УДК 517.946

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $h_t = \Delta \ln h$

С. Н. Аристов

Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН, 614013 Пермь

Найдены новые точные регулярные решения уравнения нелинейной диффузии. Описаны различные типы эволюции некоторых классов локализованных начальных возмущений. Показано, что при задании локализованного распределения в виде кольца в результате диффузионного расплывания происходит мгновенное рождение сингулярности в его центре.

Введение. Уравнение нелинейной диффузии часто встречается в различных приложениях и привлекает внимание многих исследователей. Один из вариантов этого уравнения, возникающий при описании эволюции термоклина [1], растекания тонких пленок жидкости по поверхности твердого тела [2] и в некоторых других задачах [3–5], является предметом исследования настоящей работы. Рассмотрим уравнение вида

$$h_t = \Delta \ln h, \tag{1}$$

где нижний индекс обозначает дифференцирование по времени, Δ — трехмерный оператор Лапласа. Согласно общепринятой терминологии уравнение (1) является предельной формой уравнения быстрой диффузии. Описанные в известной нам литературе точные решения уравнения (1) имеют особенности, затрудняющие их физическую интерпретацию. Нас интересуют периодические и локализованные положительные решения, так как именно они представляют наибольший интерес с точки зрения приложений. Из всего многообразия возможных точных решений в данной работе ограничимся в основном анализом тех, которые могут быть записаны в явном виде и наиболее ярко демонстрируют необычные свойства исследуемого уравнения.

Одномерные решения. 1. При рассмотрении нестационарных решений, зависящих только от одной координаты, естественно изучить автомодельные режимы эволюции начальных возмущений. Известно [2, 5], что уравнение (1) допускает класс автомодельных решений с произвольным показателем автомодельности, регулирующим степень растяжения координаты с течением времени. Если ограничиться случаем, когда автомодельные уравнения принимают вид закона сохранения, одно из возможных решений можно представить в виде

$$h = (\tau + t)^{-1} H(\xi), \qquad \xi = x(\tau + t)^{-1} \tag{2}$$

(τ — произвольная постоянная). После подстановки (2) в уравнение (1) и тождественных преобразований получим

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\Big[H\Big(\frac{\partial}{\partial \xi}\Big(\frac{1}{H}\Big) - \xi + \frac{\alpha}{H}\Big)\Big] = 0,$$

где α — произвольная постоянная. После интегрирования получим линейное уравнение для функции, обратной H, что позволяет найти локализованное решение вида

25

$$h = \frac{\alpha^2}{(\tau + t)}\Big[C \exp\Big(-\frac{\alpha x}{\tau + t}\Big) - 1 + \frac{\alpha x}{\tau + t}\Big]^{-1}. \tag{3}$$

Для того чтобы это решение не имело особенностей, постоянная C должна быть больше единицы. Если α равно нулю, то выражение (3) принимает вид

$$h = \frac{2(\tau + t)}{2C(\tau + t)^2 + x^2}.$$

Полученное решение описывает расплывание одномерного слоя и остается регулярным в любой момент времени. В несимметричном случае максимум возмущения движется с постоянной скоростью в сторону более пологого фронта. Заметим, что здесь и далее время отсчитывается от нулевого значения. Произвольные постоянные, входящие в выражение (4), определяют характерный размер и амплитуду начального возмущения.

2. Другое решение описывает равномерно движущийся фронт и имеет вид [1]

$$h = H(\xi), \qquad \xi = x - \beta t. \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнение (1) и интегрируя, получим

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{H}\right) = \beta - \frac{\alpha}{H},$$

где α, β — произвольные постоянные. Выписывая общее решение и удовлетворяя условиям регулярности, имеем

$$h = \frac{\alpha^2}{\alpha\beta + \exp\left(-\alpha(x - \beta t)\right)}. \tag{5}$$

Заметим, что для выполнения условия отсутствия особенностей постоянные α, β должны быть одного знака. Из анализа (5) следует, что фронт движется в сторону уменьшения толщины слоя жидкости, а постоянные определяют ширину фронта, его скорость и толщину невозмущенного слоя жидкости.

3. Для описания автомодельных режимов, соответствующих расплыванию нити или цилиндра, перейдем в цилиндрическую систему координат и воспользуемся преобразованием

$$h(r, \varphi, t) = r^{-2} h(x, y, t), \qquad x = \ln r, \quad y = \varphi. \tag{6}$$

Заметим, что данное преобразование для осесимметричного случая впервые использовано в работе [2]. Применяя (6), получим следующие формулы для случая цилиндрической симметрии:

$$h = \frac{\alpha^2 r^{\alpha - 2}}{r^\alpha + C\exp(t)}; \tag{7}$$

$$h = \frac{\alpha m r^{m-2}}{C + r^m(m\ln r - 1)}, \qquad m = \frac{\alpha}{\tau + t}. \tag{8}$$

Первое решение описывает медленное расплывание локализованного пятна или кольца и качественно не отличается от рассмотренных выше диффузионных режимов эволюции плоского слоя. Время жизни такого возмущения неограничено и не зависит от характерных размеров начального возмущения. При значениях $\alpha < 2$ выражение (7) описывает эволюцию нити, имеющей особенность в начале координат. Решение (8) представляет большой интерес, так как демонстрирует возможность мгновенной перестройки структуры возмущения в момент времени, соответствующий $m = 2$. В отличие от первого режима кольцо монотонно сжимается до некоторого критического момента времени, что приводит к кумуляции и мгновенному изменению структуры при $m = 2$. В этот момент в центре кольца возникает сингулярность, которая в дальнейшем затухает по гиперболическому закону.

31

Роль бифуркационного параметра в данном случае играет время. Такой характер решения соответствует процессу выбрасывания струи жидкости при падении в нее тяжелого тела. Причиной описанного кумулятивного эффекта является отмеченное выше свойство несимметричных возмущений (4) смещаться в сторону более медленного убывания толщины слоя.

4. В трехмерном случае, когда речь идет об эволюции сферического возмущения, удается построить автомодельное решение вида $h = (\tau - t)^3 H(\xi)$, $\xi = r(\tau - t)$. После интегрирования получим уравнение для функции H

$$\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi}\Big(\frac{1}{H}\Big) = -\frac{\alpha}{H} + \xi^3. \tag{9}$$

Решение этого уравнения может быть получено в квадратурах, но оно не выражается ни через элементарные, ни через специальные функции. Из численного решения уравнения (9) следует, что при положительных значениях постоянной интегрирования α оно имеет один максимум и следующие асимптотики:

$$H = 2/\xi^2, \quad \xi \to \infty; \qquad H = \exp(-\alpha/\xi), \quad \xi \to 0.$$

При нулевых значениях параметра α существует аналитическое решение, частный вид которого ранее найден в [2]:

$$h = \frac{2(\tau - t)^3}{2C + (\tau - t)^2(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Неодномерные решения. 1. Несимметричные решения будем искать в виде

$$h = (\tau - t) H(x, y, z). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (1), получим стационарное уравнение

$$\Delta \ln H = -H. \tag{11}$$

В двумерном случае (11) совпадает с уравнением Лиувилля, которое имеет общее решение, выражающееся через произвольные комплексные функции [6]. Обсуждению типов возможных решений (11) посвящено достаточно большое количество работ, например [6–8] (см. также библиографию к ним), поэтому, не останавливаясь на деталях анализа, выпишем единственные известные нам двумерные периодические локализованные решения:

$$H = 2N^2(1 - \varepsilon^2)/(\mathrm{ch}(Nx) + \varepsilon \sin(Ny))^2; \tag{12}$$

$$H = 8N^2(1 - \varepsilon^2) r^{2N-2}/(1 + r^{2N} + 2\varepsilon r^N \sin(N\varphi))^2 \tag{13}$$

(ε — произвольная постоянная, имеющая смысл бифуркационного параметра).

Первое решение известно в теории мелкой воды, а второе, вероятно, впервые было найдено при описании стационарных структур в плазме [7]. Заметим, что данные решения с помощью преобразования (6) переходят друг в друга. Если $\varepsilon = 0$, формулы (12), (13) описывают еще один тип эволюции плоских и осесимметричных начальных возмущений. Необходимо обратить внимание на тот факт, что время жизни таких периодических структур, описываемых решениями (12), (13), может превышать характерное диффузионное время. Это позволяет интерпретировать их как квазистационарные образования, которые при определенных соотношениях между амплитудой и характерным размером начального возмущения могут разрушиться за время, значительно меньшее характерного времени диффузии.

33 2. Трехмерные несимметричные решения уравнения (1) будем искать в виде

$$h = (\tau - t) r^{-2} H(\theta, \varphi),$$

где r, θ, φ — сферические координаты. Заметим, что это решение, в отличие от рассматриваемых ранее, имеет особенность в начале координат и описывает распад дельта-функции. Подставляя указанное выражение в уравнение (1), получим

$$-H = -2 + \sin^{-2}\theta\Big[\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big]\ln H. \tag{14}$$

Решение уравнения (14) будем искать в виде

$$H = \sin^{-2}\theta F(x,y), \qquad x = \ln(\operatorname{tg}(\theta/2)), \qquad y = \varphi.$$

При этом уравнение (14) сводится к уравнению Лиувилля [6], записанному в декартовых координатах, что позволяет использовать формулу (12) в качестве одного из решений. Переходя к сферическим координатам, окончательно получим

$$h = \frac{\tau - t}{r^2}\,\frac{8N^2(1-\varepsilon^2)\sin^{2N-2}\theta}{[(1+\cos\theta)^N + (1-\cos\theta)^N + 2\varepsilon\sin^N\theta\sin(N\varphi)]^2}, \tag{15}$$

где N — любое целое число; ε — произвольная постоянная, максимальное значение которой равно единице. Решение (15) описывает тороидальноподобные структуры. При $N = 1$, $\varepsilon = 0$ оно совпадает с решением, найденным в [3], которое получено при исследовании эволюции сингулярного осесимметричного начального распределения.

Заключение. Заметим, что единственное стационарное регулярное решение уравнения (1), вероятно, существует только в трехмерном случае и может быть представлено следующим образом:

$$h = C\exp(-1/r), \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Представляет интерес установить критерий, по которому можно определять характер затухания. Согласно приведенным результатам локализованное возмущение может либо медленно расплываться, либо исчезать за некоторое характерное время, определяющееся амплитудой и размерами возмущения. Установлена возможность мгновенного рождения сингулярности в середине расплывающегося кольца.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00063).

21

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аристов М. Н., Мясников В. П.** Нестационарные трехмерные структуры в приповерхностном слое океана // Докл. РАН. 1996. Т. 349, № 4. С. 475–477.
2. **Воинов О. В.** Динамическая теория смачивания твердого тела вязкой жидкостью под действием сил Ван-дер-Ваальса // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 69–85.
3. **Пухначев В. В.** Многомерные точные решения уравнения нелинейной диффузии // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 2. С. 23–31.
4. **King J. R.** Exact multidimensional solutions to some nonlinear diffusion equation // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1993. V. 46, pt 3. P. 419–436.
5. **Галактионов В. А., Дородницын В. А., Еленин Г. Г. и др.** Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры // Соврем. пробл. математики. Новейшие достижения. 1987. Т. 28. С. 95–206.
6. **Liouville J.** Sur l'equation aux differences partielles $(\log\lambda)_{U,V} \pm \lambda/2a^2 = 0$ // J. Math. Pure Appl. 1953. N 18. P. 71, 72.

7. **Комаров Н. Н.** Топология стационарных плазменных конфигураций в поперечных самосогласованных полях. Ч.1. Пространственно-периодические структуры плазмы // Ядер. синтез. 1963. № 3. С. 174–182.
8. **Аристов С. Н.** Точное решение задачи о точечном источнике // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 1. С. 50–52.

Поступила в редакцию 22/V 1997 г.