

ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГО-НАСЛЕДСТВЕННЫХ СИСТЕМ СО СЛАБОСИНГУЛЯРНЫМИ ЯДРАМИ

В. М. Зелнев, С. И. Мешков, Ю. А. Россихин

(Москва—Воронеж)

Использование наследственных ядер [1], обладающих слабой особенностью в начальный момент времени ($t = 0$), при решении динамических задач теории линейной вязко-упругости обнаруживает интересные особенности в поведении динамических характеристик. Это связано с тем, что спектры времен релаксаций (ретардаций), соответствующие слабосингулярным ядрам, имеют особенность того же типа по отношению ко времени релаксации τ при $\tau = 0$, а параметр сингулярности γ ($0 < \gamma \leq 1$) характеризует размытие спектра. В пространстве Фурье эта особая точка соответствует бесконечно большой частоте ($\omega = \infty$) [2], а поэтому в стационарных динамических задачах, когда характеристики системы определяются произведением $\omega\tau$, особенность проявляется лишь через параметр дробности γ и обнаруживается в явном виде, если τ или ω входят независимо. Наглядной иллюстрацией этого факта могут служить характеристики звуковой волны, распространяющейся в наследственно-упругой среде [3].

Решение нестационарных динамических задач обнаруживает другие интересные особенности, исследование которых на примере одномерного осциллятора с использованием в качестве ядра релаксации $\mathcal{E}$ -функции Ю. Н. Работнова [4], содержится в работе [5]. Представляет интерес дальнейшее исследование режима затухающих колебаний, особенно при большой интенсивности диссипативных процессов, которые в случае δ -образного спектра приводят к появлению аperiodических движений [6].

1. Исследование свободно-затухающих колебаний рассмотрим на примере одномассовой системы, совершающей свое движение после импульсного воздействия в начальный момент времени. В силу наследственно-упругих соотношений Больцмана — Вольтерра уравнение движения можно записать в двух эквивалентных формах, выразив его через ядро релаксации $R(t)$ или через ядро последдействия $K(t)$

$$x'' + \omega_\infty^2 \left[x - \nu_\epsilon \int_{-\infty}^t R(t-t') x(t') dt' \right] = F \delta(t) \quad (1.1)$$

$$x'' + \omega_\infty^2 x + \nu_\sigma \int_{-\infty}^t K(t-t') x''(t') dt' = F [\delta(t) + \nu_\sigma K(t)] \quad (1.2)$$

$$\nu_\epsilon = (\omega_\infty^2 - \omega_0^2) \omega_\infty^{-2}, \quad \nu_\sigma = (\omega_\infty^2 - \omega_0^2) \omega_0^{-2}$$

Здесь x — координата, F — отнесенная к единице массы амплитуда импульса силы, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, ω_∞ и ω_0 — частоты упругих колебаний, соответствующие нерелаксированному и релаксированному значениям упругого модуля, точки над буквами означают производные по времени.

Решение уравнений (1.1) и (1.2) в пространстве Лапласа запишется в виде

$$x_*(p) = \frac{F}{p^2 + \omega_\infty^2 [1 - \nu_\epsilon R_*(p)]} = \frac{F [1 + \nu_\sigma K_*(p)]}{\omega_\infty^2 + p^2 [1 + \nu_\sigma K_*(p)]} \quad (1.3)$$

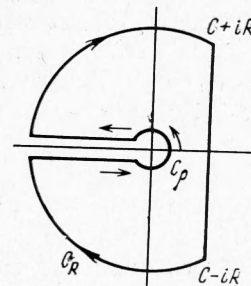
Здесь звездочка внизу означает трансформанту одностороннего преобразования Лапласа соответствующей функции.

Решение в пространстве оригиналов определяется по формуле обращения Меллина — Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x_*(p) e^{pt} dp \quad (1.4)$$

Для вычисления интеграла (1.4) необходимо определить все особые точки комплексной функции $x_*(p)$. Рассматриваемые ниже слабосингулярные ядра имеют точки разветвления ($p = 0$, $p = \infty$) и простые полюсы при тех значениях p , которые обращают в нуль знаменатели формул (1.3), т. е. являются корнями уравнений

$$\begin{aligned} p^2 + \omega_\infty^2 [1 - v_\epsilon R_*(p)] &= 0 \\ \omega_\infty^2 + p^2 [1 + v_\sigma K_*(p)] &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$



Фиг. 1

К многозначным функциям, имеющим точку разветвления, теорема обращения применима лишь для первого листа римановой поверхности, т. е. когда $-\pi < \arg p < \pi$, поэтому замкнутый контур следует составить из отрезка прямой $[c - iR, c + iR]$, $c > 0$ отрезков $-R < s < -\rho$ на берегах разреза вдоль отрицательной действительной полуоси и дуг окружностей, одна из которых C_ρ , $|p| = \rho$ замыкает берега разреза, а две другие C_R , $|p| = R$ соединяют берега разреза с вертикальным отрезком (фиг. 1). В силу леммы Жордана интегралы по кривым C_R при $R \rightarrow \infty$ равны нулю. Для слабосингулярных ядер интеграл по C_ρ при $\rho \rightarrow 0$ также стремится к нулю. Используя основную теорему теории вычетов, можно записать решение уравнений (1.1) и (1.2) в виде

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty [x_*(se^{-i\pi}) - x_*(se^{i\pi})] e^{-st} ds + \sum_k \text{res} [x_*(p_k) e^{p_k t}] \quad (1.6)$$

Здесь сумма берется по всем изолированным особым точкам (полюсам).

2. В качестве примера рассмотрим простейший случай слабосингулярных ядер — ядро последствия Абеля

$$K(t) = [\Gamma(\gamma) \tau_\sigma^\gamma]^{-1} t^{\gamma-1}, \quad K_*(p) = (p \tau_\sigma)^{-\gamma}, \quad \tau_\sigma^\gamma E_0 = \tau_\epsilon^\gamma E_\infty \quad (2.1)$$

Резольвента ядра (2.1) — ядро релаксации — определяется функцией Ю. Н. Работнова

$$\begin{aligned} R(t) &= \tau_\epsilon^{-\gamma} \mathcal{D}_\gamma(-\nu, \tau, t) \\ \mathcal{D}_\gamma(-\nu, \tau, t) &= t^{\gamma-1} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\gamma n} \frac{(-\nu)^n}{\Gamma[\gamma(n+1)]} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $\Gamma(\gamma)$ — гамма-функция, γ — параметр сингулярности (0, 1], τ_ϵ , τ_σ — времена релаксации и ретардации соответственно. В формуле (2.2) и в дальнейшем, где величины τ , ν написаны без индексов, принято $\tau = \tau_\epsilon$, если $\nu = \nu_\epsilon$, и $\tau = \tau_\sigma$, если $\nu = \nu_\sigma$.

Подставляя (2.1) и (2.2) в (1.3), найдем

$$x_*(p) = F(p^\gamma + \kappa) p^{-\gamma} (p^2 + \kappa p^{2-\gamma} + \omega_\infty^2)^{-1}, \quad \kappa = \nu \tau^{-\gamma} \quad (2.3)$$

Для определения полюсов функции $x_*(p)$ надо найти корни уравнения

$$p^2 + \kappa p^{2-\gamma} + \omega_\infty^2 = 0 \quad (2.4)$$

Нетрудно убедиться в том, что уравнение (2.4) не имеет действительных отрицательных корней. В самом деле, полагая в (2.4) $p = -y$, $y > 0$, получаем уравнение, противоречащее исходному предположению.

Для нахождения корней уравнения (2.4) положим в нем $p = re^{i\psi}$. Тогда, отделяя действительную и мнимую части, получаем систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} r^2 \cos 2\psi + \kappa r^{2-\gamma} \cos(2-\gamma)\psi + \omega_\infty^2 &= 0 \\ r^2 \sin 2\psi + \kappa r^{2-\gamma} \sin(2-\gamma)\psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь принято, что в упругой области $\omega_\infty = 1$. Очевидно, что система (2.5) не имеет корней при любом $|\psi| < \frac{1}{2}\pi$. Для подсчета корней системы уравнений (2.5) введем новые переменные $x_1 = r^2$ и $x_2 = \kappa r^{2-\gamma}$. Тогда для каждого фиксированного угла $\frac{1}{2}\pi < \psi < \pi$ при заданном γ получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2 . После нахождения значений x_1 и x_2 находятся величины r и κ , которые вместе с выбранным ψ определяют корень характеристического уравнения. При замене ψ на $-\psi$ получается комплексно сопряженный корень.

Таким образом, в плоскости с вырезанной отрицательной действительной полуосью $-\pi < \psi \leq \pi$ уравнение (2.4) при каждом фиксированном κ имеет два комплексно сопряженных корня $p_{1,2} = -\alpha \pm i\omega$. Поведение корней в зависимости от κ показано на фиг. 2, где в качестве параметра выбрана величина γ , значения которой указаны цифрами у кривых.

При $\gamma = 1$ характеристическое уравнение (2.4) соответствует с точностью до константы реологической модели Максвелла и корни определяются формулой

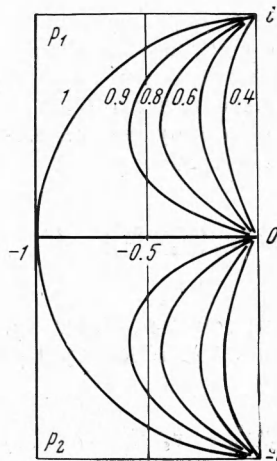
$$p_{1,2} = -\frac{1}{2}\kappa \pm \left(\frac{1}{4}\kappa^2 - 1\right)^{1/2} \quad (2.6)$$

Из равенства (2.6) следует, что при $\kappa \geq 2$ существуют два действительных корня, один из которых стремится к нулю при $\kappa \rightarrow \infty$, а другой — к бесконечности. При $\gamma \rightarrow 0$ корни уравнения (2.4) определяют решение незатухающих упругих колебаний, т. е. будут мнимыми, а при изменении κ от 0 до ∞ — изменяются от $i\omega_\infty$ до 0.

Зная поведение корней характеристического уравнения, решение (1.6) запишем в виде

$$x(t) = A_0(t) + A \exp(-\alpha t) \sin(\omega t - \varphi) \quad (2.7)$$

$$A = \frac{F}{r} \left[1 - \gamma \frac{\kappa r^{-\gamma} (1 - \frac{1}{4}\gamma) + \cos \gamma \psi}{\kappa r^{-\gamma} + \kappa^{-1} r^\gamma + 2 \cos \gamma \psi} \right]^{-1/2} \quad (2.8)$$



Фиг. 2

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= - \frac{2(\kappa r^{-\gamma} + \kappa^{-1} r^{\gamma} + 2 \cos \gamma \psi) \cos \psi - \gamma [\kappa r^{-\gamma} \cos \psi + \cos(1-\gamma) \psi]}{2(\kappa r^{-\gamma} + \kappa^{-1} r^{\gamma} + 2 \cos \gamma \psi) \sin \psi - \gamma [\kappa r^{-\gamma} \sin \psi + \sin(1-\gamma) \psi]} \\ r^2 &= \omega^2 + \alpha^2, \quad \operatorname{tg} \psi = -\omega \alpha^{-1} \\ A_0(t) &= \int_0^{\infty} \tau^{-1} B(\tau) e^{-t/\tau} d\tau \end{aligned}$$

Величину $A_0(t)$, описывающую упругое последствие, можно рассматривать как трансформанту Лапласа спектральной функции

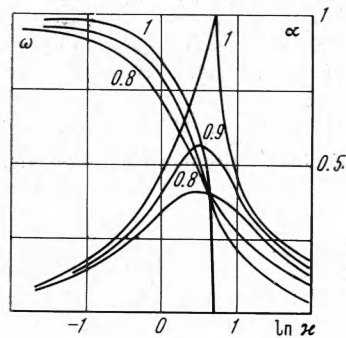
$$B(\tau) = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \frac{F \omega_{\infty}^2 \tau^3 (1 + \omega_{\infty}^2 \tau^2)^{-1}}{(\tau^{\gamma} \kappa)^{-1} (1 + \omega_{\infty}^2 \tau^2) + \tau^{\gamma} \kappa (1 + \omega_{\infty}^2 \tau^2)^{-1} + 2 \cos \pi \gamma} \quad (2.9)$$

которая дает распределение релаксационных параметров динамической системы.

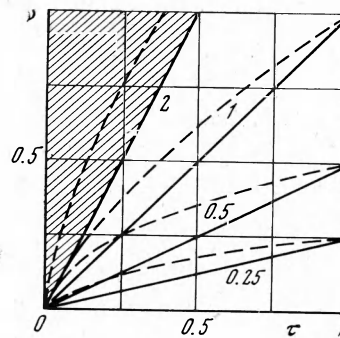
В квазистатическом случае функция распределения (2.9) переходит в функцию распределения времен ретардаций ядра Абеля

$$B^{(\kappa)}(\tau) = \frac{F \nu_{\sigma}}{\omega_{\infty}^2} \frac{\sin \pi \gamma}{\pi \tau_{\sigma}^{\gamma}} \tau^{\gamma-1} \quad (2.10)$$

Выражения (2.7), (2.8) определяют затухающие гармонические колебания с собственной частотой ω и коэффициентом затухания α . Характер поведения этих величин в зависимости от $\ln \kappa$ иллюстрирует фиг. 3.



Фиг. 3



Фиг. 4

Из фиг. 3 видно, что коэффициент затухания α проходит максимум, а частота колебаний ω монотонно убывает от 1 до 0 с возрастанием $\ln \kappa$. Величина логарифмического декремента $\Delta = 2\pi\alpha\omega^{-1}$ постоянна вдоль линий $\kappa = \text{const}$. На фиг. 4 в координатах $\nu_{\sigma} - \tau_{\sigma}$ построены изодекрементные линии при $\gamma = 1$ (сплошные) и $\gamma = 0.5$ (пунктирные). Значения κ указаны цифрами у кривых. Заштрихованная область, расположенная над прямой $\kappa = 2$ ($\Delta = \infty$) соответствует области аперiodичности, а область под этой прямой относится к области затухающих колебаний. Если упругий модуль релаксирует полностью, то получим квазимаксвелловскую модель, которая при $\gamma = 1$ переходит в обычную модель Максвелла с границей области аперiodичности $\tau = 1/2$. При дробном γ область аперiodичности не появляется.

Следует заметить, что решение (2.7) при $\gamma \rightarrow 1$ непрерывно переходит в решение, соответствующее области колебаний максвелловского тела. Однако решение, соответствующее области аперiodичности этого тела, при таком предельном переходе получить невозможно.

Таким образом, исследование режима затухающих колебаний вязкоупругой системы с наследственным ядром, обладающим слабой сингулярностью, позволяет проследить влияние параметра дробности γ , характеризующего «размытие» соответствующего спектра, на динамические характеристики системы: логарифмический декремент, собственную частоту колебаний и коэффициент затухания. Кроме того, удастся установить характер колебательного процесса, принципиальная особенность которого заключается в невозможности перехода затухающих колебаний в аperiодический режим.

Известно, что при достаточно большой интенсивности диссипативных процессов реальные колебательные системы могут находиться в аperiодическом режиме. Для описания этого факта следует пользоваться другими функциями распределения; например, некоторые сведения, касающиеся этого вопроса, содержатся в работе [7, 8].

Поступила 7 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966, гл. 3.
2. Мешков С. И. К описанию внутреннего трения в наследственной теории упругости при помощи ядер, обладающих слабой сингулярностью. ПМТФ, 1967, № 4.
3. Мешков С. И., Россихин Ю. А. О распространении звуковых волн в наследственно-упругой среде. ПМТФ, 1968, № 5.
4. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
5. Розовский М. И., Синайский Е. С. Колебания осциллятора, обладающего наследственной ползучестью. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
6. Мешков С. И., Шермергор Т. Д. О температурной зависимости коэффициентов затухания стандартного линейного тела. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 5.
7. Elder A. S. The transient response of a viscoelastic torsional pendulum. Trans. Soc. Rheol., 1965, vol. 9, pt. 2.
8. Struik L. C. E. Free damped vibrations of linear viscoelastic materials. Rheol. Acta, 1967, vol. 6, No. 2.