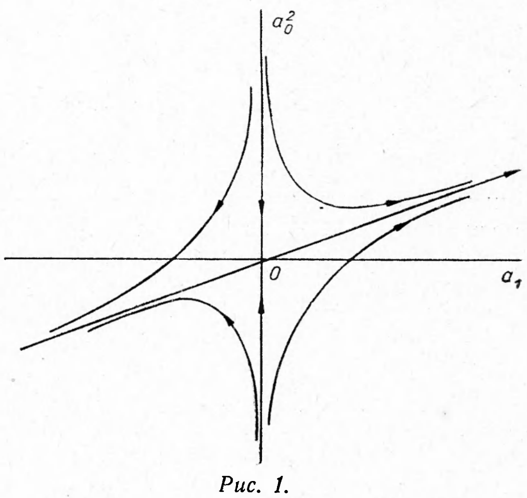

Рис. 1.

В условиях, когда отсутствует обдувающий горящую поверхность поток газа, выражение для скорости горения в системе (3) можно записать в виде [8]:

$$\omega=\frac{\pi^{\nu}}{\eta}\left\{1+\sqrt{1+\frac{2\eta-\eta^2}{\pi^{\nu}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}}\right\}, \qquad (10)$$

где

$$\eta = 2\,\frac{1 + \alpha T_0}{1 + \alpha T_s}, \quad \text{а } \alpha = \left(\frac{\partial \ln u}{\partial T_0}\right)_p.$$

Видно, что при скачкообразном изменении давления от $\pi = 1{,}0$ до π_1 скорость горения также скачком изменяется при $\tau = 0$ от $\omega = 1$ до величины

$$\omega_0 = \frac{\pi_1^{\nu}}{\eta}\left\{1 + \sqrt{1 - \frac{2\eta - \eta^2}{\pi_1^{\nu}}}\right\}. \tag{11}$$

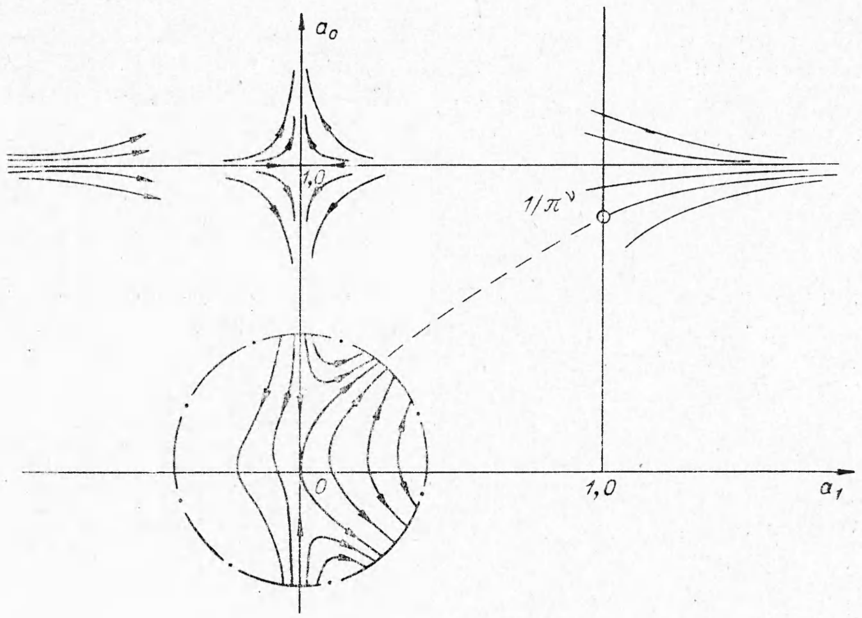

Рис. 2.

При малых временах решение исходной системы уравнений (6) и (7) имеет вид

$$a_1 = (\omega_0 - 1)\tau, \tag{12}$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\tau^{1/2}, \tag{13}$$

а при $\tau \to \infty\, a_1 \to 1{,}0$ и $a_0 \to \dfrac{1}{\pi_1^{\nu}}$, устанавливается новый стационарный режим горения топлива со скоростью $\omega_1 = \pi_1^{\nu}$ и полем температуры в конденсированной фазе $\Theta = \exp\left(-\xi \pi_1^{\nu}\right)$.

Для качественной оценки быстроты сходимости метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям в предложенной модификации было проведено сравнение точного решения исходного уравнения в частных производных, полученное в [8] численным счетом на

ЭВЦМ, с приближенными решениями в первом и втором приближении. На рис. 3 и 4 представлено изменение скорости горения при скачкообразном повышении давления для случаев $\pi = 10$ и $\pi_1 = 2$ соответственно. Кривая *3* соответствует точному решению системы (*3*) с уравнением в частных производных. Кривая *2* соответствует рассмотренному здесь решению задачи методом приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям во втором приближении.

Решение задачи в первом приближении [3], когда $\widetilde{\Theta}(\xi, \tau) = [1 - a_1(\tau)] \times \times \exp(-\xi) + a_1(\tau) \exp(-\xi\, \pi_1^{\nu})$ представлено на рисунках кривой *1*.

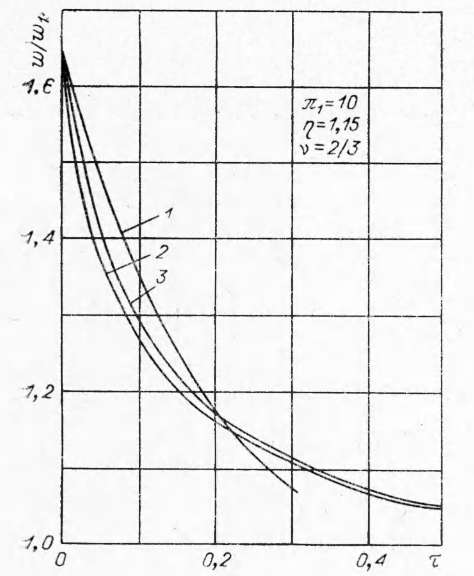

Рис. 3.

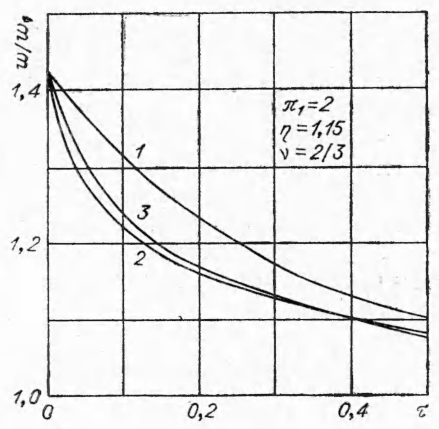

Рис. 4.

Видно, что уже второе приближение обеспечивает достаточную точность вычислений. Дальнейшее уточнение решения можно получить, удерживая в (4) большее число неизвестных функций.

Следует отметить, что в задачах с мгновенным изменением скорости горения в начале процесса ($\omega_0 \neq 1{,}0$ $\tau = 0$) первое приближение дает качественно отличное от точного решения при малых временах, которые и существенны для задач нестационарного горения [5].

В [5] изложенным здесь методом во втором приближении решена задача о нестационарном горении пороха в треугольной волне давления, когда $\omega_0 \neq 1{,}0$ при $\tau = 0$.

2. Рассмотрим в пределах теории нестационарного горения порохов Я. Б. Зельдовича [1, 2] задачу о взаимодействии тепловых слоев при выгорании симметричного элемента топлива (плоской, цилиндрической или сферической формы). По мере выгорания частицы пороха и сближения горящих поверхностей происходит разогрев центральной части элемента, приводящий к уменьшению градиента температуры на поверхности и к увеличению скорости горения. Задача сводится к решению следующей

системы уравнений (по симметрии задачи можно рассматривать половину элемента) [4]:

$$L(\Theta) \equiv \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - \frac{1}{\xi^s} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^s \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right) = 0 \quad [0 \leqslant \xi \leqslant \delta(\tau)],$$

$$\Theta(\tau, \xi = \delta) = 1{,}0; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 0; \ \xi = 0; \quad \Theta = \frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{ch} \delta} \ \delta \to \infty,$$

$$\dot{\delta} = F\left\{\eta, \pi, \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right)_{\xi = \delta}\right\}; \qquad \dot{\delta} = -1{,}0 \text{ при } \delta \to \infty$$

($s=0$, 1, 2 соответственно для плоского, осесимметричного и центральносимметричного случая, $\delta(\tau)$ — расстояние по оси ξ до горящей поверхности).

Эта система — вырожденная краевая задача для уравнения теплопроводности с движущимися границами. Смысл вырождения в данном случае заключается в том, что начальное условие задано для бесконечно большого элемента топлива ($\tau = -\infty$). Асимптотика решения при $\delta \to \infty$ получается, если учесть, что температурное поле бесконечно большого элемента является суммой двух экспонент $\exp(-\xi - \delta)$ и $\exp(\xi - \delta)$, представляющих профиль температуры у каждой из противоположных горящих поверхностей, когда нет теплового взаимодействия.

Приближенное решение данной задачи, в соответствии с изложенным выше методом, можно искать в виде

$$\widetilde{\Theta}_n(\xi, \tau) = \frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{ch} \delta} + \left(\frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{cn} \delta} - 1\right) \sum_{k=1}^{n} a_k(\tau)\, \xi^{2k-2}.$$

Для определения n неизвестных функций времени составляем n интегральных соотношений вида

$$\int_0^{\delta(\tau)} L(\widetilde{\Theta}_n)\, \xi^s\, d\xi = 0, \quad \int_0^{\delta(\tau)} L(\widetilde{\Theta}_n)\, \xi^s \frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{ch} \delta}\, d\xi = 0 \ldots$$

Указанным методом в работе [4] решена задача о нестационарном выгорании тонкой пластины пороха, горящей с двух сторон.

В заключение отметим, что изложенный здесь метод приближенного решения нестационарных задач горения порохов может быть применен при использовании тепловых моделей горения, отличных от модели Я. Б. Зельдовича (например, при учете переменности температуры поверхности или тепловыделения в конденсированной фазе), а также при решении неодномерных задач горения.

Автор выражает свою благодарность А. Д. Марголину за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила в редакцию
21/II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 1942, 12, 11—12.
2. Я. Б. Зельдович. ПМТФ, 1964, 3.
3. А. Г. Истратов, В. Б. Либрович, Б. В. Новожилов. ПМТФ, 1964, 5.
4. Ю. А. Гостинцев, А. Д. Марголин. ПМТФ, 1964, 5.
5. Ю. А. Гостинцев, А. Д. Марголин. Научно-технические проблемы горения и взрыва, 1965, 2.
6. Л. К. Гусаченко. Инж. физ. ж., 1962, 9.
7. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, 1962.
8. Б. В. Новожилов. ПМТФ, 1962, 5.
9. I. W. Green. J. of Research., 1953, 51, 3.