УДК 539.375:629.7.02

# РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ И ТОНКИМИ ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

В. Н. Максименко, С. А. Зорин

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск
E-mail: kimt@ngs.ru

Исследуется напряженно-деформированное состояние анизотропной пластины с эллиптическим отверстием, содержащей тонкие абсолютно жесткие криволинейные включения. Строятся общие интегральные представления решения задачи, автоматически удовлетворяющие краевым условиям на контуре эллиптического отверстия и на бесконечности. Неизвестные плотности, входящие в потенциальные представления решения, определяются из граничных условий вдоль линий жестких включений. Задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений, которая решается численно. Исследуется влияние анизотропии материала пластины, степени эллиптичности отверстия, геометрических характеристик жестких включений на концентрацию напряжений в пластине. Проводится сравнение полученных численных результатов с известными аналитическими решениями.

Ключевые слова: анизотропная пластина, тонкие жесткие включения, концентрация напряжений, коэффициент интенсивности напряжений, интегральное уравнение.

Пусть бесконечная прямолинейно-анизотропная пластина толщиной $h$ ослаблена эллиптическим отверстием с контуром $L_0 = \{(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\}$ и системой тонких абсолютно жестких включений, расположенных вдоль незамкнутых гладких кривых $L_j$ $(j = \overline{1,k}\,)$. Кривые не пересекаются и не выходят на контур $L_0$. На каждом контуре $L_j$ выбрана нормаль $\boldsymbol{n}(t)$ $(t \in L_j)$, направленная вправо относительно направления движения от точек $a_j$ к точкам $b_j$ (рис. 1). Пластина нагружена внешними усилиями $X_n + iY_n$ на контуре отверстия и усилиями $\sigma_x^\infty$, $\sigma_y^\infty$, $\tau_{xy}^\infty$ на бесконечности. Каждое включение может

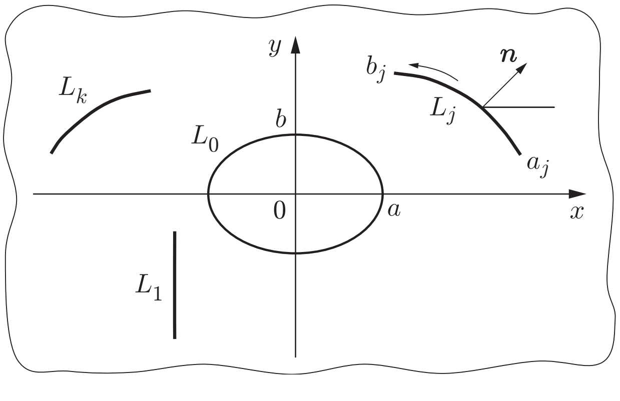


Рис. 1. Бесконечная анизотропная пластина с эллиптическим отверстием $L_0$ и системой тонких абсолютно жестких включений $L_j$ $(j = \overline{1,k}\,)$

перемещаться и поворачиваться как жесткое целое:

$$
\begin{gathered}
u^{\pm}(t) + iv^{\pm}(t) = g_1(t) + ig_2(t) = G(t), \qquad t \in L = \bigcup_{j=1}^{k} L_j, \\
G(t) = c_j + i\varepsilon_j t, \qquad t \in L_j.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь $c_j$ — комплексная константа; $\varepsilon_j$ — неизвестный или заданный угол поворота жесткого включения $L_j$. Знаки "+", "−" соответствуют левому и правому берегам включения. Считаем, что пластина находится в обобщенном плоском напряженном состоянии, а вращение на бесконечности равно нулю.

Напряжения в пластине можно выразить через две аналитические функции $\Phi_\nu(z_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$:

$$
(\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y) = 2 \operatorname{Re} \Big( \sum_{\nu=1}^{2} (\mu_\nu^2, -\mu_\nu, 1) \Phi_\nu(z_\nu) \Big) \tag{2}
$$

($z_\nu = x + \mu_\nu y$; $\mu_\nu$ — корни соответствующего характеристического уравнения с положительными мнимыми частями [1]).

Функции $\Phi_\nu(z_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$ представим в виде

$$
\Phi_\nu(z_\nu) = \sum_{i=1}^{2} \Phi_{\nu i}(z_\nu). \tag{3}
$$

Здесь $\Phi_{\nu 1}(z_\nu)$ — решение для бесконечной анизотропной пластины с эллиптическим отверстием, нагруженной по контуру отверстия и на бесконечности заданными усилиями [1]; функции $\Phi_{\nu 2}(z_\nu)$ определяют возмущенное напряженное состояние, возникающее из-за наличия жестких включений.

На основе решения задачи о действии сосредоточенной силы во внутренней точке $\tau$ бесконечной анизотропной не нагруженной на бесконечности пластины со свободным от внешних усилий эллиптическим отверстием $L_0$ [1]:

$$
\begin{gathered}
\Psi_\nu(z_\nu, \tau_\nu) = \frac{1}{\omega_\nu'(\zeta_\nu)} \Big( \frac{A_\nu^*}{\zeta_\nu - \eta_\nu} - \frac{l_\nu \overline{A_1^*}}{\zeta_\nu (1 - \zeta_\nu \bar\eta_1)} - \frac{n_\nu \overline{A_2^*}}{\zeta_\nu (1 - \zeta_\nu \bar\eta_2)} \Big), \\
z_\nu = \omega_\nu(\zeta_\nu) = \frac{a - i\mu_\nu b}{2} \, \zeta_\nu + \frac{a + i\mu_\nu b}{2} \, \zeta_\nu^{-1}, \qquad |\zeta_\nu| > 1, \\
\zeta_\nu = \zeta_\nu(z_\nu) = \frac{z_\nu + \sqrt{z_\nu^2 - (a^2 + \mu_\nu^2 b^2)}}{a - i\mu_\nu b}, \qquad \zeta_\nu(\infty) = \infty, \\
\eta_\nu = \zeta_\nu(\tau_\nu) = \frac{\tau_\nu + \sqrt{\tau_\nu^2 - (a^2 + \mu_\nu^2 b^2)}}{a - i\mu_\nu b}, \qquad \tau_\nu = \operatorname{Re} \tau + \mu_\nu \operatorname{Im} \tau, \\
l_\nu = \frac{\mu_{3-\nu} - \bar\mu_1}{\mu_\nu - \mu_{3-\nu}}, \qquad n_\nu = \frac{\mu_{3-\nu} - \bar\mu_2}{\mu_\nu - \mu_{3-\nu}} \qquad (\nu = 1, 2)
\end{gathered}
$$

(коэффициенты $A_\nu^*$ зависят от величины и направления сосредоточенной силы [1]), используя принцип суперпозиции [2], функции $\Phi_{\nu 2}(z_\nu)$ будем искать в виде

$$\Phi_{\nu 2}(z_\nu) = \frac{1}{\omega'_\nu(\zeta_\nu)} \int\limits_L \Big( \frac{A^*_\nu(\tau)}{\zeta_\nu - \eta_\nu} - \frac{l_\nu \overline{A^*_1(\tau)}}{\zeta_\nu(1-\zeta_\nu\bar\eta_1)} - \frac{n_\nu \overline{A^*_2(\tau)}}{\zeta_\nu(1-\zeta_\nu\bar\eta_2)} \Big)\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i \omega'_\nu(\zeta_\nu)} \int\limits_L \Big( \frac{\Omega_\nu(\tau)}{\eta_\nu - \zeta_\nu}\, d\tau_\nu - \frac{l_\nu \overline{\Omega_1(\tau)}}{\zeta_\nu(1-\zeta_\nu\bar\eta_1)}\, d\bar\tau_1 - \frac{n_\nu \overline{\Omega_2(\tau)}}{\zeta_\nu(1-\zeta_\nu\bar\eta_2)}\, d\bar\tau_2 \Big), \qquad (4)$$

$$\Omega_\nu(\tau) = -2\pi i A^*_\nu(\tau)/M_\nu(\tau), \qquad M_\nu(\tau) = \mu_\nu \cos\psi(\tau) - \sin\psi(\tau).$$

Здесь $\Omega_\nu(\tau) = \{\Omega_{\nu j}(\tau)\colon \tau \in L_j,\ j = \overline{1,k}\,\}$ — неизвестные комплексные функции на контурах $L_j$; $\psi = \psi(\tau) = \{\psi_j(\tau)\colon \tau \in L_j,\ j = \overline{1,k}\}$ — угол между нормалью $\boldsymbol{n}$ к левому берегу жесткого включения $L_j$ и осью $x$; $d\tau_\nu = M_\nu(\tau)\, ds$; $ds$ — элемент дуги $L$.

Построенные таким образом функции $\Phi_{\nu 2}(z_\nu)$ автоматически удовлетворяют условиям $X_n = Y_n = 0$ на контуре отверстия $L_0$ и затухают на бесконечности. Следовательно, выбор функций $\Phi_\nu(z_\nu)$ в виде (3) обеспечивает выполнение краевых условий на контуре отверстия $L_0$ и на бесконечности.

Продифференцировав выражение (1) по длине дуги, получим граничное условие в виде [3]

$$A(t)\Phi_1^\pm(t_1) + B(t)\overline{\Phi_1^\pm(t_1)} + \Phi_2^\pm(t_2) = W^\pm(t), \qquad t \in L, \qquad (5)$$

где

$$W^\pm(t) = \frac{\bar p_2\, dg_2(t)/ds - \bar q_2\, dg_1(t)/ds}{(\bar p_2 q_2 - p_2 \bar q_2) M_2(t)}, \qquad A(t) = A_0 \frac{M_1(t)}{M_2(t)}, \qquad B(t) = B_0 \frac{\overline{M_1(t)}}{M_2(t)},$$

$$A_0 = \frac{\bar p_2 q_1 - p_1 \bar q_2}{\bar p_2 q_2 - p_2 \bar q_2}, \qquad B_0 = \frac{\bar p_2 \bar q_1 - \bar p_1 \bar q_2}{\bar p_2 q_2 - p_2 \bar q_2},$$

$$p_\nu = a_{11}\mu_\nu^2 - a_{16}\mu_\nu + a_{12}, \qquad q_\nu = a_{12}\mu_\nu + a_{22}\mu_\nu^{-1} - a_{26},$$

$\Phi_\nu^\pm(t_\nu)$ — граничные значения функций $\Phi_\nu(z_\nu)$ на контуре $L$; $a_{ij}$ — коэффициенты деформаций материала анизотропной пластины [1].

Подставляя предельные значения функций $\Phi_\nu(z_\nu)$ из (3), (4) в краевые условия на жестких включениях $L_j$ (5), после некоторых преобразований получим

$$\int\limits_L \frac{\Omega_1(\tau)}{\eta_1 - \zeta_1}\, d\tau_1 + \int\limits_L [K_{11}(t,\tau)\Omega_1(\tau) + K_{12}(t,\tau)\overline{\Omega_1(\tau)}\,]\, ds = f^*(t), \qquad t \in L = \bigcup_{j=1}^k L_j. \qquad (6)$$

Здесь

$$K_{11}(t,\tau)\, ds = \frac{\omega'_1(\zeta_1)}{2\overline{B(t)}} \Big[ \frac{\overline{B(\tau)} - \overline{B(t)}}{\overline{\omega'_2(\zeta_2)}\,(\bar\eta_2 - \bar\zeta_2)}\, d\bar\tau_2 + \overline{B(t)} \Big( \frac{\overline{\omega'_2(\eta_2)} - \overline{\omega'_2(\zeta_2)}}{\overline{\omega'_2(\zeta_2)}\,(\bar\eta_2 - \bar\zeta_2)}\, d\bar\eta_2 -$$

$$- \frac{\omega'_1(\eta_1) - \omega'_1(\zeta_1)}{\omega'_1(\zeta_1)(\eta_1 - \zeta_1)}\, d\eta_1 + d\ln\frac{\bar\eta_2 - \bar\zeta_2}{\eta_1 - \zeta_1} \Big) - \frac{\overline{A(t)}}{\overline{\omega'_1(\zeta_1)}\,\bar\zeta_1} \Big( \frac{\bar n_1 A(\tau)}{1 - \bar\zeta_1 \eta_2}\, d\tau_2 - \frac{\bar l_1}{1 - \bar\zeta_1\,\eta_1}\, d\tau_1 \Big) +$$

$$+ \frac{n_1 \overline{B(\tau)}\,\overline{B(t)}}{\omega'_1(\zeta_1)\zeta_1(1 - \zeta_1\bar\eta_2)}\, d\bar\tau_2 - \frac{1}{\overline{\omega'_2(\zeta_2)}\,\bar\zeta_2} \Big( \frac{\bar n_2 A(\tau)}{1 - \bar\zeta_2 \eta_2}\, d\tau_2 - \frac{\bar l_2}{1 - \bar\zeta_2 \eta_1}\, d\tau_1 \Big) \Big],$$

$$K_{12}(t,\tau)\,ds = \frac{\omega_1'(\zeta_1)}{2\overline{B(t)}}\Big[\frac{\overline{A(\tau)}-\overline{A(t)}}{\overline{\omega_2'(\zeta_2)}(\bar\eta_2-\bar\zeta_2)}\,d\bar\tau_2 - \overline{A(t)}\Big(\frac{\overline{\omega_1'(\eta_1)}-\overline{\omega_1'(\zeta_1)}}{\overline{\omega_1'(\zeta_1)}(\bar\eta_1-\bar\zeta_1)}\,d\bar\eta_1 -$$

$$-\frac{\overline{\omega_2'(\eta_2)}-\overline{\omega_2'(\zeta_2)}}{\overline{\omega_2'(\zeta_2)}(\bar\eta_2-\bar\zeta_2)}\,d\bar\eta_2 + d\ln\frac{\bar\eta_1-\bar\zeta_1}{\bar\eta_2-\bar\zeta_2}\Big) - \frac{\overline{B(t)}}{\omega_1'(\zeta_1)\zeta_1}\Big(\frac{l_1}{1-\zeta_1\bar\eta_1}\,d\tau_1 - \frac{n_1\overline{A(\tau)}}{1-\zeta_1\bar\eta_2}\,d\bar\tau_2\Big) -$$

$$- B(\tau)\,d\tau_2\Big(\frac{\bar n_1\overline{A(t)}}{\overline{\omega_1'(\zeta_1)}\bar\zeta_1(1-\bar\zeta_1\eta_2)} + \frac{\bar n_2}{\overline{\omega_2'(\zeta_2)}\bar\zeta_2(1-\bar\zeta_2\eta_2)}\Big)\Big],$$

$$f^*(t) = \frac{\pi i\omega_1'(\zeta_1)}{2\overline{B(t)}}\,\{\overline{W_2(t)} - 2[\overline{A(t)}\,\overline{\Phi_{11}(t_1)} + \overline{B(t)}\,\Phi_{11}(t_1) + \overline{\Phi_{21}(t_2)}\,]\},$$

$$W_2(t) = W^+(t) + W^-(t).$$

Согласно допущениям относительно гладкости $L_j$ $(j = \overline{1,k})$ функции $K_{11}(t,\tau)$, $K_{12}(t,\tau)$, $f^*(t)$ непрерывны.

К сингулярному интегральному уравнению (6) необходимо добавить уравнения

$$\int\limits_{L_j}\Omega_1(\tau)\,d\tau_1 = 0 \qquad (j = \overline{1,k}), \tag{7}$$

представляющие собой условия равенства нулю главного вектора всех сил, действующих на каждое жесткое включение.

Для определения неизвестных углов поворота $\varepsilon_j$ $(j = \overline{1,k})$ к системе (6), (7) нужно добавить условия равенства нулю главного момента всех сил, действующих на каждое жесткое включение. Эти условия имеют вид [3]

$$2\,\mathrm{Re}\Big(\int\limits_{L_j}(\tau_1 - \tau_2 A_0 - \bar\tau_2\bar B_0)\Omega_1(\tau)\,d\tau_1\Big) = 0 \qquad (j = \overline{1,k}\,). \tag{8}$$

Из сингулярного интегрального уравнения (6) с дополнительными условиями (7), (8) можно получить решение поставленной задачи об определении напряженно-деформированного состояния анизотропной пластины с эллиптическим отверстием и системой тонких абсолютно жестких криволинейных включений.

Решение сингулярного интегрального уравнения (6) будем искать в виде

$$\Omega_1(\tau) = \chi^j(\xi)(1-\xi^2)^{-1/2}, \qquad \tau\in L_j = \{\tau = \tau^j(\xi)\colon |\xi|<1\}, \tag{9}$$

где $\chi^j(\xi)$ — ограниченные функции, непрерывные по Гельдеру на отрезке $[-1,1]$. Согласно допущениям относительно гладкости кривых $L_j$ решение уравнения (6) при дополнительных ограничениях (7), (8) в классе функций (9) существует и единственно [4]. С помощью квадратурных формул Гаусса — Чебышева [5] сингулярное интегральное уравнение (6) с дополнительными условиями (7), (8) сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомых функций $\chi^j(\xi)$ в чебышевских узлах:

$$\xi_i = \cos\Big(\frac{2i-1}{2N_j}\,\pi\Big) \qquad (i = \overline{1,N_j}, \quad j = \overline{1,k}\,)$$

($N_j$ — количество чебышевских узлов на контуре $L_j$). Теоретические оценки сходимости данного численного метода приведены в [6].

Решив систему линейных алгебраических уравнений и определив $\chi^j(\xi)$, можно вычислить значения потенциалов $\Phi_\nu(z_\nu)$ и напряжений в пластине по формуле (2) и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) отрыва и сдвига в вершине жесткого включения $L_j$:

$$K_1(c) = \lim_{t\to c}\sigma_n\sqrt{2\pi r}, \qquad K_2(c) = \lim_{t\to c}\tau_n\sqrt{2\pi r}. \tag{10}$$

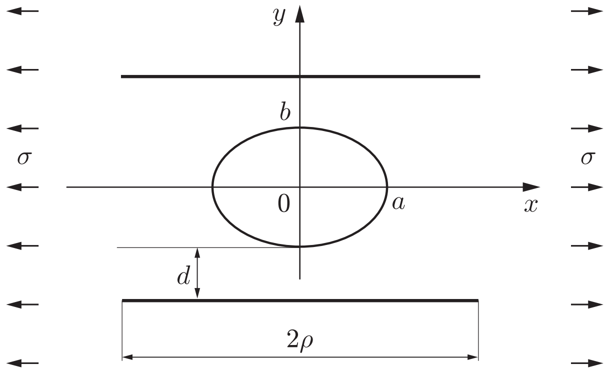


Рис. 2. Бесконечная анизотропная пластина с эллиптическим отверстием $L_0$ и двумя симметрично расположенными тонкими жесткими включениями при одноосном растяжении

Здесь $t$ — точка, лежащая на продолжении жесткого включения по касательной, проведенной в вершине $c$; $r = |t - c|$.

Ниже представлены результаты расчетов для пластины из анизотропного (ортотропного) материала с эллиптическим отверстием и двумя симметрично расположенными тонкими жесткими включениями (рис. 2). При $\varphi = 0$ ($\varphi$ — угол между главным направлением анизотропии $E_1$ и осью $x$) приняты следующие параметры анизотропии материала пластины: $E_1 = 53{,}84$ ГПа, $E_1/E_2 = 3$, $G_{12} = 8{,}63$ ГПа, $\nu_1 = 0{,}25$. Пластина равномерно растягивается вдоль оси $x$ усилиями $\sigma_x^\infty = \sigma$. На рис. 3, 4 представлены зависимости приведенного коэффициента концентрации напряжений $K^*$ ($K^* = \sigma_x(0,b)/\sigma_x^0(0,b)$; $\sigma_x(0,b)$, $\sigma_x^0(0,b)$ — напряжение $\sigma_x$ в точке $(0,b)$ эллиптического отверстия при наличии и отсутствии жестких включений соответственно) от относительных длин перемычки $d/b$

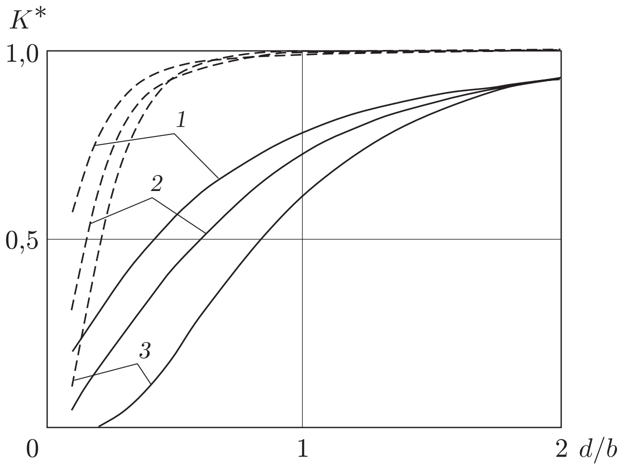


Рис. 3

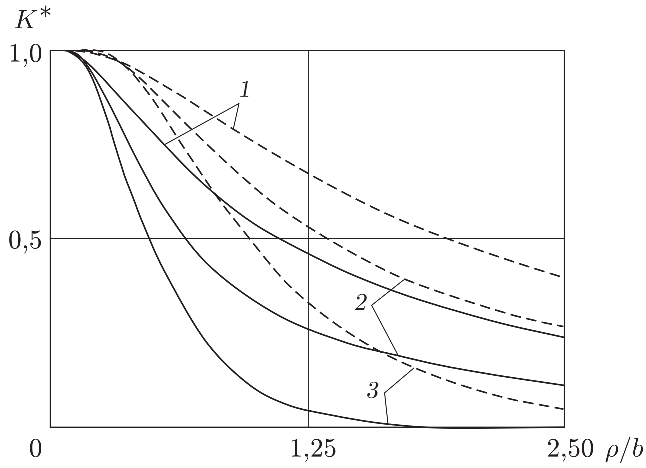


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость коэффициента $K^*$ в ортотропной пластине от относительной длины перемычки $d/b$:

сплошные кривые — $\rho/b = 2$; штриховые — $\rho/b = 0{,}5$; *1* — $\lambda = 0{,}001$; *2* — $\lambda = 1$; *3* — $\lambda = 1000$

Рис. 4. Зависимость коэффициента $K^*$ в ортотропной пластине от относительной длины жестких включений $\rho/b$:

сплошные кривые — $d/b = 0{,}2$; штриховые — $d/b = 0{,}4$; *1* — $\lambda = 0{,}001$; *2* — $\lambda = 1$; *3* — $\lambda = 1000$

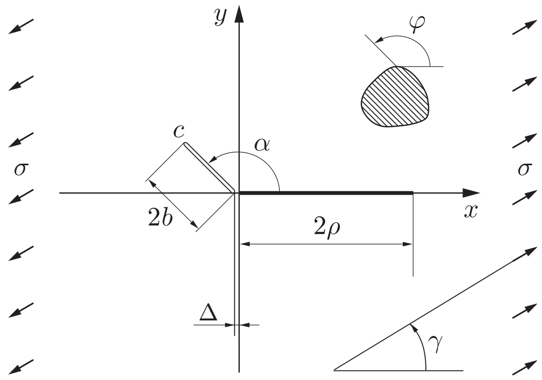


Рис. 5. Бесконечная анизотропная пластина с произвольно ориентированной трещиной, выходящей из конца жесткого линейного включения, расположенного вдоль оси $x$, при одноосном растяжении

и включения $\rho/b$ при различных значениях параметра эллиптичности отверстия $\lambda = a/b$ в случае ортотропного материала пластины ($E_1/E_2 = 3$) и $\varphi = 0$. При $\lambda = 0{,}001$ эллиптическое отверстие практически вырождается в прямолинейный разрез. В этом случае результаты расчетов согласуются с полученными в [2] для задачи об анизотропной пластине с разрезами, подкрепленной тонкими упругими ребрами жесткости (если положить относительный параметр жесткости ребер $u^0 = E_1bh/(E^0F^0) = 0$, где $E^0$, $F^0$ — модуль Юнга и площадь поперечного сечения ребра). Из рис. 3, 4 следует, что длины жесткого включения и перемычки между отверстием и включением оказывают существенное влияние на концентрацию напряжений в пластине.

Рассмотрим задачу об определении напряженно-деформированного состояния бесконечной анизотропной пластины с произвольно ориентированной трещиной ($\lambda = 0$): $L_0 = \{\tau(\beta) = -\Delta + b(1-\beta)\,\mathrm{e}^{i\alpha}\colon -1 < \beta < 1\}$ и жестким прямолинейным включением: $L_1 = \{\tau(\xi) = \rho(1+\xi)\colon -1 < \xi < 1\}$. На бесконечности пластина подвержена одноосному растяжению усилиями $\sigma$ под углом $\gamma$ к оси $x$ (рис. 5). В расчетах принималось $\Delta/b = 0{,}01$, $\gamma = \pi/4$, $\alpha = \pi$, $\varepsilon_1 = 0$ ($\Delta$ — длина перемычки между концами жесткого включения и трещины; $\varepsilon_1$ — угол поворота включения как жесткого целого). Материал пластины близок к изотропному ($E_1/E_2 = 1$, $\mu_1 = 1{,}004i$, $\mu_2 = 0{,}996i$). В вершине $c$ ($\beta = -1$) трещины коэффициенты интенсивности напряжений отрыва и сдвига будем вычислять так же, как и для жесткого включения, по формуле (10). В таблице приведены результаты расчетов КИН $K_{1,2}/(\sigma\sqrt{\pi\rho}\,)$ в вершине $c$ трещины при $\rho/b = 10$, $10^2$, $10^3$ и $N = 50$, $100$ ($N$ — количество чебышевских узлов разбиения контура жесткого включения). Для сравнения полученных численных результатов в таблице также приведены точные значения $K_{1,2}/(\sigma\sqrt{\pi\rho}\,)$ в вершине трещины, выходящей из конца жесткого включения ($\Delta = 0$, $\alpha = \pi$) [7]. Из таблицы следует, что при $\rho/b = 10$ погрешность значений КИН, полученных в результате численного решения, составляет доли процента точного значения. В случае $\rho/b = 10^3$ уже при $N = 100$ погрешность не превышает 1 %. Из результатов проведенного сравнения следует, что представленный численный метод можно эффективно применять для решения разномасштабных задач механики разрушения плоских конструктивных элементов.

На рис. 6 представлены зависимости коэффициентов интенсивности напряжений $K_1/(\sigma\sqrt{\pi b}\,)$, $K_2/(\sigma\sqrt{\pi b}\,)$ в вершине $c$ произвольно ориентированной трещины с контуром $L_0 = \{\tau(\beta) = -\Delta + b(1-\beta)(\cos\alpha + i\sin\alpha)\colon -1 < \beta < 1\}$, расположенной вблизи жесткого включения $L_1 = \{\tau(\xi) = \rho(1+\xi)\colon -1 < \xi < 1\}$, от угла наклона $\alpha$. Расчеты выполнялись при $\Delta/b = 0{,}01$, $\varepsilon_1 = 0$. Материал пластины считался ортотропным ($E_1/E_2 = 3$), $\varphi = \alpha$

| $\rho/b$ | $K_1/(\sigma\sqrt{\pi\rho})$ | | | $K_2/(\sigma\sqrt{\pi\rho})$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $N_1 = 50$ | $N_1 = 100$ | Данные [7] | $N_1 = 50$ | $N_1 = 100$ | Данные [7] |
| 10 | 0,132 87 | 0,132 86 | 0,132 85 | 0,203 56 | 0,203 52 | 0,203 22 |
| $10^2$ | 0,015 92 | 0,015 85 | 0,015 84 | 0,116 57 | 0,116 57 | 0,116 11 |
| $10^3$ | −0,020 47 | −0,021 70 | −0,021 87 | 0,088 07 | 0,090 32 | 0,090 07 |

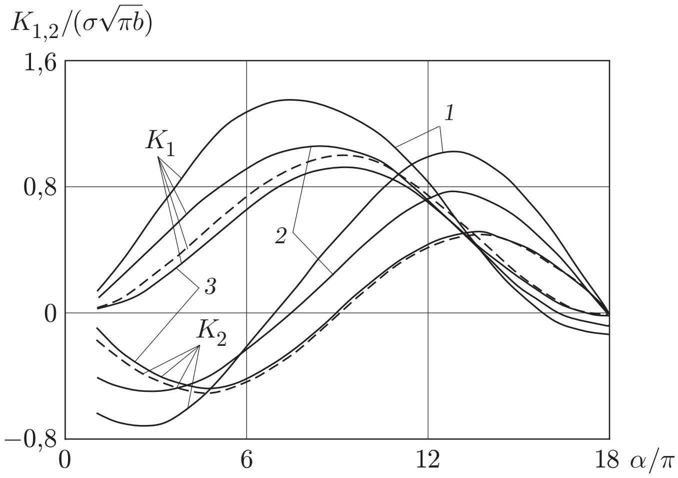


Рис. 6. Зависимости коэффициентов интенсивности напряжений $K_1/(\sigma\sqrt{\pi b}\,)$, $K_2/(\sigma\sqrt{\pi b}\,)$ в вершине $c$ произвольно ориентированной трещины вблизи жесткого включения в ортотропной пластине от угла $\alpha$ при одноосном растяжении: *1* — $\rho/b = 10$; *2* — $\rho/b = 5$; *3* — $\rho/b = 1$; штриховые кривые — $\rho/b = 0{,}1$

(см. рис. 5). К пластине на бесконечности приложены усилия $\sigma_x^\infty = \sigma$ $(\gamma = 0)$. Из рис. 6 следует, что с увеличением длины жесткого включения значения $K_{1,2}/(\sigma\sqrt{\pi b}\,)$ в вершине трещины увеличиваются. Это объясняется тем, что при малых значениях $b/\rho$ трещина находится в сильно возмущенном поле напряжений, обусловленном наличием жесткого включения.

Из приведенных результатов следует, что параметры анизотропии материала пластины, степень эллиптичности отверстия, геометрические характеристики жестких включений оказывают существенное влияние на концентрацию напряжений в пластине. Приведенные в таблице численные результаты расчетов свидетельствуют об эффективности метода граничных интегральных уравнений. Это позволяет применять данный метод для решения разномасштабных задач при расчете напряженно-деформированного состояния и оценке прочности анизотропных пластин с эллиптическим отверстием (трещиной) и тонкими жесткими включениями.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Савин Г. Н.** Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968.
2. **Максименко В. Н.** Задача об анизотропной пластине, ослабленной криволинейными трещинами и усиленной ребрами жесткости // ПМТФ. 1982. № 2. С. 163–169.
3. **Максименко В. Н., Недогибченко Г. В.** Исследование напряженно-деформированного состояния анизотропной полуплоскости, содержащей криволинейные трещины и тонкие жесткие включения, методом интегральных уравнений // Тр. Междунар. науч.-техн. конф. “Научные

основы высоких технологий", Новосибирск, 29 сент. — 3 окт. 1997 г. Новосибирск: Новосиб. гос. техн. ун-т, 1997. Т. 6. С. 60–61.

4. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
5. **Панасюк В. В.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. Киев: Наук. думка, 1976.
6. **Белоцерковский С. М.** Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. М.: Наука, 1985.
7. **Механика** разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. Киев: Наук. думка, 1988. Т. 2.

*Поступила в редакцию 2/IX 2005 г.,*
*в окончательном варианте — 17/VIII 2006 г.*