Вестник НГУЭУ. 2022. № 1. С. 211–223
Vestnik NSUEM. 2022. No. 1. P. 211–223

Научная статья
УДК 330.45
DOI: 10.34020/2073-6495-2022-1-211-223

ПОСТРОЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ НА ОСНОВЕ НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА И РЕКУРРЕНТНОГО МЕТОДА

Ганичева Антонина Валериановна[1], Ганичев Алексей Валерианович[2]

[1] *Тверская государственная сельскохозяйственная академия*
[2] *Тверской государственный технический университет*

[1] TGAN55@yandex.ru
[2] alexej.ganichev@yandex.ru

Аннотация. В статье разработан новый метод построения доверительных интервалов. Используется формула, полученная на основе неравенства Чебышева, которая в случае неизвестной дисперсии применяется в рекуррентном методе. Предложен новый метод описания прямой и обратной функций Лапласа. Разработанные методы могут применяться не только для нормального распределения, но и для любого другого, а также в случае, когда вид закона распределения случайной величины неизвестен. Практическая реализация показана на конкретном примере вычисления доверительного интервала для балла учащегося, полученного по результатам тестирования.

Ключевые слова: выборка, точность, надежность оценки, объем репрезентативности, функция погрешности, функция Лапласа

Для цитирования: Ганичева А.В., Ганичев А.В. Построение доверительных интервалов на основе неравенства Чебышева и рекуррентного метода // Вестник НГУЭУ. 2022. № 1. С. 211–223. DOI: 10.34020/2073-6495-2022-1-211-223.

Original article

CONSTRUCTION OF CONFIDENCE INTERVALS BASED ON CHEBYSHEV'S INEQUALITY AND RECURRENT METHOD

Ganicheva Antonina V.[1], Ganichev Aleksey V.[2]

[1] *Tver State Agricultural Academy*
[2] *Tver State Technical University*

[1] TGAN55@yandex.ru
[2] alexej.ganichev@yandex.ru

Abstract. The article presents a new method for constructing confidence intervals. A formula obtained on the basis of Chebyshev's inequality is used, it is applied in the recurrent method in the case of unknown variance. A new method for describing the direct and inverse Laplace functions is proposed. The developed methods can be used not only for normal distribution, but also for any other, as well as in the case when the type of distribution law of a random variable is unknown. The practical implementation is shown by a concrete example of calculating the confidence interval for the student's score obtained from the test results.

Keywords: sampling, accuracy, reliability of estimation, volume of representativeness, error function, Laplace function

For citation: Ganicheva A.V., Ganichev A.V. Construction of confidence intervals based on Chebyshev's inequality and recurrent method. *Vestnik NSUEM*. 2022; (1): 211–223. (In Russ.). DOI: 10.34020/2073-6495-2022-1-211-223.

Введение

Несмотря на то, что методы построения доверительных интервалов разработаны достаточно давно, эта проблема остается по-прежнему важной и актуальной. О важности данной проблемы свидетельствует наличие ГОСТов по статистическим методам определения доверительных, толерантных, предикционных интервалов. Актуальность проблемы подтверждается многочисленными современными научными публикациями в России и за рубежом.

Основными направлениями современных исследований методов построения доверительных интервалов являются:

– построение доверительных интервалов не только для нормального закона распределения, но и для других видов распределений, например, дискретных [19], биномиального [15], бета [8], гипергеометрического [5], экспоненциального [10] и т.д., а также композиции законов распределения [7];

– определение интервальных оценок не только для математических ожиданий, дисперсий, средних квадратических отклонений, но и для медианы [9], частот и долей [3] условных вероятностей [6], параметров положения и масштаба распределений [11];

– разработка многочисленных практических приложений интервальных оценок в биологии и медицине [16, 17], экологии [18], образовании [4] и других областях.

Важными вопросами использования статистических методов являются минимизация объема репрезентативности – числа наблюдений, необходимых для получения интервальных оценок заданного качества (точности и надежности) [1], определение оптимального сочетания доверительного интервала и доверительной вероятности [13], использование неравенства Чебышева [2, 14] и рекуррентных способов построения доверительных интервалов [12].

Цель данной работы – разработка метода для оценки объема репрезентативности на основе неравенства Чебышева и рекуррентных соотношений. Для реализации поставленной цели решены следующие задачи:

1) разработан новый метод описания функции Лапласа и обратной к ней, на основе этого показан новый метод построения доверительного интервала для математического ожидания нормального закона распределения (ЗР) случайной величины при известной и неизвестной дисперсии;

2) данный метод распространен для задачи построения доверительного интервала и оценки объема репрезентативности для любого ЗР при известной и неизвестной дисперсии;

3) приведен алгоритм реализации разработанного метода.

1. Метод построения доверительного интервала для математического ожидания случайной величины при известной дисперсии с использованием неравенства Чебышева

Пусть $\overline{X}$ – случайная величина, имеющая произвольный закон распределения, m_x и D_x – ее математическое ожидание и дисперсия соответственно. Над этой случайной величиной производится n опытов, $x_1, \ldots, x_n$ – соответствующая выборка, причем до опытов каждая x_i рассматривается как случайная величина $X_i\left(i=\overline{i,n}\right)$ с математическим ожиданием m_x и D_x. Будем считать $X_1, \ldots, X_n$ независимыми случайными величинами. Пусть $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$.

Из неравенства Чебышева следует, что

$$\beta = P\left(\left|m_x-\overline{x}\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{D\left[\overline{x}\right]}{\varepsilon^2},\quad \beta\ge 1-\frac{D_x}{n\varepsilon^2},\quad -n\ge-\frac{D_x}{\varepsilon^2\alpha}, \tag{1}$$

где $\alpha = 1-\beta$, β – надежность, ε – точность интервальной оценки.

Потребуем, чтобы $\alpha_1\ge\frac{D_x}{n\varepsilon^2}$, где α_1 – число, удовлетворяющее условию $\alpha<\alpha_1<1$. Оценка α_1 будет получена позже. Тогда

$$n\ge\frac{D_x}{\varepsilon^2\alpha_1}, \tag{2}$$

$$bn\ge b\frac{D_x}{\varepsilon^2\alpha_1}, \tag{3}$$

где b – действительное число, такое, что $b\alpha>\alpha_1$, т.е. $b>1$. Оценка b будет определена в дальнейшем.

Из (1) и (3) получаем

$$n(b-1)\ge\frac{D_x}{\varepsilon^2}\left(\frac{b}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha}\right). \tag{4}$$

Из (4) следует, что

$$n\ge\frac{1}{(b-1)}\frac{D_x}{\varepsilon^2}\left(\frac{b}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha}\right)=n_0. \tag{5}$$

Вычислим производную $n'_{0_b}=\frac{\alpha_1-\alpha}{\alpha\alpha}\frac{1}{(b-1)^2}\frac{D_x}{\varepsilon^2}$, т.е. $n_0>0$ и n_0 – возрастающая функция относительно b, при этом $n_0 = 0$, когда $b=\frac{\alpha_1}{\alpha}$, т.е. если $n_0>0$, то $b=\frac{\alpha_1}{\alpha}$ и наоборот.

Предположим, что для данных D_x, ε, α объем репрезентативности, определяемый для построения доверительного интервала с точностью ε и надежностью $1 - \alpha = \beta$, известен и равен $n_1 + 1$. Представим n_1 в виде

$$n_1 = \frac{D_x}{\varepsilon^2} t^2. \tag{6}$$

Пусть α_1, t и t_1 удовлетворяют условию

$$\frac{1}{\alpha} > t > \frac{1}{\alpha_1} > t_1. \tag{7}$$

Тогда $\frac{1}{\alpha} > t_1$.

Требуем, чтобы выполнялось условие

$$\frac{D_x}{\varepsilon^2} t_1 < n_0 < \frac{D_x}{\varepsilon^2} t,$$

т.е.

$$t_1 < \frac{1}{b-1}\left(\frac{b}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha}\right) < t. \tag{8}$$

Обозначим через y выражение

$$\frac{1}{b-1}\left(\frac{b}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha}\right). \tag{9}$$

С учетом (7) неравенство (8) преобразуется к виду (с учетом левой части):

$$b_0 = \frac{\alpha_1 (1 - \alpha t_1)}{\alpha (1 - \alpha_1 t_1)} < b. \tag{10}$$

Правая часть неравенства (8) представляет собой верное неравенство для любого $b > 0$, так как $\frac{1}{\alpha_1} < t < \frac{1}{\alpha}$.

Очевидно, левая часть (10) больше, чем $\frac{\alpha_1}{\alpha}$, и является возрастающей функцией относительно t_1, т.е. чем больше t_1, тем больше b и больше n_0, тогда n_0 будет приближаться слева к объему репрезентативности n_1. Поэтому t_1 должно быть близко к $\frac{1}{\alpha_1}$, но меньше его.

Не нарушая общности, рассмотрим пример нормального распределения.

Предположим, что точность вычислений задана до 0,0001 долей. Тогда промежуточные вычисления округляются до 0,00001. Например, если $\beta = 0{,}8890$ и $\alpha = 0{,}1010$, $\varepsilon = 0{,}1$; $D_x = 1$; $n^1 = 269$, то $t = 2{,}68960$ и $\frac{1}{t} = 0{,}37180$. Отсюда $\alpha_1 > 0{,}3718$. Будем считать, что α_1 отличается от $\frac{1}{t}$ на 0,0001. Точность вычислений рассматривается до 0,0001. Поэтому в качестве значения α_1 можно взять число 0,3719. Тогда, согласно (7), $t_1 < \frac{1}{\alpha_1} = 2,68889.$ В качестве t_1 можно взять значение 2,68879, т.е. на 0,0001 меньше, чем $\frac{1}{\alpha_1}$. При этих данных из (10) получаем b_0 = 68774,59177.

Таким образом, при b = b_0 + 0,0001 = 68774,59187 выражение $y = \frac{1}{b-1}\left(\frac{b}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha}\right) =$ 2,6888 будет отличаться от t на величину 0,0008. При этом $n_0 = \left\lfloor \frac{D_X}{\varepsilon^2} 2,6888 \right\rfloor + 1$, здесь знак $\lfloor \ \rfloor$ означает целую часть числа. Объем репрезентативности n_1 + 1 = $\frac{D_x}{\varepsilon^2} 2,6896 + 1$. Относительная погрешность замены t на y и n_1 на n_0 составляет 0,029 %.

В общем виде пусть α, α_1, t и t_1 удовлетворяют (6)–(8). Обозначим через o число 0,0001. Положим $\alpha_1 = \frac{1}{t} + o,\ t_1 = \frac{1}{\alpha_1} - o$, т.е. $t_1 = \frac{1}{1/t + o} - o$. Тогда приближенно можно считать, что $\frac{\alpha}{t} \cdot o + \alpha \cdot o^2 \approx \frac{\alpha}{t} \cdot o$, и после преобразований получаем

$$b_0 = \frac{1 + to - t\alpha + \alpha o}{\alpha o}.$$

Отсюда $b - 1 = b_0 + o - 1 = \frac{1 + to - t\alpha}{\alpha o}$.

Положим $y = \frac{1}{b-1}\left(\frac{b}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha}\right)$. Тогда $y = \frac{t + t^2 o - t^2\alpha + t\alpha o - o}{1 + 2to + t^2 o^2 - t\alpha - t^2 \alpha o}$.

Допустим, $t - y = \Delta$. Отсюда получаем выражение для Δ:

$$\Delta = \frac{t^3 o^2 - t^3 \alpha o + t^2 o - t\alpha o + o}{1 + 2to + t^2 o^2 - t\alpha - t^2 \alpha o}. \tag{11}$$

При этом t является функцией α.

Смысл Δ: это погрешность в определении множителя t объема репрезентативности $\frac{D_x}{\varepsilon^2} t$.

Из (11) получаем уравнение для t:

$$t^3 o(1-\alpha) + t^2 o(1 - \Delta + \alpha\Delta) + t(\alpha\Delta - \alpha o - 2o\Delta) + o - \Delta = 0. \tag{12}$$

Принимая значения α из промежутка [$\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$] для заданной таблично или функционально зависимости $\Delta = \Delta(\alpha)$, находим соответствующее значение Δ и t из уравнения (12). Умножая найденное t на заданное выражение $\frac{D_x}{\varepsilon^2}$, получаем приближенно с точностью $\Delta(\alpha)$ соответствующий объем репрезентативности $\left\lfloor \frac{D_x}{\varepsilon^2} t \right\rfloor + 1$, здесь $\lfloor x \rfloor$ означает целую часть числа x.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Для данных надежности $\alpha \in [\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}]$, точности ε, дисперсии D_x и уравнения погрешности $\Delta = \Delta(\alpha)$ при выполнении (7) объем репрезентативности для любого закона распределения равен приближенно $\left\lfloor \frac{D_x}{\varepsilon^2} t \right\rfloor + 1$, где t находится из уравнения (12) с заданной погрешностью $\Delta(\alpha)$.

Известно, что при данных D_x и ε, чем меньше α, тем больше объем репрезентативности, а поэтому больше t. Следовательно, t и Δ являются убывающими функциями от α.

Функция Δ задается, исходя из накопленного опыта оценки погрешностей в отыскании объема репрезентативности, из целесообразности той или иной оценки.

Например, $\Delta = \delta/\alpha$, где δ – const ($\delta > 0$) на участке задания α. В общем случае Δ – это убывающая функция. Как будет показано далее, для нормального распределения Δ изменяется по убывающей экспоненте. Значение Δ может быть задано минимум в семи точках для достаточно точного описания ее уравнения регрессии. Может быть задана не Δ, а объем репрезентативности в семи точках. Тогда объем делится на $\frac{D_x}{\varepsilon^2}$ – находится t. Затем по заданной вероятности α и найденному значению t по формуле (11) находится Δ.

Рассмотрим аппроксимацию Δ по прямой линии. Здесь возможны два варианта: для данных $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ заданы соответствующие значения $\Delta^{(1)}$ и $\Delta^{(2)}$ и второй вариант – эти значения не заданы, но заданы объемы репрезентативности $n^{(1)}$ и $n^{(2)}$. Не нарушая общности, рассмотрим второй вариант.

Пусть $\alpha^{(1)} = 0{,}05$; $\alpha^{(2)} = 0{,}4$. Большие значения α не имеет смысла брать, так как в этом случае надо переходить к противоположному событию и вместо α рассматривать $\beta = 1 - \alpha$. Допустим, что для $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ известны объемы репрезентативности $n^{(1)}$ и $n^{(2)}$, причем $n^{(1)} > n^{(2)}$ (при заданных D_x и ε). Поделим $n^{(1)}$ и $n^{(2)}$ на $\frac{D_x}{\varepsilon^2}$, получим значения $t^{(1)}$ и $t^{(2)}$ соответственно, при этом $t^{(1)} > t^{(2)}$. Из формулы (11) находим $\Delta^{(1)} = \Delta(\alpha^{(1)})$, $\Delta^{(2)} = \Delta(\alpha^{(2)})$.

Рассмотрим, для примера, линейную зависимость Δ от α и запишем уравнение прямой линии, проходящей через точки $(\alpha^{(1)}, \Delta_1)$, $(\alpha^{(2)}, \Delta_2)$:

$$\frac{\Delta(\alpha) - \Delta^{(1)}}{\alpha - \alpha^{(1)}} = \frac{\Delta^{(2)} - \Delta^{(1)}}{\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)}}. \tag{13}$$

Отсюда находим

$$\Delta(\alpha) = \Delta^{(1)} + \frac{(\Delta^{(2)} - \Delta^{(1)})(\alpha - \alpha^{(1)})}{\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)}}. \tag{14}$$

Заметим, что если погрешность Δ задана по семи и более точкам, то объем репрезентативности будет не менее 7. Если Δ задана непрерывной функцией, например, исходя из предыдущей практики описания подобных событий или ситуаций, то в этом случае объем репрезентативности может быть любым, в том числе принимать значения 1, 2, 3 и т.п.

2. Новый метод описания прямой и обратной функции Лапласа

Для нормального закона распределения функция $u = \sqrt{t}$ с погрешностью Δ(α) описывает обратную функцию Лапласа. Погрешность находится из уравнения (15):

$$\Delta = 0,0012e^{-0,063\alpha}, \tag{15}$$

представляющего собой эконометрическую модель, построенную по 12 значениям α и Δ согласно табл. 1 с точностью $R^2 = 0,9609$. График зависимости Δ от α показан на рис. 1.

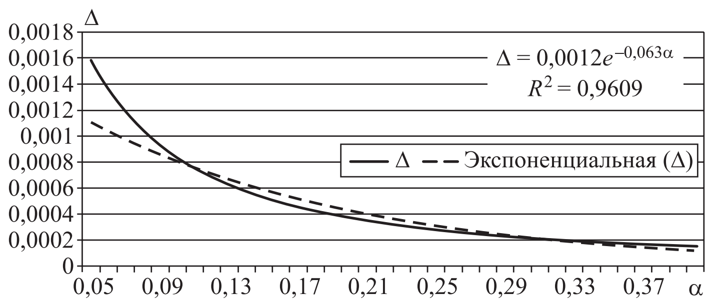

Рис. 1. График зависимости Δ от α
Graph of dependence Δ from α

Из (12) находим α:

$$\alpha = \frac{t^3 o + t^2 o - t^2 o\Delta - 2to\Delta + o - \Delta}{t^3 o - t^2 o\Delta - t\Delta + to}. \tag{16}$$

Данная зависимость с погрешностью Δ описывает функцию Лапласа. График зависимости Δ от t представлен на рис. 2.

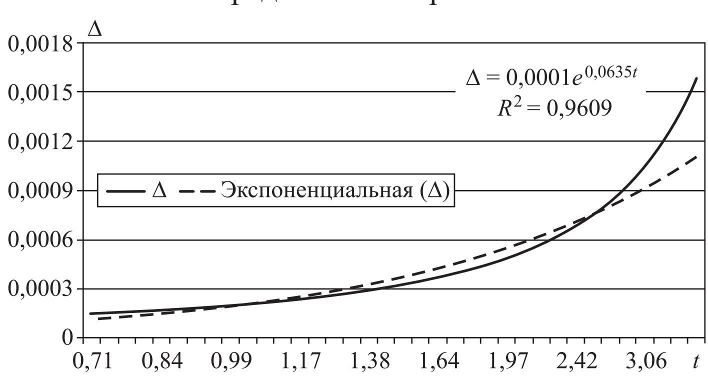

Рис. 2. График зависимости Δ от t
Graph of dependence Δ from t

Итак, имеем следующее утверждение.

Теорема 2. С погрешностью $\Delta(t)$ функция Лапласа выражается из уравнения (16) при заданных значениях $o = 0{,}0001$ и $t = u^2$, где u – заданная обратная функция Лапласа.

С погрешностью $\Delta(t)$ из уравнения (12) находится $t = u^2$ при заданным $o = 0{,}0001$ и α.

Предложенное описание отличается достаточной обозримостью, по сравнению с таблицами Лапласа и представлением функции Лапласа посредством интегрирования рядов. Кроме того, такое представление вероятностной и обратной к ней функции отличается универсальностью и пригодно для любого распределения, в том числе когда закон неизвестен.

Таким образом, функция Лапласа и обратная к ней являются частным случаем множества функций, отличающихся заданной погрешностью Δ (при одних и тех же точности ε и дисперсии D_x).

3. Построение доверительного интервала для математического ожидания случайной величины при неизвестной дисперсии

Теперь рассмотрим случай построения доверительного интервала при неизвестной D_x случайной величины. Тогда для D_x рассматривается ее точечная оценка $S_x^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

Пусть надежность такой замены равна ε_1, т.е.

$$\left|D_x - S_x^2\right| < \varepsilon_1. \tag{17}$$

Для проверки выполнения неравенства

$$\left\lfloor \frac{S_x^2 - \varepsilon_1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1 \le n_0 \le \left\lfloor \frac{S_x^2 + \varepsilon_1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1 \tag{18}$$

организуется рекуррентная процедура. Сначала полагаем $n = n_0 = 2$. Проверяем неравенство при числе испытаний n_0. Если неравенство выполняется, то объем репрезентативности равен n_0, в противном случае полагаем $n_0 = n_0 + 1$ и добавляем из генеральной совокупности еще один элемент, который выбирается случайным образом. И весь процесс повторяется, т.е. используется рекуррентный метод.

Приведем алгоритм решения задач данного типа.

Исходные данные: ε, S_x^2, α, $n_0 = 2$, $\Delta = \Delta(\alpha)$.

1. Проводим n_0 испытаний.
2. Находим соответствующие значения $\overline{x}$ и S_x^2.
3. Находим t из уравнения (12).
4. Находим значения $I_{\text{л}} = \left\lfloor \dfrac{S_x^2 - \varepsilon_1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$ и $I_{\text{п}} = \left\lfloor \dfrac{S_x^2 + \varepsilon_1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$.

5. Сравниваем полученные значения с n_0. Если неравенство (18) не выполняется, то полагаем $n_0 = n_0 + 1$ и переходим на шаг 1 алгоритма (т.е. проводим еще одно испытание). Если неравенство выполняется, то объем репрезентативности с погрешностью Δ равен найденному значению n_0.

Алгоритм решения задач данного типа рассмотрим в части практической реализации на конкретном примере.

4. Пример расчетов

В качестве практической реализации рассмотрим пример определения объема репрезентативности для любого распределения при неизвестной дисперсии.

Допустим, речь идет о балле учащегося по тестированию, когда балл за каждое задание изменяется от 0 до 10. Баллы учащегося по тестированию приведены в табл. 1. Надо определить минимальное количество заданий (объем репрезентативности), при котором средний балл выборки будет отличаться от истинного среднего балла не более, чем на ε с надежностью α.

Таблица 1

Балл учащегося по тестированию

Student score on testing

4	3	5	6	5	7	6	7	5	8	9	6	5	5	4	7	4	8	6	9

Пусть заданы значения: $\varepsilon = 0{,}5$; $\varepsilon_1 = 0{,}5$; $\alpha = 0{,}1$; $n = 20$, $n_0 = 2$, $o = 0{,}001$, функция погрешности $\Delta = 0{,}001/\alpha$.

Алгоритм заключается в следующем.

1. Первоначально $n_0 = 2$. Из опыта определяем баллы за первое и второе задания: x_1 и x_2. Пусть, например, $x_1 = 4$ и $x_2 = 3$.

2. Находим $\bar{x} = 3{,}5$ и $S_x^2 = 0{,}5$.

3. Находим $S_x^2 - \varepsilon_1 = 0{,}5 - 0{,}5 = 0$ и $S_x^2 + 0{,}01 = 1$.

4. Из (12) находим t при $\Delta = 0{,}01$. Получаем 1,7180.

5. Вычисляем:

$$I_{\text{л}} = \left\lfloor \frac{S_x^2 - \varepsilon_1}{\varepsilon^2} t \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{0{,}5 - 0{,}5}{0{,}25} 1{,}718 \right\rfloor + 1 = 1,$$

$$I_{\text{п}} = \left\lfloor \frac{S_x^2 + \varepsilon_1}{\varepsilon^2} t \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{0{,}5 + 0{,}01}{0{,}25} 1{,}718 \right\rfloor + 1 = 7.$$

6. Проверяем выполнение неравенства (18). Оно не выполняется, полагаем $n_0 = n_0 + 1 = 3$ и переходим на шаг 1 алгоритма.

Порядок вычислений приведен в табл. 2.

Таблица 2

Порядок вычислений
Calculation Order

n_0	x	S_x^2	$\overline{x}$	$S_x^2+\varepsilon_1$	$S_x^2-\varepsilon_1$	$(S_x^2+\varepsilon_1)/\varepsilon^2$	$(S_x^2-\varepsilon_1)/\varepsilon^2$	$I_п$	$I_л$
1	4								
2	3	0,5000	3,5000	1,0000	0,0000	4,0000	0,0000	7	1
3	5	1,0000	4,0000	1,5000	0,5000	6,0000	2,0000	11	4
4	6	1,6667	4,5000	2,1667	1,1667	8,6667	4,6667	15	9
5	5	1,3000	4,6000	1,8000	0,8000	7,2000	3,2000	13	6
6	7	2,0000	5,0000	2,5000	1,5000	10,0000	6,0000	18	11
7	6	1,8095	5,1429	2,3095	1,3095	9,2381	5,2381	16	9
8	7	1,9821	5,3750	2,4821	1,4821	9,9286	5,9286	18	11
9	5	1,7500	5,3333	2,2500	1,2500	9,0000	5,0000	16	9
10	8	2,2667	5,6000	2,7667	1,7667	11,0667	7,0667	20	13

Для рассмотренного примера неравенство (18) выполняется при $n_0 = 9$.

Заключение

Дальнейшим развитием разработанного в статье метода является его развитие для моды, медианы и других параметров законов распределения, а также построение интервальных оценок для нечетких данных.

Разработанный авторами метод может применяться в социально-экономических, военных, технических, медицинских, экологических, биологических и других системах, а также при решении задач квалиметрии, метрологии, стандартизации и сертификации продукции.

Список источников

1. *Белицкий В.И., Соколов С.М., Шерстюк А.В*. Минимизация объема выборки измерений постоянной величины // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского. 2014. № 644. С. 7–21.
2. *Ганичева А.В., Ганичев А.В*. Метод построения доверительного интервала для дисперсии случайной величины // Вестник НГУЭУ. 2021. № 3. С. 146–155.
3. *Гржибовский А.М*. Доверительные интервалы для частот и долей // Экология человека. 2008. № 5. С. 57–60.
4. *Гуменникова Ю.В., Рябинова Е.Н., Черницына Р.Н*. Статистическая обработка результатов тестирования студентов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Психолого-педагогические науки. 2015. № 3 (27). С. 78–87.
5. *Иванов М.А., Луценко М.М*. Минимаксные доверительные интервалы для параметра гипергеометрического распределения // Автоматика и телемеханика. 2000. № 7. С. 68–76.
6. *Кан Ю.С., Соболь В.Р*. Асимптотический доверительный интервал для условной вероятности при принятии решений // Автоматика и телемеханика. 2017. № 10. С. 130–138.
7. *Крейдик Е.Л*. Методика расчета доверительного интервала оценки случайной величины, подчиненной композиции нормального и равномерного законов распределения // Доклады БГУИР. 2017. № 7 (109). С. 25–31.

8. *Кривенцов А.С., Ульянов М.В.* Интервальная оценка параметров бета-распределения при определении доверительной трудоемкости алгоритмов // Известия ЮФУ. 2012. № 7 (132). С. 210–219.
9. *Попов А.М.* Построение доверительного интервала для медианы распределения непрерывного типа // Системный анализ и аналитика. 2017. № 1 (2). С. 29–37.
10. *Приходько С.Б., Макарова Л.Н.* Определение доверительного интервала точечной оценки параметра экспоненциального распределения // Проблеми інформаційних технологій. 2012. № 2 (012). С. 84–87.
11. *Радионова М.В.* Построение оптимальных доверительных интервалов для параметров положения и масштаба распределений // Актуальные вопросы современной науки. 2010. № 11. С. 7–31.
12. *Светлаков А.А., Свинолупов Ю.Г., Шумаков Е.В.* Рекуррентный способ построения доверительных интервалов оценивания неизвестных значений измеряемых величин // Приборы. 2006. № 6. С. 54–59.
13. *Симанков В.С., Бучацкая В.В., Теплоухов С.В.* Определение оптимального сочетания доверительного интервала и доверительной вероятности // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 2019. № 3 (246). С. 69–74.
14. *Суворова А.В., Пащенко А.Е., Тулупьева Т.В., Тулупьев А.Л.* Построение доверительных интервалов оценок интенсивности рискованного поведения на основе неравенства Чебышева // Труды СПИИРАН. 2009. № 10. С. 96–109.
15. *Трегубов Р.Б., Стремоухов М.В.* Задача оценивания параметра биномиального распределения по ограниченному числу опытов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2015. № 2 (163). С. 93–106.
16. *Ярмамедов Д.М., Липатов В.А.* Метод доверительных интервалов в биологических и медицинских исследованиях // Innova. 2016. № 3 (4). С. 13–15.
17. Bonett D.G. Robust Confidence Interval for a Ratio of Standard Deviations // Applied Psychological Measurement. 2006. Vol. 30, no. 5. Pp. 432–439.
18. *Di Stefano J.* A confidence interval approach to data analysis // Forest Ecology and Management. 2004. Vol. 187, no. 2-3. Pp. 173–183.
19. *Henderson M., Meyer M.C.* Exploring the Confidence Interval for a Binomial Parameter in a First Course in Statistical Computing // American Statistician. 2001. Vol. 55, no. 4. Pp. 337–344.

References

1. Belickij V.I., Sokolov S.M., Sherstjuk A.V. Minimizacija ob#ema vyborki izmerenij postojannoj velichiny [Minimization of the sample size of measurements of constant magnitude], Trudy Voenno-kosmicheskoj akademii im. A.F. Mozhajskogo [Proceedings of the Military Space Academy named after A.F. Mozhaisky], 2014, no. 644, pp. 7–21.
2. Ganicheva A.V., Ganichev A.V. Metod postroenija doveritel'nogo intervala dlja dispersii sluchajnoj velichiny [Method of constructing a confidence interval for the variance of a random variable], *Vestnik NGUJeU* [*Vestnik NSUEM*], 2021, no. 3, pp. 146–155.
3. Grzhibovskij A.M. Doveritel'nye intervaly dlja chastot i dolej [Confidence intervals for frequencies and fractions], *Jekologija cheloveka* [*Human ecology*], 2008, no. 5, pp. 57–60.
4. Gumennikova Ju.V., Rjabinova E.N., Chernicyna R.N. Statisticheskaja obrabotka rezul'tatov testirovanija studentov [Statistical processing of student testing results], *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta* [*Vestnik of Samara State Technical University*]. *Serija: Psihologo-pedagogicheskie nauki* [*Series: Psychological and pedagogical sciences*], 2015, no. 3 (27), pp. 78–87.

5. Ivanov M.A., Lucenko M.M. Minimaksnye doveritel'nye intervaly dlja parametra gipergeometricheskogo raspredelenija [Minimax confidence intervals for the hypergeometric distribution parameter], *Avtomatika i telemehanika* [*Automation and telemechanics*], 2000, no. 7, pp. 68–76.
6. Kan Ju.S., Sobol' V.R. Asimptoticheskij doveritel'nyj interval dlja uslovnoj verojatnosti pri prinjatii reshenij [Asymptotic confidence interval for conditional probability in decision-making], *Avtomatika i telemehanika* [*Automation and telemechanics*], 2017, no. 10, pp. 130–138.
7. Krejdik E.L. Metodika rascheta doveritel'nogo intervala ocenki sluchajnoj velichiny, podchinennoj kompozicii normal'nogo i ravnomernogo zakonov raspredelenija [Method of calculating the confidence interval of estimating a random variable subordinate to the composition of normal and uniform distribution laws], Doklady BGUIR [Reports of the University], 2017, no. 7 (109), pp. 25–31.
8. Krivencov A.S., Ul'janov M.V. Interval'naja ocenka parametrov beta-raspredelenija pri opredelenii doveritel'noj trudoemkosti algoritmov [Interval estimation of parameters of the beta distribution in the determination of the confidence of the complexity of algorithms], *Izvestija JuFU* [*Izvestiya SFU*], 2012, no. 7 (132), pp. 210–219.
9. Popov A.M. Postroenie doveritel'nogo intervala dlja mediany raspredelenija nepreryvnogo tipa [Construction of the confidence interval for the median of the distribution of the continuous type], *Sistemnyj analiz i analitika* [*System analysis and Analytics*], 2017, no. 1 (2), pp. 29–37.
10. Prihod'ko S.B., Makarova L.N. Opredelenie doveritel'nogo intervala tochechnoj ocenki parametra jeksponencial'nogo raspredelenija [Determination of the confidence interval of the point estimation of the exponential distribution parameter], *Problemi informacijnih tehnologij* [*Problems of information technologies*], 2012, no. 2 (012), pp. 84–87.
11. Radionova M.V. Postroenie optimal'nyh doveritel'nyh intervalov dlja parametrov polozhenija i masshtaba raspredelenij [Construction of optimal confidence intervals for the parameters of the position and scale of distributions], *Aktual'nye voprosy sovremennoj nauki* [*Actual issues of modern science*], 2010, no. 11, pp. 7–31.
12. Svetlakov A.A., Svinolupov Ju.G., Shumakov E.V. Rekurrentnyj sposob postroenija doveritel'nyh intervalov ocenivanija neizvestnyh znachenij izmerjaemyh velichin [Recurrent method of constructing confidence intervals for estimating unknown values of measured quantities], *Pribory* [*Instruments*], 2006, no. 6, pp. 54–59.
13. Simankov V.S., Buchackaja V.V., Teplouhov S.V. Opredelenie optimal'nogo sochetanija doveritel'nogo intervala i doveritel'noj verojatnosti [Determination of the optimal combination of confidence interval and confidence probability], *Vestnik Adygejskogo gosudarstvennogo universiteta* [*Vestnik of the Adygea State University*]. *Serija 4: Estestvenno-matematicheskie i tehnicheskie nauki* [*Series 4: Natural-mathematical and technical sciences*], 2019, no. 3 (246), pp. 69–74.
14. Suvorova A.V., Pashhenko A.E., Tulup'eva T.V., Tulup'ev A.L Postroenie doveritel'nyh intervalov ocenok intensivnosti riskovannogo povedenija na osnove neravenstva Chebysheva [Construction of confidence intervals for assessing the intensity of risky behavior based on Chebyshev inequality], Trudy SPIIRAN [Proceedings of SPIIRAN], 2009, no. 10, pp. 96–109.
15. Tregubov R.B., Stremouhov M.V. Zadacha ocenivanija parametra binomial'nogo raspredelenija po ogranichennomu chislu opytov [The problem of estimating the binomial distribution parameter for a limited number of experiments], *Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki* [*Izvestiya SFU. Technical sciences*], 2015, no. 2 (163), pp. 93–106.
16. Jarmamedov D.M., Lipatov V.A. Metod doveritel'nyh intervalov v biologicheskih i medicinskih issledovanijah [Method of confidence intervals in biological and medical research], *Innova* [*Innova*], 2016, no. 3 (4), pp. 13–15.

17. Bonett D.G. Robust Confidence Interval for a Ratio of Standard Deviations. *Applied Psychological Measurement*, 2006, vol. 30, no. 5, pp. 432–439.
18. Di Stefano J. A confidence interval approach to data analysis. *Forest Ecology and Management*, 2004, vol. 187, no. 2-3, pp. 173–183.
19. Henderson M., Meyer M.C. Exploring the Confidence Interval for a Binomial Parameter in a First Course in Statistical Computing. *American Statistician*, 2001, vol. 55, no. 4, pp. 337–344.

Сведения об авторах:

А.В. Ганичева – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра физико-математических дисциплин и информационных технологий, Тверская государственная сельскохозяйственная академия, Тверь, Российская Федерация.

А.В. Ганичев – доцент, кафедра информатики и прикладной математики, Тверской государственный технический университет, Тверь, Российская Федерация.

Information about the authors:

A.V. Ganicheva – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Physical and Mathematical Disciplines and Information Technologies, Tver State Agricultural Academy, Tver, Russian Federation.

A.V. Ganichev – Associate Professor, Department of Informatics and Applied Mathematics, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.
The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию	*14.11.2021*	*The article was submitted*	*14.11.2021*
Одобрена после рецензирования	*10.12.2021*	*Approved after reviewing*	*10.12.2021*
Принята к публикации	*08.01.2022*	*Accepted for publication*	*08.01.2022*