УДК 539.3

# ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ БАЛКИ ЭЙЛЕРА — БЕРНУЛЛИ С ДВОЙНОЙ КОНУСНОСТЬЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

И. Курт, М. О. Кайа*

Технический университет Йылдыз, 34349 Стамбул, Турция
* Стамбульский технический университет, 34469 Стамбул, Турция
E-mails: ikurt@yildiz.edu.tr, kayam@itu.edu.tr

Исследуются поперечные колебания вращающейся нанобалки Эйлера — Бернулли, толщина и ширина которой изменяются по линейному закону. При моделировании используется нелокальная теория упругости Эрингена, содержащая характерный маломасштабный параметр. Учитывается центробежная осевая сила. Дифференциальные уравнения задачи о колебаниях консольной балки решаются методом дифференциального преобразования. Исследовано влияние коэффициентов конусности балки, скорости вращения, радиуса втулки, маломасштабного параметра среды на собственные частоты свободных колебаний балки. Проведено сравнение полученных результатов с известными результатами.

Ключевые слова: нелокальная теория упругости, конусообразная балка, балка Эйлера — Бернулли, метод дифференциального преобразования, свободные колебания.

DOI: 10.15372/PMTF20190522

**Введение.** В последнее время проводятся интенсивные исследования динамических характеристик наноэлектромеханических систем. Примерами таких наноструктур являются вращающаяся вокруг жесткой втулки нанобалка, нанотрубка (ротор), вращающаяся вокруг неподвижной нанотрубки (статора). Динамическое поведение и механические свойства маломасштабных структур (от атомных до макроскопических масштабов) отличаются от поведения и механических свойств макроконструкций. С использованием классической модели сплошной среды, в которой предполагается непрерывное распределение материала в теле, невозможно описать механическое поведение наноконструкций. Поэтому были разработаны неклассические модели сплошной среды, учитывающие микроструктуру материала. Широко используемыми нелокальными теориями являются моментная теория упругости и градиентная теория деформаций. Известная нелокальная теория Эрингена содержит характерный маломасштабный параметр [1]. Согласно этой теории, в отличие от классической теории упругости, напряжения в точке зависят не только от деформаций в ней, но и от деформаций в других точках тела.

В работах [2, 3] с использованием теории Эрингена изучены изгибные колебания однородной [2] и неоднородной [3] балок Эйлера — Бернулли. Задача решалась методом дифференциальных квадратур. В работе [4] с использованием псевдоспектрального метода коллокаций, в основе которого лежит аппроксимация полиномами Чебышева, решена задача об изгибных поперечных колебаниях конусообразной балки Эйлера — Бернулли. В [5] методом дифференциальных квадратур с использованием нелокальной теории Эрингена исследована динамика вращающейся однородной балки под действием осевой силы. Установлено, что собственные частоты первой моды колебаний, вычисленные с использованием нелокальной теории, больше собственных частот, вычисленных с помощью классической теории, а собственные частоты второй моды колебаний, вычисленные с использованием нелокальной теории, меньше собственных частот, вычисленных с помощью классической теории. В работе [6] методом дифференциального преобразования с использованием теории Эрингена исследованы свободные колебания системы балок Эйлера — Бернулли, связанных между собой упругими пружинами.

Другой известной теорией, учитывающей характерный размер среды, является моментная теория [7]. С использованием модифицированной моментной теории и обобщенного метода дифференциальных квадратурных элементов в работе [8] исследованы колебания непризматической консольной микробалки, изготовленной из функционально-градиентного материала, свойства которого изменяются в радиальном направлении. В [9] с помощью градиентной теории деформаций получены уравнения колебаний вращающихся балок Тимошенко и Эйлера — Бернулли и методом дифференциального преобразования определены собственные частоты поперечных и продольных колебаний. В [10] с использованием классической теории упругости и метода дифференциального преобразования изучены колебания вращающейся конусообразной балки Эйлера — Бернулли.

Насколько известно авторам данной работы, метод дифференциального преобразования не применялся при решении дифференциальных уравнений изгибных колебаний вращающейся нанобалки. В настоящей работе с использованием метода дифференциального преобразования изучаются поперечные (в плоскости размаха) колебания вращающейся двухконусной балки Эйлера — Бернулли. При выводе уравнений задачи используется нелокальная теория Эрингена. Исследована зависимость собственных частот колебаний балки от различных параметров задачи.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается нанобалка длиной $L$, закрепленная в точке $O$ на жесткой втулке радиусом $r$, имеющей молекулярный размер (рис. 1). Втулка вращается в плоскости $(x, y)$ с постоянной угловой скоростью $\Omega$. Ось $Ox$ совпадает с ней-

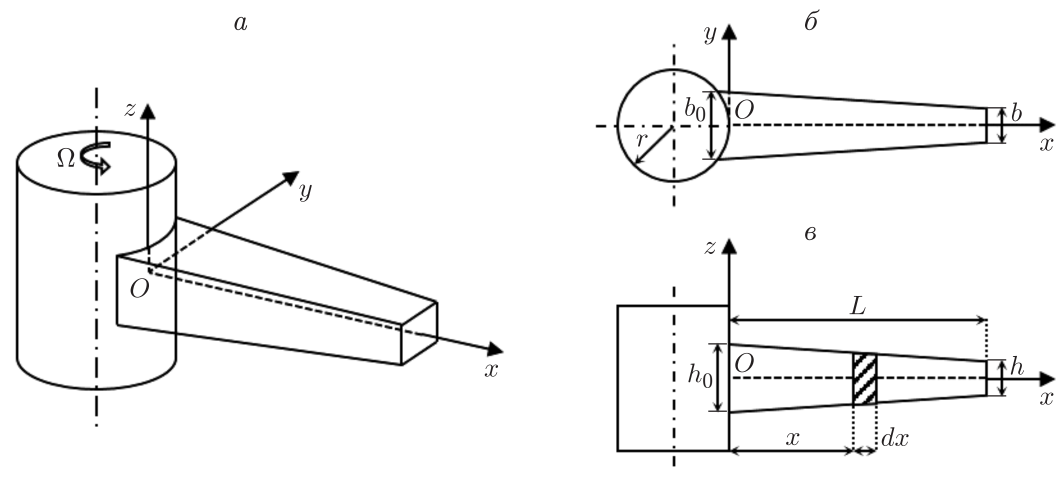


Рис. 1. Схема вращающейся консоли с двойной конусностью и жесткой молекулярной втулкой:
*а* — общий вид, *б* — вид сверху, *в* — вид сбоку

тральной осью балки, ось $Oz$ параллельна оси вращения и находится на расстоянии $r$ от нее. Поперечное сечение балки представляет собой прямоугольник с переменной толщиной $h(x)$ и переменной шириной $b(x)$ (в заделке $b(0) = b_0$, $h(0) = h_0$). Ширина $b(x)$ изменяется по линейному закону в плоскости $(x, y)$ (см. рис. 1,*б*), толщина $h(x)$ изменяется по линейному закону в плоскости $(x, z)$ (см. рис. 1,*в*).

Дифференциальное уравнение свободных изгибных колебаний вращающейся конической балки Бернулли — Эйлера, полученное с использованием уравнений нелокальной теории упругости Эрингена, содержащих характерный размер, имеет вид [2–4]

$$\rho A\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(EI_y\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(T\,\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + (ae_0)^2\Big[\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Big(T\,\frac{\partial w}{\partial x}\Big) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\rho A\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Big)\Big] = 0, \qquad (1)$$

где $w$ — поперечный прогиб; $T$ — центробежная растягивающая сила; $ae_0$ — нелокальный параметр, учитывающий маломасштабные эффекты; $E$ — модуль упругости; $I_y$ — момент инерции поперечного сечения балки; $EI_y$ — изгибная жесткость балки; $\rho$ — плотность материала балки; $A$ — площадь поперечного сечения балки; $\rho A$ — масса балки, отнесенная к единице ее длины.

Для нелокальных момента $M(x)$ и перерезывающей силы $S(x)$ имеем следующие выражения [4]:

$$M(x) = EI_y\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (ae_0)^2\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(T\frac{\partial w}{\partial x}\Big) - \rho A\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Big)\Big],$$

$$S(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(EI_y\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + T\,\frac{\partial w}{\partial x} - (ae_0)^2\Big[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(T\,\frac{\partial w}{\partial x}\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\rho A\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Big)\Big].$$

Прогиб консольной балки и угол наклона касательной к нейтральной линии в заделке равны нулю. На свободном торце балки изгибающий момент и перерезывающая сила также равны нулю. Таким образом, краевые условия записываются следующим образом:

$$x = 0:\quad w(x) = 0,\quad \frac{dw(x)}{dx} = 0, \qquad x = L:\quad M = 0,\quad S = 0. \qquad (2)$$

Осевая центробежная сила зависит от координаты $x$:

$$T(x) = \int\limits_x^L \rho A(x)\Omega^2(r + x)\,dx. \qquad (3)$$

Площадь поперечного сечения балки $A(x)$ и момент инерции $I_y(x)$ являются функциями координаты $x$:

$$A(x) = A_0\Big(1 - c_b\,\frac{x}{L}\Big)\Big(1 - c_h\,\frac{x}{L}\Big), \qquad I_y(x) = I_{y0}\Big(1 - c_b\,\frac{x}{L}\Big)\Big(1 - c_h\,\frac{x}{L}\Big)^3. \qquad (4)$$

Здесь $c_b = 1 - b/b_0$; $c_h = 1 - h/h_0$.

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$w(x,t) = \bar w(x)\,\mathrm{e}^{i\omega t}, \qquad (5)$$

где $\omega$ — круговая частота. Подставляя (5) в (1), получаем уравнение для функции $\bar w(x)$:

$$-\rho A\omega^2\bar w + \frac{d^2}{dx^2}\Big(EI_y\,\frac{d^2\bar w}{dx^2}\Big) - \frac{d}{dx}\Big(T\,\frac{d\bar w}{dx}\Big) + (ae_0)^2\Big[\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Big(T\,\frac{\partial\bar w}{\partial x}\Big) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(\rho A\omega^2\bar w)\Big] = 0.$$

Введем следующие безразмерные величины:

$$\xi = \frac{x}{L},\quad \tilde w = \frac{\bar w}{L},\quad \delta = \frac{r}{L},\quad h = \frac{ae_0}{L},\quad \gamma^2 = \frac{\rho A_0L^4\Omega^2}{EI_{y0}},\quad \lambda^2 = \frac{\rho A_0L^4\omega^2}{EI_{y0}}. \qquad (6)$$

Используя безразмерные величины (6) в соотношениях (3), (4), имеем

$$\bar{T}(\xi)=\tilde{T}(\xi)\rho A_0\Omega^2L^2,\qquad \bar{A}(\xi)=\tilde{A}(\xi)A_0,\qquad \bar{I}_y(\xi)=\tilde{I}_y(\xi)I_{y0},\tag{7}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{T}(\xi)=-c_bc_h\,\frac{\xi^4-1}{4}+(c_b+c_h+c_bc_h\delta)\,\frac{\xi^3-1}{3}+(c_b\delta+c_h\delta-1)\,\frac{\xi^2-1}{2}-\delta(\xi-1),\\ \tilde{A}(\xi)=(1-c_b\xi)(1-c_h\xi),\qquad \tilde{I}_y(\xi)=(1-c_b\xi)(1-c_h\xi)^3.\end{gathered}\tag{8}$$

Подставляя выражения (6), (7) в уравнение (1), получаем нелокальное уравнение в безразмерных переменных

$$\begin{gathered}\Big(h^2\lambda^2\,\frac{d^2\tilde{A}(\xi)}{d\xi^2}-\lambda^2\tilde{A}(\xi)\Big)\tilde{w}(\xi)+\Big(\gamma^2h^2\,\frac{d^3\tilde{T}(\xi)}{d\xi^3}-\gamma^2\,\frac{d\tilde{T}(\xi)}{d\xi}+2h^2\lambda^2\,\frac{d\tilde{A}(\xi)}{d\xi}\Big)\frac{d\tilde{w}(\xi)}{d\xi}+\\ +\Big(3\gamma^2h^2\,\frac{d^2\tilde{T}(\xi)}{d\xi^2}-\gamma^2\tilde{T}(\xi)+\frac{d^2\tilde{I}_y(\xi)}{d\xi^2}+h^2\lambda^2\tilde{A}(\xi)\Big)\frac{d^2\tilde{w}(\xi)}{d\xi^2}+\\ +\Big(3\gamma^2h^2\,\frac{d\tilde{T}(\xi)}{d\xi}+2\,\frac{d\tilde{I}_y(\xi)}{d\xi}\Big)\frac{d^3\tilde{w}(\xi)}{d\xi^3}+(\gamma^2h^2\tilde{T}(\xi)+\tilde{I}_y(\xi))\,\frac{d^4\tilde{w}(\xi)}{d\xi^4}=0.\end{gathered}\tag{9}$$

Краевые условия (2) в безразмерных переменных записываются в следующем виде:

$$\xi=0:\qquad \tilde{w}(\xi)=0,\qquad \frac{d\tilde{w}(\xi)}{d\xi}=0;\tag{10}$$

$$\begin{gathered}(c_b-1)(c_h-1)\Big(h^2\lambda^2\tilde{w}(1)-h^2\gamma^2(\delta+1)\Big(\frac{d\tilde{w}(\xi)}{d\xi}\Big)\Big|_{\xi=1}\Big)+\\ +(c_b-1)(c_h-1)^3\Big(\frac{d^2\tilde{w}(\xi)}{d\xi^2}\Big)\Big|_{\xi=1}=0,\\ -h^2\lambda^2\Big((c_b+c_h-2c_bc_h)\tilde{w}(1)+(c_b+c_h-c_bc_h-1)\,\frac{d\tilde{w}(\xi)}{d\xi}\Big|_{\xi=1}\Big)-\\ -(c_h-1)^2(c_b+3c_h-4c_bc_h)\Big(\frac{d^2\tilde{w}(\xi)}{d\xi^2}\Big)\Big|_{\xi=1}+(c_b-1)(c_h-1)^3\Big(\frac{d^3\tilde{w}(\xi)}{d\xi^3}\Big)\Big|_{\xi=1}+\\ +\gamma^2h^2(2c_b+2c_h-3c_bc_h+c_b\delta+c_h\delta-2c_bc_h\delta-1)\Big(\frac{d\tilde{w}(\xi)}{d\xi}\Big)\Big|_{\xi=1}-\\ -2\gamma^2h^2(c_b-1)(c_h-1)(\delta+1)\Big(\frac{d^2\tilde{w}(\xi)}{d\xi^2}\Big)\Big|_{\xi=1}=0.\end{gathered}\tag{11}$$

**2. Решение задачи методом дифференциального преобразования.** Метод дифференциального преобразования является эффективным методом численного решения как дифференциальных уравнений в частных производных, так и обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе [11] метод дифференциального преобразования использован при расчете нелинейных электрических цепей. В основе этого метода лежит представление функций в виде рядов Тейлора. Применение метода дифференциального преобразования позволяет свести решение краевой задачи для дифференциального уравнения к решению системы алгебраических уравнений.

Представим функцию $f(x)$ в виде степенного ряда в окрестности точки $x_0$. Дифференциальное преобразование функции $f(x)$ записывается в виде [12, 13]

$$F[k]=\frac{1}{k!}\Big(\frac{d^kf(x)}{dx^k}\Big)\Big|_{x=x_0},\tag{12}$$

где $f(x)$ — оригинал; $F[k]$ — трансформанта. Преобразование, обратное преобразованию (12), записывается следующим образом:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k F[k]. \qquad (13)$$

Из (12), (13) следует

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \Big( \frac{d^k f(x)}{dx^k} \Big) \Big|_{x=x_0}. \qquad (14)$$

При вычислениях функция $f(x)$ в уравнении (14) представляется в виде конечного ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \Big( \frac{d^k f(x)}{dx^k} \Big) \Big|_{x=x_0}. \qquad (15)$$

Из уравнения (15) следует, что остаток ряда

$$f(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \Big( \frac{d^k f(x)}{dx^k} \Big) \Big|_{x=x_0}$$

практически не оказывает влияния на результат. Число $n$ выбирается из условия сходимости решения. Дифференциальные преобразования большинства функций, входящих в уравнения движения и краевые условия, приведены в работе [12].

Подставляя уравнения (18) в (19) и применяя метод дифференциального преобразования, получаем уравнение

$$A_1[k]W[k-2] + A_2[k]W[k-1] + A_3[k]W[k] + A_4[k]W[k+1] + \\ + A_5[k]W[k+2] + A_6[k]W[k+3] + A_7[k]W[k+4] = 0, \qquad (16)$$

где $W[k]$ — трансформанта функции $\tilde{w}(\xi)$,

$$A_1[k] = -c_b c_h (\gamma^2(-k^2 + k + 2) + 4\lambda^2)/4,$$

$$A_2[k] = \lambda^2(c_b + c_h) - \gamma^2(k-1)(c_b + c_h - c_b c_h \delta)(1 + (k-2)/3),$$

$$A_3[k] = \gamma^2(k + k^2)/2 - \lambda^2 + c_b c_h^3 k(-k + 2k^2 + k^3 - 2) - \delta\gamma^2 k(k+1)(c_b + c_h)/2 + \\ + c_b c_h h^2 \lambda^2 (2 + 3k + k^2) - c_b c_h \gamma^2 h^2 k(3/2 + 11k/4 + 3k^2/2 + k^3/4),$$

$$A_4[k] = \delta\gamma^2(k+1)^2 + h^2(k+1)(2\gamma^2(c_b + c_h - c_b c_h \delta) - \lambda^2(c_b + c_h)(k+2)) - \\ - c_h^2 k(3c_b + c_h)(k+1)(6(k-1) + (k-1)(k-2) + 6) + \\ + \gamma^2 h^2 k(k+1)(c_b + c_h - c_b c_h \delta)(6 + (k-1)(k+1)/3),$$

$$A_5[k] = \gamma^2(k+1)(k+2)(4c_b + 4c_h - 3c_b c_h - 6 + 6c_b\delta + 6c_h\delta - 4c_b c_h \delta - 12\delta)/12 + \\ + \gamma^2 h^2 (k+1)(k+2)(c_b\delta + c_h\delta - 1)(k(k-1)/2 + 3(k+1)) + \\ + 3c_h(c_b + c_h)(k+1)(k+2)(k(k-1) + 2 + 4k) + h^2\lambda^2(k+1)(k+2),$$

$$A_6[k] = -(k^3 + 6k^2 + 11k + 6)[c_b(k+2) + 3c_h(k+2) + \delta\gamma^2 h^2(k+3)],$$

$$A_7[k] = (k^4 + 10k^3 + 35k^2 + 50k + 24) \times \\ \times [\gamma^2 h^2(6 - 4c_b - 4c_h + 3c_b c_h) + 2\delta\gamma^2 h^2(6 - 3c_b - 3c_h + 2c_b c_h) + 12]/12.$$

Применяя дифференциальное преобразование для уравнения (10), имеем краевое условие в корневом сечении балки

$$\xi = 0: \qquad W(0) = 0, \quad W(1) = 0. \qquad (17)$$

С учетом (13) в краевых условиях (11) трансформанты для функции $\tilde{w}$ и ее производных при $\xi = 1$ имеют следующий вид: $\sum\limits_{k=0}^{n} W[k]$ для $\tilde{w}(1)$, $\sum\limits_{k=1}^{n} kW[k]$ для $\left(\dfrac{d\tilde{w}(\xi)}{d\xi}\right)\Big|_{\xi=1}$, $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)W[k]$ для $\left(\dfrac{d^2\tilde{w}(\xi)}{d\xi^2}\right)\Big|_{\xi=1}$, $\sum\limits_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)W[k]$ для $\left(\dfrac{d^3\tilde{w}(\xi)}{d\xi^3}\right)\Big|_{\xi=1}$.

Используя соотношения (16), (17) и неизвестные коэффициенты

$$W(2) = c_1, \qquad W(3) = c_2,$$

величины $W[k]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ можно выразить через $c_1$, $c_2$, $\lambda$. Затем эти величины нужно подставить в краевые условия на свободном торце балки. В результате решение задачи сводится к решению алгебраической системы уравнений, которую можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} A_{11}^n(\lambda) & A_{12}^n(\lambda) \\ A_{21}^n(\lambda) & A_{22}^n(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Для того чтобы система (18) имела нетривиальное решение, определитель этой системы должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} A_{11}^n(\lambda) & A_{12}^n(\lambda) \\ A_{21}^n(\lambda) & A_{22}^n(\lambda) \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Из решения уравнения (19) определяются собственные частоты $\lambda^n$. Число $n$ определяется из условия сходимости

$$|\lambda^n - \lambda^{n-1}| \leqslant \varepsilon,$$

где $\varepsilon$ — заданная погрешность.

**3. Результаты исследования и их обсуждение.** Ниже приводятся результаты численного решения задачи об изгибных колебаниях вращающейся нанобалки при различных значениях маломасштабного параметра, скорости вращения, радиуса втулки, параметров конусности балки. Проведено сравнение вычисленных значений собственных частот колебаний балки с известными данными.

В табл. 1 приведены безразмерные значения первых трех собственных частот $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ при различных значениях скорости вращения $\gamma$, полученные с использованием однородной локальной теории для балки с постоянным поперечным сечением ($h = 0$, $c_h = 0$, $c_b = 0$), а также значения $\lambda_1$, $\lambda_2$, полученные в работе [8] методом дифференциальных квадратурных элементов. В табл. 2 приведены безразмерные значения собственных частот при различных значениях скорости вращения, полученные с использованием однородной локальной теории для балки, высота поперечного сечения которой изменяется по линейному закону ($h = 0$, $c_h = 0{,}5$, $c_b = 0$), а также результаты, полученные в работе [14] методом конечных элементов. В табл. 3 приведены значения собственных частот колебаний балки при $c_h = 0{,}5$, $c_b = 0$, $\gamma = 1$, $h = 0$, а также результаты, полученные в работе [15] методом дифференциальных преобразований. Значения собственных частот при $c_h = 0$, $c_b = 0$, $\gamma = 0$ и различных значениях $h \neq 0$ приведены в табл. 4. Там же представлены результаты, полученные в работе [6] методом дифференциальных преобразований при $h = 0{,}1$; $0{,}3$. Из результатов, приведенных в табл. 1–4 и работах [16, 17], следует, что собственные частоты колебаний балки можно вычислить с большой точностью, используя различные методы и уравнения как локальной, так и нелокальной теории изгиба балки.

На рис. 2, 3 приведены зависимости собственных частот балки с постоянным поперечным сечением от параметра $h$ при различных значениях параметров $\gamma$, $\delta$. Видно, что

Таблица 1

Безразмерные значения частоты при $c_h = 0$, $c_b = 0$, $\delta = 0$, $h = 0$ и различных значениях скорости вращения для балки с постоянным поперечным сечением

| $\gamma$ | $\lambda_1$ | | $\lambda_2$ | | $\lambda_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | Данные настоящей работы | Данные [8] | Данные настоящей работы | Данные [8] | |
| 0 | 3,5160 | 3,5160 | 22,0345 | 22,0345 | 61,6972 |
| 1 | 3,6816 | 3,6816 | 22,1810 | 22,1810 | 61,8418 |
| 2 | 4,1373 | 4,1373 | 22,6149 | 22,6149 | 62,2732 |
| 3 | 4,7973 | 4,7973 | 23,3203 | 23,3203 | 62,9850 |
| 4 | 5,5850 | 5,5850 | 24,2733 | 24,2733 | 63,9668 |
| 5 | 6,4495 | 6,4495 | 25,4461 | 25,4461 | 65,2050 |
| 6 | 7,3604 | 7,3604 | 26,8091 | 26,8091 | 66,6839 |
| 7 | 8,2996 | 8,2996 | 28,3341 | 28,3341 | 68,3860 |
| 8 | 9,2568 | 9,2568 | 29,9954 | 29,9954 | 70,2930 |
| 9 | 10,2257 | 10,2257 | 31,7705 | 31,7705 | 72,3867 |
| 10 | 11,2023 | 11,2023 | 33,6404 | 33,6404 | 74,6493 |

Таблица 2

Безразмерные значения частоты при $c_h = 0{,}5$, $c_b = 0$, $\delta = 0$, $h = 0$ и различных значениях скорости вращения для балки, высота поперечного сечения которой изменяется по линейному закону

| $\gamma$ | $\lambda_1$ | | $\lambda_2$ | | $\lambda_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Данные настоящей работы | Данные [14] | Данные настоящей работы | Данные [14] | Данные настоящей работы | Данные [14] |
| 0 | 3,823 78 | 3,8238 | 18,317 26 | 18,3173 | 47,264 83 | 47,2648 |
| 1 | 3,986 62 | 3,9866 | 18,474 01 | 18,4740 | 47,417 28 | 47,4173 |
| 2 | 4,436 80 | 4,4368 | 18,936 63 | 18,9366 | 47,871 62 | 47,8716 |
| 3 | 5,092 67 | 5,0927 | 19,683 90 | 19,6839 | 48,619 01 | 48,6190 |
| 4 | 5,878 76 | 5,8788 | 20,685 16 | 20,6852 | 49,645 64 | 49,6456 |
| 5 | 6,743 40 | 6,7434 | 21,905 33 | 21,9053 | 50,933 81 | 50,9338 |
| 6 | 7,655 14 | 7,6551 | 23,309 27 | 23,3093 | 52,463 26 | 52,4633 |
| 7 | 8,595 58 | 8,5956 | 24,864 72 | 24,8647 | 54,212 42 | 54,2124 |
| 8 | 9,553 96 | 9,5540 | 26,543 66 | 26,5437 | 56,159 49 | 56,1595 |
| 9 | 10,523 91 | 10,5239 | 28,322 69 | 28,3227 | 58,283 29 | 58,2833 |
| 10 | 11,501 55 | 11,5015 | 30,182 75 | 30,1827 | 60,563 88 | 60,5639 |

собственные частоты увеличиваются с увеличением угловой скорости вращения и радиуса втулки. Это обусловлено увеличением жесткости балки вследствие наличия центробежной продольной силы (см. (3)). Первая безразмерная собственная частота, вычисленная с использованием нелокальной теории, больше вычисленной с использованием локальной теории. Для второй и высших мод колебаний собственные частоты, вычисленные с использованием нелокальной теории, меньше вычисленных по локальной теории. Такая же закономерность отмечалась в работе [5]. Зависимость безразмерных частот колебаний от маломасштабного параметра является более сильной для высших мод колебаний.

Влияние скорости вращения и радиуса втулки на безразмерные собственные частоты увеличивается с увеличением маломасштабного параметра (см. рис. 2, 3). Для высших мод

Таблица 3

Безразмерные значения частоты при $c_h = 0{,}5$, $c_b = 0$, $\gamma = 1$, $h = 0$ и различных значениях радиуса втулки $\delta$

| $\delta$ | $\lambda_1$ | | $\lambda_2$ | | $\lambda_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Данные настоящей работы | Данные [15] | Данные настоящей работы | Данные [15] | Данные настоящей работы | Данные [15] |
| 0 | 3,986 62 | 3,986 62 | 18,474 01 | 18,4740 | 47,417 28 | 47,4173 |
| 0,5 | 4,090 41 | 4,090 41 | 18,576 24 | 18,5762 | 47,521 02 | 47,5210 |
| 1,0 | 4,191 56 | 4,191 56 | 18,677 90 | 18,6779 | 47,624 51 | 47,6245 |
| 1,5 | 4,290 26 | — | 18,779 00 | — | 47,727 75 | — |
| 2,0 | 4,386 68 | 4,386 68 | 18,879 55 | 18,8795 | 47,830 75 | 47,8308 |

Таблица 4

Безразмерные значения частоты $\lambda$ для первых пяти мод при $c_h = 0$, $c_b = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ и различных значениях маломасштабного параметра $h$

| Номер моды | $h = 0{,}1$ | | $h = 0{,}2$ | $h = 0{,}3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Данные настоящей работы | Данные [3, 6] | | Данные настоящей работы | Данные [6] |
| 1 | 3,531 28 | 3,5313 | 3,579 40 | 3,668 64 | 3,6686 |
| 2 | 20,679 60 | 20,6796 | 17,576 01 | 14,186 79 | 14,1868 |
| 3 | 51,063 82 | 51,0638 | 36,813 05 | 28,076 87 | 28,0769 |
| 4 | 85,689 71 | 85,6897 | 54,194 56 | 37,681 52 | 37,6815 |
| 5 | 121,361 50 | 121,3615 | 71,940 97 | 51,051 22 | 51,0512 |

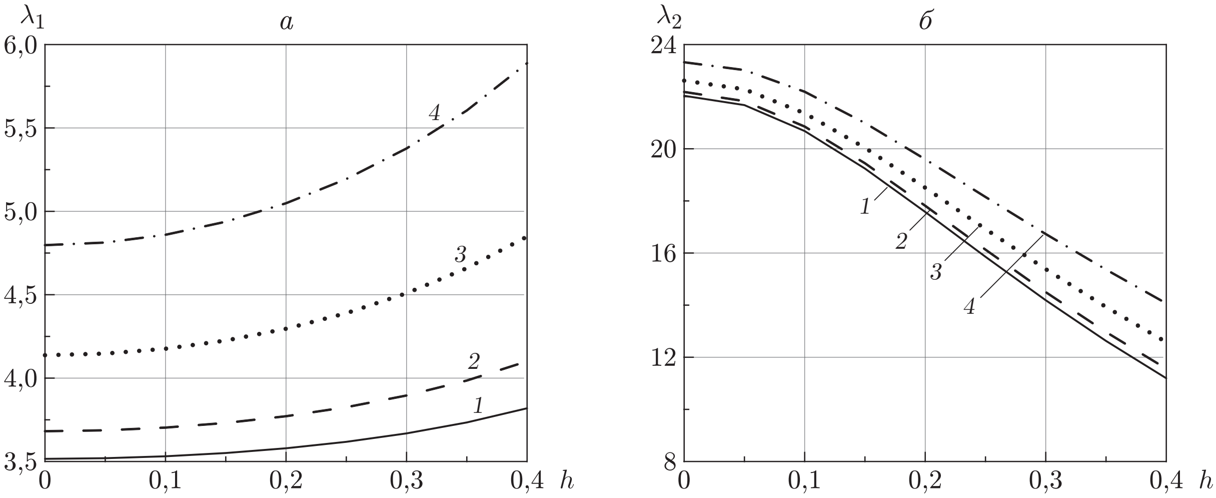


Рис. 2. Зависимость безразмерной частоты свободных колебаний от маломасштабного параметра при $c_h = 0$, $c_b = 0$, $\delta = 0$ и различных значениях $\gamma$: *а* — первая частота, *б* — вторая частота; *1* — $\gamma = 0$, *2* — $\gamma = 1$, *3* — $\gamma = 2$, *4* — $\gamma = 3$

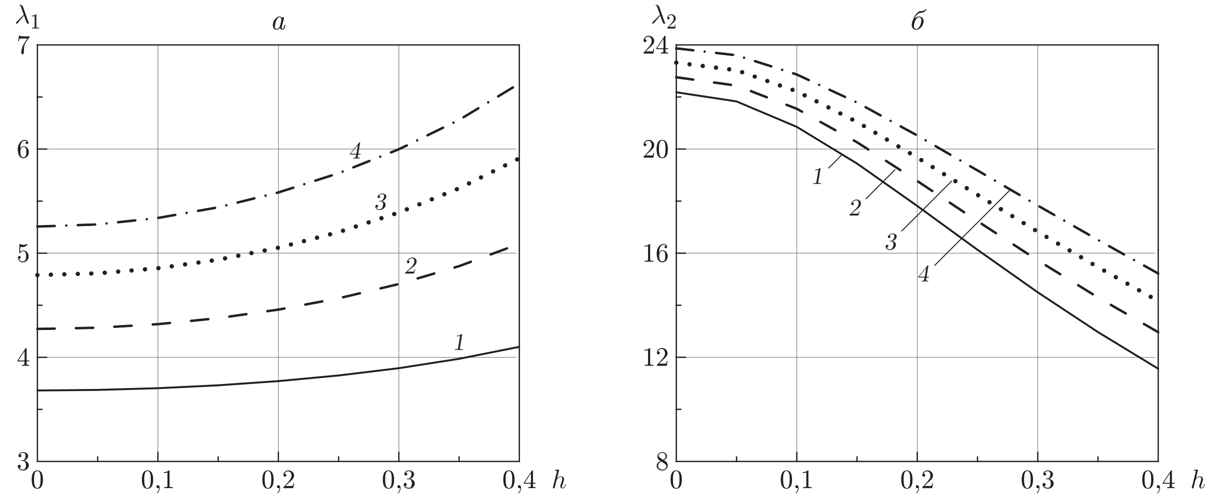


Рис. 3. Зависимость безразмерной частоты свободных колебаний от маломасштабного параметра при $c_h = 0$, $c_b = 0$, $\gamma = 1$ и различных значениях $\delta$:
*а* — первая частота, *б* — вторая частота; *1* — $\delta = 0$, *2* — $\delta = 3$, *3* — $\delta = 6$, *4* — $\delta = 9$

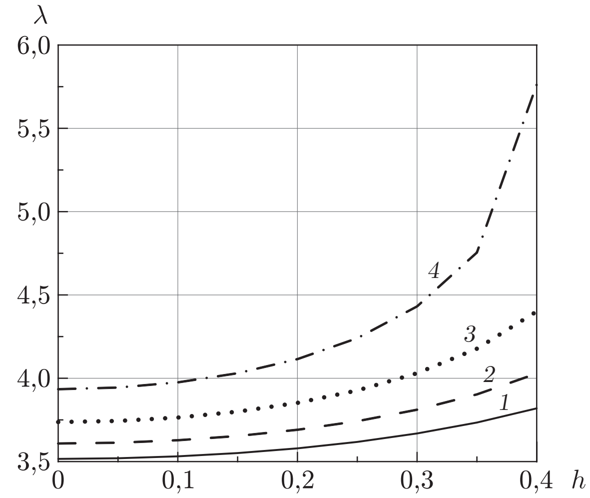


Рис. 4. Зависимость безразмерной частоты свободных колебаний от маломасштабного параметра при $c_b = 0$, $\gamma = 0$ и различных значениях $c_h$:
*1* — $c_h = 0$, *2* — $c_h = 0{,}2$, *3* — $c_h = 0{,}4$, *4* — $c_h = 0{,}6$

колебаний влияние маломасштабного параметра становится более существенным. Безразмерные частоты уменьшаются при уменьшении как скорости вращения, так и радиуса втулки (см. рис. 2, 3).

На рис. 4–6 представлены зависимости безразмерных собственных частот невращающейся нанобалки от маломасштабного параметра при различных значениях геометрических параметров балки. С увеличением маломасштабного параметра первая собственная частота увеличивается, в то время как вторая — уменьшается. При больших значениях маломасштабного параметра зависимость от него собственных частот более сильная. С увеличением маломасштабного параметра влияние параметра $c_b$ на собственные значения постепенно уменьшается.

С увеличением параметра $c_h$ безразмерная собственная частота первой моды колебаний увеличивается, второй моды — уменьшается. С увеличением параметра $c_b$ увеличи-

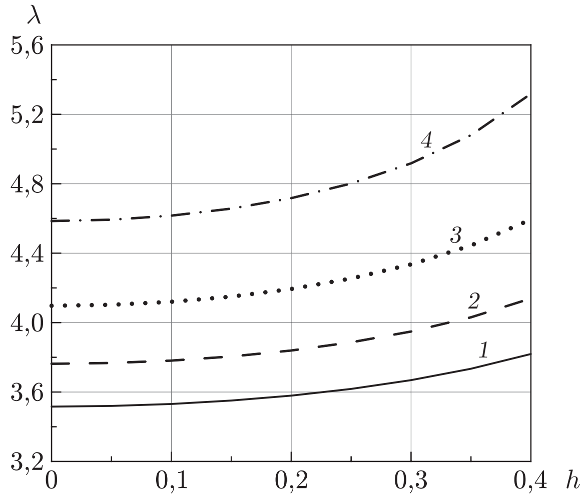


Рис. 5

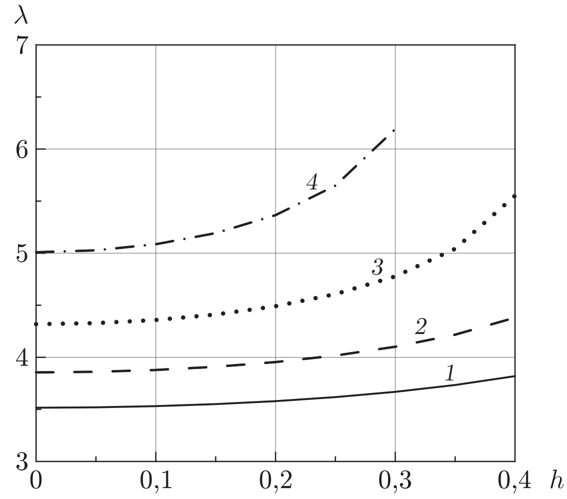


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость безразмерной частоты свободных колебаний от маломасштабного параметра при $c_h = 0$, $\gamma = 0$ и различных значениях $c_b$:
*1* — $c_b = 0$, *2* — $c_b = 0{,}2$, *3* — $c_b = 0{,}4$, *4* — $c_b = 0{,}6$

Рис. 6. Зависимость безразмерной частоты свободных колебаний от маломасштабного параметра при $\gamma = 0$ и различных значениях $c_h$, $c_b$:
*1* — $c_h = c_b = 0$, *2* — $c_h = c_b = 0{,}2$, *3* — $c_h = c_b = 0{,}4$, *4* — $c_h = c_b = 0{,}6$

ваются собственные частоты как первой моды колебаний, так и второй (см. рис. 5). Эти результаты аналогичны результатам, полученным в работе [15] с использованием локальной теории упругости ($h = 0$). Параметр $c_h$ оказывает более существенное влияние на собственные частоты, чем параметр $c_b$ (см. рис. 4, 5). На рис. 6 приведены зависимости первой собственной частоты от параметра $h$ при различных значениях параметров $c_h$, $c_b$.

**Заключение.** В работе с использованием нелокальной теории Эрингена определены частоты собственных колебаний вращающейся конусообразной балки Эйлера — Бернулли. Краевая задача о колебаниях балки решена методом дифференциального преобразования.

Результаты исследования позволяют сделать следующие выводы.

При увеличении скорости вращения и радиуса втулки безразмерные частоты свободных колебаний балки возрастают для всех мод колебаний.

С увеличением маломасштабного параметра основная безразмерная частота увеличивается, безразмерные частоты высших мод колебаний уменьшаются.

При увеличении радиуса втулки безразмерная собственная частота увеличивается как для первой моды колебаний, так и для второй.

С увеличением параметра конусности по высоте балки безразмерная собственная частота первой моды колебаний увеличивается, второй моды — уменьшается. Такая же закономерность имеет место для балки с двойной конусностью.

При любых параметрах конусности балки с увеличением маломасштабного параметра для первой моды колебаний безразмерная частота увеличивается, для второй — уменьшается.

Влияние маломасштабного параметра на собственные частоты мод колебаний увеличивается с увеличением параметра конусности по высоте балки.

Представленные в работе результаты исследования позволяют получить дополнительную информацию о динамических характеристиках наноэлектромеханических систем.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Eringen A. C.** On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves // J. Appl. Phys. 1983. V. 54. P. 4703–4710.
2. **Pradhan S. C., Murmu T.** Application of nonlocal elasticity and DQM in the flapwise bending vibration of a rotating nanocantilever // Phys. E. Low-Dimensional Systems Nanostructures. 2010. V. 42. P. 1944–1949.
3. **Murmu T., Pradhan S. C.** Small-scale effect on the vibration of nonuniform nanocantilever based on nonlocal elasticity theory // Phys. E. Low-Dimensional Systems Nanostructures. 2009. V. 41. P. 1451–1456.
4. **Aranda-Ruiz J., Loya J., Fernández-Sáez J.** Bending vibrations of rotating nonuniform nanocantilevers using the Eringen nonlocal elasticity theory // Composite Structures. 2012. V. 94. P. 2990–3001.
5. **Pourasghar A., Homauni M., Kamarian S.** Differential quadrature based nonlocal flapwise bending vibration analysis of rotating nanobeam using the eringen nonlocal elasticity theory under axial load // Polymer Composites. 2016. V. 37. P. 3175–3180.
6. **Ghafarian M., Ariaei A.** Free vibration analysis of a multiple rotating nano-beams system based on the Eringen nonlocal elasticity theory // J. Appl. Phys. 2016. V. 120. 054301.
7. **Hadjesfandiari A. R., Dargush G. F.** Couple stress theory for solids // Intern. J. Solids Structures. 2011. V. 48. P. 2496–2510.
8. **Shafiei N., Kazemi M., Ghadiri M.** On size-dependent vibration of rotary axially functionally graded microbeam // Intern. J. Engng Sci. 2016. V. 101. P. 29–44.
9. **Arvin H.** Free vibration analysis of micro rotating beams based on the strain gradient theory using the differential transform method: Timoshenko versus Euler — Bernoulli beam models // Eur. J. Mech. A. Solids. 2017. V. 65. P. 336–348.
10. **Ozdemir O., Kaya M. O.** Flapwise bending vibration analysis of a rotating tapered cantilever Bernoulli — Euler beam by differential transform method // J. Sound Vibrat. 2006. V. 289. P. 413–420.
11. **Zhou J. K.** Differential transform and its applications for electrical circuits. Wuhan: Huazhong Univ. Press, 1986.
12. **Kaya M. O.** Free vibration analysis of a rotating Timoshenko beam by differential transform method // Aircraft Engng Aerospace Technol. 2006. V. 78. P. 194–203.
13. **Chen C. K., Ho S. H.** Application of differential transformation to eigenvalue problems // Appl. Math. Comput. 1996. V. 79. P. 173–188.
14. **Wang G., Wereley N. M.** Free vibration analysis of rotating blades with uniform tapers // AIAA J. 2004. V. 42. P. 2429–2437.
15. **Ozgumus O. O., Kaya M. O.** Flapwise bending vibration analysis of double tapered rotating Euler — Bernoulli beam by using the differential transform method // Meccanica. 2006. V. 41. P. 661–670.
16. **Lingand F. P., Salleh Z.** A differential transformation method for approximating the chaotic Chen system // Intern. J. Math. Analysis. 2016. V. 10. P. 833–848.
17. **Tari A., Shahmorad S.** Differential transform method for the system of two-dimensional nonlinear Volterra integro-differential equations // Comput. Math. Appl. 2011. V. 61. P. 2621–2629.


*Поступила в редакцию 6/XII 2018 г.,*
*после доработки — 26/II 2019 г.*
*Принята к публикации 25/III 2019 г.*