

О НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СФЕРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ, ВОЗНИКШЕЙ В РЕЗУЛЬТАТЕ ВЗРЫВА ЗАГЛУБЛЕННОГО ЗАРЯДА СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ВОДЫ

Б. И. Заславский

(Новосибирск)

Определяется класс точных частных решений уравнений «коротких волн» [1, 2] более общих, чем найденный в работах [3, 4]. Рассматривается задача о взаимодействии со свободной поверхностью ударной волны, возникшей в результате взрыва заглубленного заряда.

Течение строится с момента времени, когда волны разрежения, распространяющиеся от области, через которую прошел ударный фронт, начинают с ним взаимодействовать.

§ 1. Уравнения «коротких волн» (см. [1, 2]) в сферической системе координат r, θ при симметрии относительно оси $\theta = 1/2\pi$ имеют вид

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + (\mu - \delta) \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} + k\mu = 0 \quad (k=1), \quad \frac{\partial v}{\partial \delta} - \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

Для плоскопараллельных течений в цилиндрической системе координат уравнения имеют тот же вид, но $k = 1/2$. Безразмерные функции и координаты μ, v, y, δ определяются равенствами

$$U = a_0 M_0 \mu, \quad V = a_0 V_0 \sqrt{1/2(n+1)} v, \quad r = a_0 t [1 + 1/2(n+1) M_0 \delta] \\ \tau = \ln t, \quad \theta = y \sqrt{1/2(n+1) M_0}, \quad V_0 = M_0 \sqrt{M_0}$$

Здесь a_0 — начальная скорость звука; U, V — проекции вектора скорости на направление радиуса-вектора и направление, перпендикулярное к нему; $M_0 V_0$ — постоянные, значительно меньшие единицы.

§ 2. Уравнения (1.1) имеют класс точных частных решений

$$\mu = \varphi_2(q, \tau) y^2 + \varphi_1(q, \tau) y + \varphi_0(q, \tau) \\ v = \psi_3(q, \tau) y^3 + \psi_2(q, \tau) y^2 + \psi_1(q, \tau) y + \psi_0(q, \tau) \quad (2.1) \\ \delta = qy^2 + \chi(q, \tau) y + \chi_0(q, \tau)$$

Подставляя (2.1) в (1.1), получаем систему уравнений для определения функций $\varphi_2, \varphi_1, \varphi_0, \psi_3, \psi_2, \psi_1, \psi_0, \chi_1, \chi_0$, где индексами внизу обозначено дифференцирование по соответствующим аргументам

$$\varphi_{2\tau} + (\varphi_2 - q) \varphi_{2q} + 3/2 \psi_3 + k\varphi_2 - \psi_{3q} q = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\varphi_{2\tau} \chi_{1q} + \varphi_{1\tau} - \varphi_{2q} \chi_{1\tau} + (\varphi_2 - q) \varphi_{1q} + \varphi_{2q} (\varphi_1 - \chi_1) + 3/2 \psi_3 \chi_{1q} + \psi_2 + \\ + k\varphi_2 \chi_{1q} + k\varphi_1 - 1/2 \psi_{3q} \chi_1 - \psi_{2q} q = 0 \quad (2.2.2)$$

$$\psi_{2\tau} \chi_{0q} + \varphi_{0\tau} + \varphi_{1\tau} \chi_{1q} - \varphi_{2q} \chi_{0\tau} - \varphi_{1q} \chi_{1\tau} + (\varphi_2 - q) \varphi_{0q} + \varphi_{2q} (\varphi_0 - \chi_0) + \\ + \varphi_{1q} (\varphi_1 - \chi_1) + 3/2 \psi_3 \chi_{0q} + 1/2 \psi_1 + \psi_2 \chi_{1q} + k\varphi_2 \chi_{0q} + k\varphi_0 + \\ + k\varphi_1 \chi_{1q} - 1/2 \psi_{2q} \chi_1 - \psi_{1q} q = 0 \quad (2.2.3)$$

$$\varphi_{1\tau} \chi_{0q} + \varphi_{0\tau} \chi_{1q} - \varphi_{1q} \chi_{0\tau} - \varphi_{0q} \chi_{1\tau} + (\varphi_1 - \chi_1) \varphi_{0q} + (\varphi_0 - \chi_0) \varphi_{1q} + \\ + \psi_2 \chi_{0q} + 1/2 \psi_1 \chi_{1q} + k\varphi_1 \chi_{0q} + k\varphi_0 \chi_{1q} - 1/2 \psi_{1q} \chi_1 - q\psi_{0q} = 0 \quad (2.2.4)$$

$$\varphi_{0\tau}\chi_{0q} - \varphi_{0q}\chi_{0\tau} + \varphi_{0q}(\varphi_0 - \chi_0) + \frac{1}{2}\psi_1\chi_{0q} + k\varphi_0\chi_{0q} - \frac{1}{2}\psi_{0q}\chi_1 = 0 \quad (2.2.5)$$

$$\psi_{3q} + 2q\varphi_{2q} - 2\varphi_2 = 0 \quad (2.2.6)$$

$$2\varphi_2\chi_{1q} + \varphi_1 - 2q\varphi_{1q} - \chi_1\varphi_{2q} - \psi_{2q} = 0 \quad (2.2.7)$$

$$\varphi_1\chi_{1q} + 2\chi_{0q}\varphi_2 - 2q\varphi_{0q} - \chi_1\varphi_{1q} - \psi_{1q} = 0 \quad (2.2.8)$$

$$\varphi_1\chi_{0q} - \chi_1\varphi_{0q} - \psi_{0q} = 0 \quad (2.2.9)$$

Из уравнений (2.2.2), (2.2.7), (2.2.5), (2.2.8) выразим соответственно ψ_2 , $\psi_{2q}\psi_1$ и ψ_{1q} и подставим в уравнение (2.2.3) получим

$$\begin{aligned} & \chi_{0q} [\varphi_{2\tau} + \frac{3}{2}\psi_3 - 2\varphi_{2q} + k\varphi_2] + \varphi_{0q} (\varphi_2 - q + 2q^2) + \\ & + \chi_{0q}^{-1} (\varphi_{0q} - \varphi_{2q}\chi_{0q}) (\chi_{0\tau} - \varphi_0 + \chi_0 - \frac{1}{2}\chi_1^2) - \\ & - (\varphi_{1q} - \varphi_{2q}\chi_{1q}) (\chi_{1\tau} - \varphi_1 + \chi_1 - 2\chi_1q) - \\ & - \varphi_{1q}\chi_{1q} (\varphi_2 - q + 2q^2) - \chi_{1q}^2 (\varphi_{2\tau} + \frac{3}{2}\psi_3 + k\varphi_2 - 2\varphi_{2q}) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из уравнений (2.2.1) и (2.2.6) имеем

$$\varphi_{2\tau} + \frac{3}{2}\psi_3 + k\varphi_2 - 2\varphi_{2q} + \varphi_{2q} (\varphi_2 - q + 2q^2) = 0 \quad (2.4)$$

Используя это соотношение, представим (2.3) в виде

$$\begin{aligned} & \chi_{0q}^{-1} (\varphi_{0q} - \chi_{0q}\varphi_{2q}) [\chi_{0q} (\varphi_2 - q + 2q^2) + \chi_{0\tau} + \chi_0 - \varphi_0 - \frac{1}{2}\chi_1^2] - \\ & - (\varphi_{1q} + \varphi_{2q}\chi_{1q}) [\chi_{1\tau} - \varphi_1 + \chi_1 - 2\chi_1q + \chi_{1q} (\varphi_2 - q + 2q^2)] = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Аналогично (2.2.4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & (\varphi_{0q} - \chi_{0q}\varphi_{2q}) [\chi_{1\tau} + \chi_{1q} (\varphi_2 - q + 2q^2) - \varphi_1 + \chi_1 - 2q\chi_1] - \\ & - \chi_{0q}^{-1} (\varphi_{1q} - \chi_{1q}\varphi_{2q}) [\chi_{0\tau} + \chi_{0q} (\varphi_2 - q + 2q^2) - \varphi_0 + \chi_0 - \frac{1}{2}\chi_1^2] = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отсюда две возможности

$$\varphi_{1q} - \chi_{1q}\varphi_{2q} = 0, \quad \varphi_{0q} - \chi_{0q}\varphi_{2q} = 0 \quad (2.7)$$

или

$$\begin{aligned} & \chi_{1\tau} + \chi_{1q} (\varphi_2 - q + 2q^2) - \varphi_1 + \chi_1 - 2q\chi_1 = 0 \\ & \chi_{0\tau} + \chi_{0q} (\varphi_2 - q + 2q^2) - \varphi_0 + \chi_0 - \frac{1}{2}\chi_1^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из дальнейшего будет видно, что (2.7) будет частным случаем (2.8).

Выразим $\varphi_1 - \chi_1$ и $\varphi_0 - \chi_0$ из уравнений (2.8) и подставим полученные значения в уравнения (2.2.2) и (2.2.5). Величину ψ_3 выразим из (2.4); вся система (2.2) приводится к виду

$$\begin{aligned} & \chi_{1q} (\varphi_2 - q + 2q^2) - \varphi_1 + \chi_1 - 2q\chi_1 + \chi_{1\tau} = 0 \\ & \psi_2 = -\varphi_{1\tau} - \varphi_{1q} (\varphi_2 - q + 2q^2) + \chi_1\varphi_2 + \varphi_{1q} - k\varphi_1 \\ & \psi_{2q} = 2\varphi_2\chi_{1q} + \varphi_1 - 2q\varphi_{1q} - \chi_1\varphi_{2q} \\ & \chi_{0\tau} + \chi_{0q} (\varphi_2 - q + 2q^2) - \varphi_0 + \chi_0 - \frac{1}{2}\chi_1^2 = 0 \\ & \frac{1}{2}\psi_1 = -\varphi_{0\tau} - \varphi_{0q} (\varphi_2 - q + 2q^2) - k\varphi_0 + \frac{1}{2}\varphi_1\chi_1 \\ & \psi_{1q} = \varphi_1\chi_{1q} + 2\chi_{0q}\varphi_2 - 2q\varphi_{0q} - \chi_1\varphi_{1q} \\ & \psi_3 = -\frac{2}{3} [\varphi_{2\tau} - \varphi_{2q} (\varphi_2 - q + 2q^2) + k\varphi_2 - 2\varphi_{2q}] \\ & \psi_{3q} + 2q\varphi_{2q} - 2\varphi_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

§ 3. Из последних двух уравнений системы (2.9) получаем уравнение для определения функций φ_2

$$\varphi_{2q\tau} + \varphi_{2qq} (\varphi_2 - q + 2q^2) + \varphi_{2q^2} + \varphi_{2q} (k - 1 - q) + \varphi_2 = 0 \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) подстановкой

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}(2 - k)q + \frac{1}{54}(1 + k)^2 + \frac{3}{2}Z, \quad \xi = q - \frac{2}{9} \quad (3.2)$$

приводится к уравнению

$$\frac{2}{3}Z_{\tau\xi} + Z_{\xi\xi} (Z + \xi^2) + Z_{\xi} (Z_{\xi} - 2\xi) = \alpha \quad (3.3)$$

где

$$\alpha = -\frac{4}{81} \quad \text{при } k=1, \quad \alpha = 0 \quad \text{при } k=\frac{1}{2}$$

Пусть $\alpha = -\frac{4}{81}$. Рассмотрим уравнение

$$Z_{\xi\xi} (Z + \xi^2) + Z_{\xi} (Z_{\xi} - 2\xi) = 0 \quad (3.4)$$

Это уравнение имеет решения

$$Z = C, \quad Z = A \sqrt{\xi + B} - \frac{4}{3}B\xi - \frac{8}{3}B^2 + \frac{1}{3}\xi^2 \quad (A, B, C = \text{const}) \quad (3.5)$$

Решение уравнения (3.3) строится методом ¹ малого параметра [4].

§ 4. Рассмотрим первые два уравнения системы (2.9); продифференцируем их по q и ψ_{2q} выразим из третьего уравнения. Получим систему

$$\begin{aligned} & -\varphi_{1q\tau} - \varphi_{1qq} (\varphi_2 - q + 2q^2) - \varphi_{1q}\varphi_{2q} + \varphi_{1q} - 4q\varphi_{1q} + \\ & + \chi_{1q}\varphi_2 + \chi_1\varphi_{2q} + \varphi_{1q}q + \varphi_1 - k\varphi_{1q} = 2\varphi_2\chi_{1q} + \varphi_1 - 2q\varphi_{1q} - \chi_1\varphi_{2q} \quad (4.1) \\ & \chi_{1q\tau} + \chi_{1qq}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \chi_{1q}(\varphi_{2q} - 1 + 4q) - \\ & - \varphi_{1q} + \chi_{1q} - 2q\chi_{1q} - 2\chi_1 = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \varphi_{1q\tau} + \varphi_{1qq} (\varphi_2 - q + 2q^2) + \varphi_{1q} (\varphi_{2q} - 1 + k - q) + \\ & + \varphi_2 \chi_q - 2\chi_1\varphi_{2q} + 2\varphi_{1q}q = 0 \quad (4.2) \\ & \chi_{1q\tau} + \chi_{1qq} (\varphi_2 - q + 2q^2) + \chi_{1q}\varphi_{2q} + 2q\chi_{1q} - 2\chi_1 - \varphi_{1q} = 0 \end{aligned}$$

Положим

$$\varphi_{1q} = \varphi_{2q}\eta + \xi, \quad \chi_{1q} = \eta \quad (4.3)$$

Система (4.2) примет вид

$$\begin{aligned} & \eta [\varphi_{2q\tau} + \varphi_{2qq} (\varphi_2 - q + 2q^2) + \varphi_{2q^2} + \varphi_{2q} (k - 1 - q) + \varphi_2] + \\ & + \varphi_{2q} [\eta_{\tau} + \eta_q (\varphi_2 - q + 2q^2) - 2\chi_1 + 2\eta q] + \xi_{\tau} + \\ & + \xi_q (\varphi_2 - q + 2q^2) + \xi (\varphi_2 - 1 + k + q) = 0 \\ & \eta_{\tau} + \eta_q (\varphi_2 - q + 2q^2) + 2\eta q + \eta\varphi_{2q} - 2\chi_1 - \eta\varphi_{2q} - \xi = 0 \quad (4.4) \end{aligned}$$

¹ В работе [4] в формуле (2.4), в следующей за ней формуле, а также в (3.3) допущены опечатки: их правильная запись — формулы (3.1), (3.2), (3.5) настоящей работы. Отметим другие существенные опечатки, допущенные в работе [4]. Выражение для v^0 из (2.1) нужно читать

$$v^0 = \psi_3(q, \tau)y^{03} + \psi_1(q, \tau)y^0 + v_0(\tau)$$

Подынтегральные выражения для интегралов, стоящих в квадратных скобках (§ 3), следует разделить на $\varphi_2 - q + 2q^2$, то же относится к аналогичным формулам (5.8): в этом случае эти выражения следует разделить на $\varphi_2 + 2q^2$; наконец, в § 5

$$U_x = -\frac{1}{2} \frac{a_*}{\kappa+1} \mu + a_*$$

Используя уравнение (3.1), получаем

$$\begin{aligned}\xi_\tau + \xi_q (\varphi_2 - q + 2q^2) + \xi (2\varphi_{2q} - 1 + k + q) &= 0 \\ \eta_\tau + \eta_q (\varphi_2 - q + 2q^2) + 2\eta q - 2 \int \eta dq - \xi &= 0\end{aligned}\quad (4.5)$$

Положим $W = \eta_q$. Продифференцируем второе уравнение, получим два уравнения в частных производных первого порядка (в первое уравнение функция W не входит)

$$\begin{aligned}\xi_\tau + \xi_q (\varphi_2 - q + 2q^2) + \xi (2\varphi_{2q} - 1 + k + q) &= 0 \\ W_\tau + W_q (\varphi_2 - q + 2q^2) + W (\varphi_{2q} + 6q - 1) - \xi_q &= 0\end{aligned}\quad (4.6)$$

Аналогично для следующих трех уравнений системы (2.9)

$$\begin{aligned}\varphi_{0q\tau} + \varphi_{0q} (\varphi_2 - q + 2q^2) + \varphi_{0q} (\varphi_{2q} - 1 + 3q + k) + \varphi_{1q} \chi_1 - \chi_{0q} \varphi_2 &= 0 \\ \chi_{0q\tau} + \chi_{0q} (\varphi_2 - q + 2q^2) + \chi_{0q} \varphi_{2q} + 4q \chi_{0q} - \varphi_{0q} - \chi_1 \chi_{1q} &= 0\end{aligned}\quad (4.7)$$

Полагая

$$\varphi_{0q} = \varphi_{2q} V + U, \quad \chi_{0q} = V \quad (4.8)$$

Получаем

$$\begin{aligned}U_\tau + U_q (\varphi_2 - q + 2q^2) + U (2\varphi_{2q} - 1 + 3q + k) + \xi \chi_1 &= 0 \\ V_\tau + V_q (\varphi_2 - q + 2q^2) + 4qV - U - \chi_1 \eta &= 0\end{aligned}\quad (4.9)$$

Таким образом, в общем случае определение решений вида (2.1) сводится к интегрированию уравнения (3.1) и четырех линейных уравнений в частных производных первого порядка. Если φ_2 не зависит от времени, то общее решение уравнений (4.5), (4.9) может быть выписано в виде интегралов, причем в подынтегральные выражения будут входить произвольные функции от аргумента

$$P = \tau - \int \frac{dq}{\varphi_2 - q + 2q^2}$$

§ 5. Иногда полезно произвести следующие преобразования уравнений коротких волн [2]:

$$\mu = \mu^\circ e^{-b\tau}, \quad \nu = \nu^\circ e^{-3/2 b\tau}, \quad \delta = \delta^\circ e^{-b\tau}, \quad y = y^\circ e^{-1/2 b\tau} \quad (5.1)$$

В переменных $\tau, \delta^\circ, y^\circ$ уравнения примут вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mu^\circ}{\partial \tau} + [\mu^\circ - (1 - b) \delta^\circ] \frac{\partial \mu^\circ}{\partial \delta^\circ} + \frac{1}{2} b y^\circ \frac{\partial \mu^\circ}{\partial y^\circ} + \frac{1}{2} \frac{\partial \nu^\circ}{\partial y^\circ} + (k - b) \mu^\circ &= 0 \\ \frac{\partial \mu^\circ}{\partial y^\circ} - \frac{\partial \nu^\circ}{\partial \delta^\circ} &= 0\end{aligned}\quad (5.2)$$

Уравнения (5.2) также имеют систему точных решений вида

$$\begin{aligned}\mu^\circ &= \varphi_2^\circ y^{\circ 2} + \varphi_1^\circ y^\circ + \varphi_0^\circ \\ \nu^\circ &= \psi_3^\circ y^{\circ 3} + \psi_2^\circ y^{\circ 2} + \psi_1^\circ y^\circ + \psi_0^\circ \\ \delta^\circ &= q y^{\circ 2} + \chi_1^\circ y^\circ + \chi_0^\circ\end{aligned}\quad (5.3)$$

причем входящие в эти выражения функции связаны с функциями, входящими в (2.1), равенствами

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \varphi_2^\circ, & \varphi_1 &= \varphi_1^\circ e^{-1/2 b\tau}, & \varphi_0 &= \varphi_0^\circ e^{-b\tau} \\ \psi_3 &= \psi_3^\circ, & \psi_2 &= \psi_2^\circ e^{-1/2 b\tau}, & \psi_1 &= \psi_1^\circ e^{-b\tau}, & \psi_0 &= \psi_0^\circ e^{-3/2 b\tau}\end{aligned}\quad (5.4)$$

которые следуют из преобразований (5.1). Положим

$$\varphi_{0q}^\circ = \varphi_{2q}^\circ V^\circ + U^\circ, \quad \chi_{0q}^\circ = V^\circ, \quad \varphi_{1q}^\circ = \varphi_{2q}^\circ \eta^\circ + \xi^\circ, \quad \chi_{1q}^\circ = \eta^\circ$$

Уравнения для определения V° , U° , η° , ξ° можно получить из уравнений (4.5) и (4.9), если положить

$$V = V^\circ e^{-b\tau}, \quad U = U^\circ e^{-b\tau}, \quad \eta = \eta^\circ e^{-1/2 b\tau}, \quad \xi = \xi^\circ e^{-1/2 b\tau}$$

Решения, аналогичные рассмотренным выше, можно построить для уравнений нестационарных околосвуковых течений.

§ 6. Пусть заряд взорван на глубине h ; поместим центр сферической системы координат в центр заряда, угол θ будем отсчитывать от плоскости, параллельной свободной поверхности.

Течение, примыкающее к фронту взрывной волны, будем определять уравнениями (1.1). Пусть $\delta_0(\tau) e^{-\tau}$ соответствует координате точки A пересечения фронта ударной волны со свободной поверхностью (фиг. 1), $\mu_0(\tau) e^{-\tau}$ — значение μ на фронте в этой точке.

Произведем следующую замену переменных [5]:

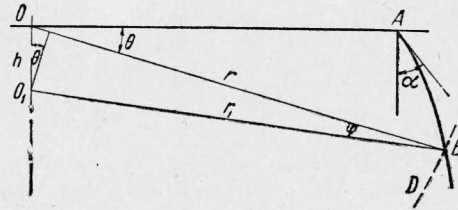
(6.1)

$$\delta = [\delta^\circ + \delta_{01}(\tau)] e^{-\tau}$$

$$\mu = [\mu^\circ + \mu_0(\tau)] e^{-\tau}$$

$$y = y^\circ e^{-1/2 \tau}$$

$$v = \left[v^\circ + 2 \frac{d\mu_0(\tau)}{d\tau} y^\circ \right] e^{-3/2 \tau}$$



Фиг. 1

Уравнения (1.1) в новых координатах примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu^\circ}{\partial \tau} + (\mu^\circ + \mu_0 - \delta_{01}) \frac{\partial \mu^\circ}{\partial \delta^\circ} + \frac{1}{2} y^\circ \frac{\partial \mu^\circ}{\partial y^\circ} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^\circ}{\partial y^\circ} &= 0 \\ \frac{\partial \mu^\circ}{\partial y^\circ} - \frac{\partial v^\circ}{\partial \delta^\circ} &= 0 \quad \left(\tau = \ln \frac{a_0 t}{r_0 \beta} = \ln \frac{R}{\beta}, \quad R = \frac{a_0 t}{r_0} \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь r_0 — радиус заряда, R — расстояние от места взрыва, выраженное в радиусах заряда, β — постоянная; для тротила [5] можно принять значение $\beta = 1.7$.

При распространении ударной волны вдоль свободной поверхности возможны два режима отражения [2] — регулярное и нерегулярное.

В первом случае волны разрежения, бегущие от области свободной поверхности, через которую прошел ударный фронт, его не догоняют и с ним не взаимодействуют. Во втором случае область течения, возмущенного влиянием свободной поверхности, захватывает также часть фронта ударной волны. Нерегулярное отражение начинается с момента времени, когда угол между ударным фронтом и перпендикуляром к свободной поверхности достигает критического значения [2]:

$$\alpha_* = \left(\frac{n+1}{2} \frac{P}{Bn} \right)^{1/2} = \left(\frac{n+1}{2} M_0 \mu \right)^{1/2} \quad (B = 3045 \text{ ат}, \quad n = 7.15) \quad (6.3)$$

Пусть этот угол был достигнут на расстоянии $R = R_*$ от места взрыва (при этом $\tau = \tau_*$). В нашем приближении имеем

$$\alpha_* = \frac{h}{r_0 R_*} = \frac{h}{\beta r_0} e^{-\tau_*} \quad (6.4)$$

Давление на фронте ударной волны будем определять по формуле [5]

$$P = \frac{D}{R} \frac{1}{\sqrt{\ln R - \ln \beta}} = \frac{D}{\beta} \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}} \quad (D = \text{const}) \quad (6.5)$$

(для тротила можно положить $D = 16400 \text{ ат}$). Приравнявая (6.3) и (6.4), получим

$$\frac{h}{\beta r_0 \sqrt{1/2(n+1)M_0}} = \sqrt{\mu e^{\tau_*}} = \sqrt{\mu^\circ + \mu_0} e^{1/2\tau_*} \quad (6.6)$$

Положим

$$y_0 = \frac{h}{\beta r_0 \sqrt{1/2(n+1)M_0}} \quad (6.7)$$

и примем, что на ударном фронте $\mu_0 + \mu^\circ = 1$ при $\tau = \tau_*$. Тогда из (6.5) и (6.6) следует, что

$$y_0 = e^{1/2\tau_*}, \quad M_0 = \frac{D}{\beta B n \sqrt{\tau_*}} \quad (6.8)$$

Задачу о взаимодействии ударной волны в воде со свободной поверхностью будем рассматривать, начиная с момента времени, соответствующего $\tau = \tau_*$, в той же постановке, что и в работе [5], где предполагалось, что центр, из которого возникла ударная волна, находился на свободной поверхности. Частные решения, полученные в предыдущих параграфах, позволяют избежать этого ограничения.

Согласно [5], будем предполагать, что возмущенное течение отделяется характеристической поверхностью BD (фиг. 1) уравнений (6.2) от того течения, куда возмущения не дошли. Последнее определяется уравнением [5]

$$\delta^\circ = (\mu^\circ + \mu_0) \tau - \tau_* - \delta_{01}(\tau) \quad (6.9)$$

Положение ударного фронта при этом определяется выражением

$$\delta^\circ = \sqrt{\tau} \sqrt{\tau_*} - \tau_* - \delta_{01}(\tau) \quad (6.10)$$

В дальнейшем выгодно перейти к системе координат, связанной с точкой пересечения оси симметрии со свободной поверхностью.

Рассмотрим фиг. 1. Установим связь между радиусами-векторами r_1 и r , а также U_1, V_1 и U, V в старых и новых координатах

$$r = r_1 \cos \varphi + h \sin \theta$$

При малых φ и θ

$$r = a_0 t [1 + 1/2(n+1)M_0\delta] = a_0 t [1 + 1/2(n+1)M_0\delta_1] (1 - 1/2\varphi^2) + h\theta$$

или

$$\frac{n+1}{2} M_0 \delta = \frac{n+1}{2} M_0 \delta_1 - \frac{h^2}{2a_0^2 t^2} + \frac{h}{a_0 t} \sqrt{1/2(n+1)} \sqrt{M_0} y \quad (6.11)$$

Отсюда

$$\delta = \delta_1 - 1/2 y_0^2 e^{-2\tau} + y_0 y e^{-\tau} \quad (6.12)$$

После преобразований (6.1)

$$\delta^\circ = \delta_1^\circ - 1/2 y_0^2 e^{-\tau} + y_0 y^\circ e^{-1/2\tau} - \delta_0(\tau) + 1/2 y_0^2 e^{-\tau_*} \quad (6.13)$$

$$\delta_0(\tau) = \delta_{10}(\tau) + 1/2 y_0^2 e^{-\tau_*}$$

Аналогично

$$V = V_1 - U \sin \varphi, \quad U = U_1 \cos \varphi$$

Откуда

$$\begin{aligned} v &= v_1 - \mu y_0 e^{-\tau}, & v^\circ &= v_1^\circ - \mu^\circ y_0 e^{-1/2\tau} - \mu_0(\tau) y_0 e^{-1/2\tau} \\ \mu &= \mu_1, & \mu^\circ &= \mu_1^\circ \end{aligned} \quad (6.14)$$

Таким образом, (6.9) и (6.10) в новой системе координат примут вид

$$\delta^\circ = (\mu^\circ + \mu_0) \tau - \tau_* - \delta_0(\tau) - \frac{1}{2} y_0^2 e^{-\tau} + y_0 y e^{-1/2 \tau} + \frac{1}{2} y_0^2 e^{-\tau_*} \quad (6.15)$$

$$v^\circ = -\mu^\circ y_0 e^{-1/2 \tau} - \mu_0(\tau) y_0 e^{-1/2 \tau} + 2\mu_0' y^\circ$$

$$\delta^\circ = V \tau V \tau_* - \tau_* - \delta_0(\tau) + y_0 y e^{-1/2 \tau} - \frac{1}{2} y_0^2 e^{-\tau} + \frac{1}{2} y_0^2 e^{-\tau_*} \quad (6.16)$$

Решая уравнение характеристик системы уравнений (6.2) при условии, что искомая поверхность распространяется по течению (6.15) и при $\tau = \tau_*$ проходит через точку A , находим уравнение характеристической поверхности

$$\delta^\circ = q_0(\tau) y^{\circ 2} + y^\circ \chi_1' + \chi_0'$$

$$\chi_0' = \tau - \tau_* - \delta_0(\tau) - \frac{1}{2} y_0^2 e^{-\tau} + \frac{1}{2} y_0^2 e^{-\tau_*} + \frac{1}{2} \tau J(\tau, \tau_*) \quad (6.17)$$

$$\chi_1' = y_0 e^{-1/2 \tau} [1 - 2q_0(\tau) (1 - e^{\tau - \tau_*})]$$

$$\left(J(\tau, \tau_*) = \int_{\tau_*}^{\tau} \frac{1}{\tau} [\chi_1'^2 - y_0^2 e^{-\tau}] d\tau, q_0(\tau) = \frac{\tau}{2(\tau + 1) - 2(\tau_* + 1) e^{\tau - \tau_*}} \right)$$

Из (6.16) и (6.17) определяем значение $y^\circ = y_B^\circ$, при котором фронт нарушений влиянием свободной поверхности переходит в невозмущенный ударный фронт

$$y_B^\circ = -y_0 e^{-1/2 \tau} (e^{\tau - \tau_*} - 1) + \left[y_0^2 e^{-\tau} (e^{\tau - \tau_*} - 1)^2 - \frac{\tau - V \tau_*}{q_0(\tau)} - \frac{1/2 \tau J(\tau, \tau_*)}{q_0(\tau)} \right]^{1/2} \quad (6.18)$$

§ 7. Будем искать решение в области ABD (фиг. 1), ограниченной характеристической поверхностью BD , линией нулевого давления (фиг. 1) и ударным фронтом AB , положение которого определяется уравнением [5]

$$\delta_0 - \frac{1}{2} \mu_0 + \frac{\partial \delta^\circ}{\partial \tau} + \frac{1}{2} y^\circ \frac{\partial \delta^\circ}{\partial y^\circ} = \frac{1}{2} \mu^\circ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta^\circ}{\partial y^\circ} \right)^2 \quad (7.1)$$

Граничными условиями на характеристике (6.17) будут условия сопряжения с одномерным течением (6.15), на ударном фронте AB — условия динамической совместности, в нашем приближении они сводятся к условию непрерывности касательной к ударному фронту составляющей вектора скорости частиц

$$(\mu^\circ + \mu_0) \frac{\partial \delta^\circ}{\partial y^\circ} + v^\circ = 0 \quad (7.2)$$

В окрестности точки A ($\delta^\circ = 0, y^\circ = 0$) имеет место течение типа течения Прандтля — Майера, оно определяется уравнениями [5]

$$\mu^\circ = -\frac{1}{2} \frac{\delta^{\circ 2}}{y^{\circ 2}} + \mu_0, \quad v^\circ = \frac{1}{3} \frac{\delta^{\circ 3}}{y^{\circ 3}} + v_0(\tau) \quad (7.3)$$

Искомое решение должно обладать особенностью (7.3). Кроме этих условий, будем считать, что в точке A угол падения фронта ударной волны [5]

$$\alpha_*' = V^{1/2} (n + 1) p' / Bn = V^{1/2} (n + 1) M_{c\mu_0}(\tau) e^{-\tau} \quad (7.4)$$

Это условие является некоторым аналогом (7.2) [5]. Из (7.1) и (7.4) следует

$$\left. \frac{\partial \delta^\circ}{\partial y^\circ} \right|_{y^\circ=0} = V \mu_0, \quad \mu_0 = \frac{d\delta_0}{d\tau} \quad (7.5)$$

§ 8. Для построения течения в указанной выше области воспользуемся частными решениями (5.3) при $b = 1$. Эти решения удовлетворяют условию (7.3) только при $\xi \equiv 0$ и $U \equiv 0$.

В этом случае осуществляется вариант (2.7), функции $\varphi_0, \varphi_1, \chi_0, \chi_1$ при этом определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_{1q} - \chi_{1q}\varphi_{2q} &= 0, & \chi_{1\tau} + \chi_{1q}(\varphi_2 - q + 2q^2) - \varphi_1 - 2q\chi_1 + \frac{1}{2}\chi_1 &= 0 \\ \varphi_{0q} - \chi_{0q}\varphi_{2q} &= 0, & \chi_{0\tau} + \chi_{0q}(\varphi_2 - q + 2q^2) - \varphi_0 - \frac{1}{2}\chi_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

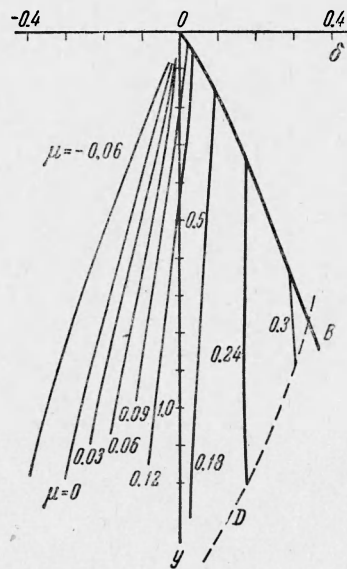
Функция φ_2 определяется из уравнения (3.1); она получена в работе [5]

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q + \frac{2}{81}\ln\left(\frac{2}{9} - q\right) - \frac{1}{60}\left(\frac{4}{81}\right)^2 \frac{0.3 - \ln(2/9 - q)}{(2/9 - q)^2} + \\ &+ \frac{q_0}{\tau} + \frac{1}{2}q_0^2 - \frac{2}{81}\ln\left(\frac{2}{9} - q_0\right) - \frac{1}{3}q_0 + \frac{1}{60}\left(\frac{4}{81}\right)^2 \frac{0.3 - \ln(2/9 - q_0)}{(2/9 - q_0)^2} \end{aligned}$$

Остальные функции определяются по формулам

$$\begin{aligned} \psi_3 &= -\frac{2}{3}[\varphi_{2\tau} + \varphi_{2q}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \varphi_2 - 2\varphi_2q] \\ \psi_2 &= -\varphi_{1\tau} - \varphi_{1q}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \chi_1\varphi_2 + \varphi_1q - \frac{1}{2}\varphi_1 \\ \psi_1 &= -2\varphi_{0\tau} - 2\varphi_{0q}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \varphi_1\chi_1 \\ \psi_{0q} &= \varphi_1\chi_{0q} - \chi_1\varphi_{0q} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Представим решение одномерного течения (6.15) в следующем виде:



Фиг. 2

$$\begin{aligned} \mu^0 &= \frac{q}{\tau} y^{02} + \varphi_1^0 y^0 + \varphi_0^0 \\ \delta^0 &= q y^{02} + \chi_1^0 y^0 + \chi_0^0 \\ v^0 &= -\mu_0^0 y_0 e^{-1/2\tau} - \mu_0 y_0 e^{-1/2\tau} + 2\mu_0^0 y^0 \end{aligned} \quad (8.3)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1^0 &= -2q_0\tau^{-1}y_0e^{-1/2\tau}(1 - e^{\tau-\tau_*}) \\ \varphi_0^0 &= 1 - \mu_0 + \frac{1}{2}J(\tau, \tau_*) \end{aligned}$$

Из условия сопряжения течений (5.3) и (8.3) на характеристике BD (7.4), на которой $q = q_0(\tau)$, имеем

$$\begin{aligned} \varphi_2(q_0, \tau) &= q_0 / \tau, \\ \varphi_1(q_0, \tau) &= \varphi_1^0 \\ \varphi_0(q_0, \tau) &= \varphi_0^0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

а также

$$\begin{aligned} \chi_1(q_0, \tau) &= \chi_1^0, & \chi_0(q_0, \tau) &= \chi_0^0 \\ \psi_3(q_0, \tau) &= 0 \\ \psi_2(q_0, \tau) &= -q_0\tau^{-1}y_0e^{-1/2\tau} \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\psi_1(q_0, \tau) = 2\mu_0^0 y^0 - \varphi_1^0 y_0 e^{-1/2\tau}, \quad \psi_0(q_0, \tau) = \varphi_0^0 y_0 e^{-1/2\tau} - \mu_0 y_0 e^{-1/2\tau}$$

Система (8.1) имеет единственное решение при граничных условиях (8.4), однако таким же образом, как в работе [5], можно показать, что если выполнены (8.4), то (8.5) удовлетворяются тождественно.

Последнее является следствием тех обстоятельств, что кривая $q=q_0(\tau)$ — характеристика системы уравнений (8.1), а (8.3) содержится в классе решений (5.4).

§ 9. Уравнение, определяющее положение фронта ударной волны, при условии (7.5) имеет вид

$$\frac{1}{2} \mu_0 + \frac{\partial \delta^\circ}{\partial \tau} + \frac{1}{2} y^\circ \frac{\partial \delta^\circ}{\partial y^\circ} = \frac{1}{2} \mu^\circ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta^\circ}{\partial y^\circ} \right)^2 \quad (9.1)$$

Это уравнение должно быть решено при условиях

$$\begin{aligned} \delta^\circ(y_B^\circ, \tau) &= V\tau \sqrt{\tau_*} - \tau_* - \int_{\tau_*}^{\tau} \mu_0 d\tau + y_B^\circ y_0 e^{-1/2 \tau} - \frac{1}{2} y_0^2 e^{-\tau} + \frac{1}{2} y_0^2 e^{-\tau_*} \\ \frac{\partial \delta^\circ}{\partial y^\circ} \Big|_{y^\circ=y_B^\circ} &= y_0 e^{-1/2 \tau} \end{aligned} \quad (9.2)$$

Причем при всех τ

$$\delta^\circ(0, \tau) = 0 \quad (9.3)$$

В граничные условия (8.4), (8.5), (9.2) входит произвольная функция $\mu_0(\tau)$. Она определялась методом итерации так же, как в работе [5]. Методом характеристик на ЭЦВМ решалась система (8.1) совместно с уравнением (9.1) в интервале от $\tau = \tau_*$ до $\tau = 4.6$; в зависимости от степени выполнения условия (9.3) вычислялись поправки к предыдущему значению $\mu_0(\tau)$. И снова определялись поля давлений и положение фронта. Условие (9.3) достаточно хорошо удовлетворяется при

$$\mu_0(\tau) = 0.5 \left[\frac{V\tau_*}{V\tau} - 0.065 \left(\frac{\tau_*}{\tau} \right)^{0.75} + e^{\tau_* - \tau} \right] \quad (9.4)$$

На фиг. 2 приведены результаты расчетов при $\tau_* = 2.6$ ($h/r_0 = 6$), $\tau = 4.3$ ($R = 120$).

При помощи формул (6.7) и (6.8) легко произвести пересчет соответствующих безразмерных величин в давления и расстояния.

Условие (7.2) достаточно хорошо удовлетворяется вдоль всего фронта, исключая окрестность точки А.

В заключение автор благодарит С. А. Христиановича за ряд обсуждений, связанных с данной работой.

Поступила 25 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
2. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
3. Гриб А. А., Березин А. Г. Нерегулярное отражение плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПМТФ, 1960, № 2.
4. Заславский Б. И. Некоторые частные решения уравнений «коротких волн». ПМТФ, 1962, № 1.
5. Заславский Б. И. Об отражении сферической ударной волны от свободной поверхности. ПМТФ, 1963, № 6.